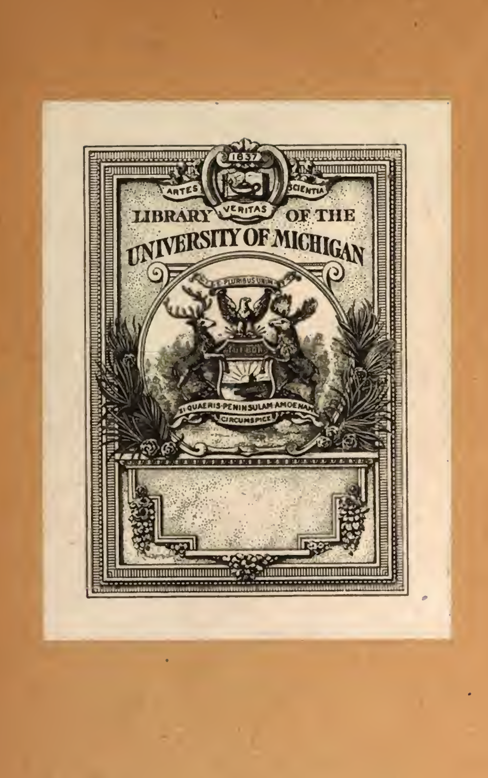



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ELEMENTARE
MECHANIK

ALS EINLEITUNG IN DAS STUDIUM

DER THEORETISCHEN PHYSIK.

VON

DR. WOLDEMAR VOIGT,

O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 55 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

VERLAG VON VEIT & COMP.

1889.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Zu der Abfassung des vorliegendes Werkes bin ich veranlasst worden durch das mir in meinem Amte mehrfach entgegengetretene Bedürfniss nach einem Buche, welches geeignet ist, die Studirenden der Mathematik und Physik soweit in die Grundlehren und Methoden der allgemeinen Mechanik einzuführen, als diese in den Vorlesungen über die einzelnen Theile der theoretischen Physik zur Anwendung kommen und als bekannt vorausgesetzt werden müssen. Ausserdem habe ich gemeint, dass bei der immer wachsenden Bedeutung, welche theoretisch-physikalische, speciell mechanische Betrachtungen in den verschiedensten Gebieten der Naturwissenschaft gewinnen, dem Chemiker, Mineralogen, Physiologen u. s. f. ein Buch willkommen sein möchte, welches die analytische Mechanik nicht nach ihren mathematischen, sondern nach ihren physikalischen Beziehungen behandelt, in knapper Form alles für das Verständniss und die Anwendung Wesentliche bietet und doch nur geringe mathematische Vorkenntnisse des Lesers erfordert. Denn, wie der Name „elementare Mechanik“ andeuten soll, wird in dem vorliegenden Werk nur der Inhalt der gewöhnlichen einleitenden Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und analytische Geometrie vorausgesetzt, von der Theorie der Reihen, der Differentialgleichungen, der Potentialfunction, der elliptischen Functionen u. s. w. aber kein Gebrauch gemacht.

Der Zweck, durch die Entwickelung der Grundgesetze der Mechanik in das Studium der theoretischen Physik einzuführen, hat die Form des Buches bestimmt. Von der Vollständigkeit, welche ein Handbuch der Mechanik zu zeigen hat, musste durchaus abgesehen und in jeder Hinsicht nur eine Auswahl geboten werden. Die Ableitung der Grundgleichungen für die Bewegung von Massenpunkten, von starren und von nicht starren Körpern ist auf möglichst directe und anschauliche Weise vorgenommen und jede Auseinandersetzung über andere zu ihnen führende Wege, wie über die hiermit im Zusammenhang stehenden allgemeinen mechanischen Principien, ist unterlassen. Von Anwendungen sind besonders solche bevorzugt, welche eine practische Bedeutung haben, z. B. die Theorie wichtiger physikalischer Messinstrumente liefern. Bei allen ist ein grosser Werth auf die Discussion der theoretischen Resultate gelegt, um sowohl zu zeigen, welche Fragen an dieselben gestellt werden können, als auch, wie ihre Beantwortung zu finden ist. Eine Reihe von Nebendingen, welche dem Anfänger leicht Schwierigkeiten bieten, aber gemeinhin übergangen werden, wie das doppelte Vorzeichen in Differential- und Integralgleichungen, das Gültigkeitsbereich von Lösungen und dergl., sind mit Ausführlichkeit besprochen, um den Leser zu veranlassen, sich über jeden gethanen Schritt vollständige Klarheit zu verschaffen.

Die Beschränkung hinsichtlich der Anwendung der Hülfsmittel der Mathemathik hat besonders im dritten Theil, der Mechanik nichtstarrer Körper, zu einer von der gebräuchlichen theilweise abweichenden Darstellung geführt. Da die Theorie der partiellen Differentialgleichungen nicht vorausgesetzt werden sollte, so war es nöthig, sowohl in der Dynamik idealer und reibender Flüssigkeiten, wie in der Statik der elastischen Körper von der Betrachtung unendlicher Körper auszugehen, für diese ein System von particulären Lösungen der bezüglichen Differentialgleichungen aufzustellen und den Uebergang zu endlichen Körpern dadurch vorzunehmen, dass Oberflächen aufgesucht wurden, welche bei Annahme dieser Lösungen unter gewissen Umständen ihre Begrenzungen bilden können. Wurde durch diese Methode die Behandlung einiger wichtiger Probleme, z. B. der Biegung

eines elastischen Stabes, unthunlich, so ergaben sich dafür andererseits interessante und lehrreiche Beziehungen zwischen gewissen Problemen der Elasticität und Hydrodynamik, die bei der gewöhnlichen Darstellung nicht so lebendig hervortreten.

Von Quellenangaben bezüglich der behandelten Probleme oder der gewählten Darstellung habe ich vollkommen abgesehen; dieselben hätten bei der so ausgedehnten Literatur über Mechanik das Buch unverhältnissmässig belastet und erschienen mir um so mehr überflüssig, als jeder Leser, der in dieses Gebiet tiefer eindringen will, zu einem der grossen Handbücher über Mechanik greifen wird, in denen sich ausführliche Literaturverzeichnisse finden.

Hier will ich nur hervorheben, dass die „Einleitung in die theoretische Physik" betitelten Vorlesungen meines verehrten Lehrers F. E. Neumann (Leipzig 1883), welche in einem engeren Bereich nahe dasselbe Ziel verfolgen, wie meine Arbeit, mir vielfache Anregungen und hinsichtlich der Anwendung der mechanischen Gleichungen auf die Theorie physikalischer Messinstrumente auch directe Vorbilder geliefert haben.[1] Andererseits habe ich die Vorzüge neuerer, theilweise vereinfachter Darstellungsweisen, die sich in den Vorlesungen von A. Clebsch, C. Neumann, G. Kirchhoff und Anderen finden, möglichst auszunutzen gesucht. Eigenes zu geben bot sich natürlich in einem so unendlich viel angebauten Gebiete nur selten Gelegenheit, am meisten noch im letzten Theil, der, wie oben gesagt, für die besonderen Ziele dieses Buches eine besondere Darstellung verlangte; vielleicht erweckt die Behandlung der elastischen Schwingungen unter consequenter Benutzung der von Riemann in seiner Arbeit „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" (Abh. der Gött. Ac. d. Wiss. VIII, 1860) zuerst mitgetheilten, äusserst anschaulichen Integrationsmethode das Interesse auch des Fachmannes. Im Uebrigen konnte meine Aufgabe nur sein, aus der Fülle des Materiales Passendes auszuwählen und durch Anordnung und Darstellung das Interesse an dem Gegenstand

[1] Leider sind diese Vorlesungen in so fehlerhafter Gestalt herausgegeben worden, dass man Bedenken tragen muss, Anfänger auf sie zu verweisen.

zu wecken und das Verständniss der Entwickelungen zu erleichtern; ich habe mich derselben mit grosser Liebe unterzogen und hoffe, das gesteckte Ziel nicht ganz verfehlt zu haben.

Den Herren Dr. P. Drude und Dr. F. Pockels, welche mich bei der Correctur des Satzes treulich unterstützt haben, sage ich für ihre Hülfe herzlichsten Dank.

Göttingen, im Juli 1889.

W. Voigt.

Inhalt.

I. Theil. Mechanik materieller Punkte.

II. Theil. Mechanik starrer Körper.

III. Theil. Mechanik nichtstarrer Körper.

Erster Theil.

Mechanik materieller Punkte.

§ 1. Materieller Punkt, Trägheit; Einheiten für Längen und Zeiten, Scalaren und Vectoren.

Die Ableitung der allgemeinsten Gesetze für die Bewegung eines Körpers, welche das letzte Ziel unserer Entwickelungen bildet, ist ein sehr complicirtes Problem, das wir erst nach mannigfachen Vorbereitungen in Angriff nehmen können. Gemäss dem in allen Theilen der theoretischen Physik angewandten Verfahren, von speciellen einfachen Fällen auszugehen und aus diesen die complicirten zusammenzusetzen, vereinfachen wir uns ebenfalls die Aufgabe, indem wir die Betrachtung an einen speciell gewählten Körper anknüpfen, bei dem bis zu einem erst später scharf zu bestimmenden Grade die von der Form und Zusammensetzung der Körper herrührende Complication des Bewegungsproblemes in Wegfall kommt.

Wir betrachten die Bewegung eines materiellen Punktes, d. h. einer Quantität Materie, die sich innerhalb eines so kleinen Raumes befindet, dass seine Dimensionen gegen alle bei der Aufgabe sonst in Betracht kommenden Längen — z. B. gegen die während der Bewegung in endlicher Zeit zurückgelegten Wege, gegen die Entfernungen von anderen Massenpunkten — verschwindend klein sind.

Es ist wegen der Anwendungen nützlich, diese Definition dessen, was wir unter einem Massenpunkt verstehen wollen, wohl zu beachten. Nicht die Kleinheit des Körpers für unsere Wahrnehmung (die sogenannte absolute Kleinheit), welche nirgends eine wesentliche Bedeutung in der Mechanik besitzt, lässt eine Vereinfachung des Bewegungsproblems zu, sondern eben nur das genannte Verhältniss zu andern bei der Bewegung in Betracht kommenden Längen.

Indem wir also von Form und Zusammensetzung der betrachteten Körper absehen, bleibt zur Unterscheidung verschiedener nur Eines übrig, die Menge der in ihnen vereinigten Materie. Das Maass dieser

Quantität werden wir gewinnen durch die Eigenschaft der **Trägheit**, die wir seit Galilei aller Materie beilegen gemäss folgender Definition:

Die Materie ist träge, das heisst sie verlässt den Bewegungszustand, in welchem sie sich befindet, nicht ohne äussere Ursache. Verschiedene Körper besitzen verschiedene Trägheit, das heisst sie setzen dem Uebergang aus einem Zustand in den andern verschieden grossen Widerstand entgegen.

Wir legen die Eigenschaft der Trägheit der Materie bei; damit ist ausgesagt, dass wir es hier mit einer Annahme zu thun haben, die, obwohl sie ein Fundament der ganzen theoretischen Mechanik bildet, eine directe experimentelle Prüfung nicht gestattet; in der That hat man im Alterthum die entgegengesetzte Ansicht vertreten und für richtig gehalten, dass ein einmal in Bewegung gesetzter Körper von selbst der Ruhe zustrebe; auch giebt es gewisse Erscheinungen, die sich durch die Annahme eines Mediums von verschwindend kleiner Trägheit am einfachsten erklären.

Die Hypothese der Trägheit prüfen wir wie zahlreiche andere in der theoretischen Physik eingeführte **indirect**, indem wir die Folgerungen, die sich aus denselben durch strenge Analyse ergeben, mit der Beobachtung vergleichen. Wir werden ein System von Hypothesen so lange für zulässig halten, als alle aus demselben mit Strenge folgenden Thatsachen mit der Wirklichkeit übereinstimmen und nicht durch eine kleinere Anzahl unabhängiger Annahmen zu erklären sind.

Um die Eigenschaft der Trägheit zur Festsetzung einer Scala zu verwenden, welche die Messung der in einem Massenpunkt vereinigten Quantität Materie gestattet, wenden wir uns der Betrachtung der Bewegung unseres materiellen Punktes zu und werden durch dieselbe Mittel erhalten, zu erkennen, wann der in dem Trägheitsgesetz eingeführte „Bewegungszustand“ sich mit der Zeit ändert oder nicht ändert.

Nach den getroffenen Festsetzungen ist die Lage eines als Massenpunkt bezeichneten Körpers vollständig bestimmt durch den Ort irgend eines in ihm beliebig angenommenen mathematischen Punktes, seine Bewegung durch die Ortsveränderung desselben mit der Zeit. Die bei der Bewegung von ihm beschriebene Curve nennen wir die **Bahn** des Massenpunktes.

Den Ort bestimmen wir durch die Coordinaten, zumeist die rechtwinkligen x, y, z, des Punktes in Bezug auf ein ruhendes Coordinatensystem. Ist der Punkt in Bewegung, so ändert sich x, y, z mit der Zeit t, es ist z. B.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t);$$

die Bewegung ist vollständig „beschrieben“, d. h. ihre Gesetze sind

erschöpfend ausgesprochen, wenn für einen Massenpunkt diese drei Functionen der Zeit bekannt sind. Aus ihnen folgen unter Anderem die Gleichungen der Bahn, als des Inbegriffes aller zu irgend einer Zeit vom Punkt eingenommenen Orte, indem man aus den vorstehenden drei Formeln durch Elimination zwei von t freie bildet.

Ist die Gestalt der Bahn gegeben oder sonst bekannt, so ist es unter Umständen vortheilhaft, den Ort des Massenpunktes in der Bahn zu bestimmen durch den längs der Bahn gemessenen Abstand s, den jener zur gegebenen Zeit t von einem auf der Bahncurve willkürlich angenommenen Nullpunkt besitzt. Indem man die Richtung der Bahn von jenem Punkte aus nach der einen Seite positiv, nach der andern negativ rechnet, kömmt man dazu, auch positive und negative Werthe der Entfernung s zu benutzen. Die Abhängigkeit der Länge s von der Zeit t, also eine Relation von der Form

$$s = f(t),$$

bestimmt vollständig die Bewegung des Massenpunktes in der Bahn.

Sollen Bewegungsphänomene der numerischen Berechnung unterworfen werden, so ist es nöthig, die Einheiten festzusetzen, in welchen die auftretenden physikalischen Grössen gemessen werden sollen. Bis jetzt sind uns nur zwei Arten derselben vorgekommen: Längen und Zeiten. Als Einheit der Länge benutzen wir zumeist das Centimeter, beiläufig der tausendmillionste Theil des Erdmeridianquadranten, in präciserer Weise definirt als der hundertste Theil der Länge des in Paris aufbewahrten Normalmeters bei der Temperatur des schmelzenden Eises. Als Einheit der Zeit benutzen wir die Secunde, beiläufig der 86 400. Theil der Dauer eines Sonnentages, genauer derselbe Bruchtheil derjenigen constanten Länge des Tages, die man erhalten würde, wenn die Erde sich während eines Jahres in einem Kreise so um die Sonne bewegte, dass sie in gleichen Zeiten stets gleiche Bogen beschriebe (Secunde des mittleren Sonnentages). In diesen Einheiten sind im Folgenden zunächst alle Angaben und Rechnungen gemacht zu denken.

Die Gegenüberstellung von Längen- und Zeiteinheiten giebt Veranlassung, noch eine allgemeine Bemerkung anzuschliessen. Drücken wir den Abstand zwischen zwei Zeit- oder zwei Raumpunkten numerisch aus, so ist dadurch zwar die gegenseitige Lage der beiden Zeitpunkte vollständig bestimmt, nicht aber ebenso die der beiden Raumpunkte, denn dazu ist ausser der Länge ihres Abstandes auch noch die Richtung, in welche derselbe fällt, erforderlich.

Dies weist uns darauf hin, dass wir es hier zunächst mit zwei verschiedenen Arten von Beziehungen zu thun haben werden, mit solchen, die durch eine Zahl erschöpfend ausgedrückt werden, und mit solchen, die hierzu ausserdem noch der Angabe einer Richtung,

d. h. der Festsetzung von zwei Winkeln gegen zwei festgelegte Richtungen bedürfen.

Die Grössen, welche Beziehungen der ersten Art ausdrücken, nennen wir Zahlgrössen oder Scalaren, die, welche solche der letzteren Art geben, Richtungsgrössen oder Vectoren; von beiden werden wir im Folgenden eine grosse Zahl kennen lernen und benutzen. Dazu bemerken wir im Voraus, dass nicht stets die Vectorgrössen nach ihren allgemeinsten Eigenschaften zur Geltung kommen und unter Umständen scheinbar als reine Zahlgrössen auftreten, z. B. stets dann, wenn es sich um die Vergleichung von Vectoren handelt, die sich sämmtlich auf die gleiche Richtung beziehen. So sind Abscissen, obwohl Strecken, doch ebenso Scalaren wie die Zeiten; hingegen ist der Radius im Polarcoordinatensystem, als durch Länge und Richtungswinkel bestimmt, recht eigentlich ein Vector.

§ 2. Gleichförmige geradlinige Bewegung, Geschwindigkeit; Dimensionen.

Die denkbar einfachste Bewegung wird ein Massenpunkt dann ausführen, wenn er sich längs einer geraden Linie so fortschiebt, dass er in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurücklegt. In diesem Falle wächst sein Abstand s von dem auf der Geraden willkürlich angenommenen Nullpunkt lineär mit der Zeit, was sich ausdrückt durch die Formel:

$$s = s_0 + Vt, \tag{1}$$

in welcher s_0 und V Constanten sind.

Hierin bedeutet s_0 diejenige Entfernung s, die der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ besass, d. h. in dem Moment, von dem aus wir die Zeit in Zeiteinheiten zählen. Zu zwei andern Zeitpunkten t_1 und t_2, von denen t_2 später fallen mag als t_1, möge die Entfernung die Werthe s_1 und s_2 besitzen, dann ist $s_2 - s_1$ der in der Zeit $t_2 - t_1$ zurückgelegte Weg, und man bezeichnet das constante Verhältniss dieses Weges zu der zum Durchmesser nöthigen Zeit, nämlich

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = V, \tag{2}$$

als die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung.

Da t_2 später fallen soll als t_1, so ist $t_2 - t_1$ stets positiv, V hat also das Vorzeichen von $s_2 - s_1$ und wird positiv oder negativ sein, je nachdem der erste oder zweite Ort des Massenpunktes weiter nach der als negativ bezeichneten Seite der Bahngeraden liegt. Die Geschwindigkeit ist also positiv oder negativ, je nachdem die Bewegung nach der positiven oder negativen Seite der Bahn hin stattfindet. Wir drücken dies kurz so aus, dass wir sagen: die Geschwindigkeit hat

die Richtung der Bewegung. Die Geschwindigkeit ist sonach eine Vectorgrösse.

Von der betrachteten Bewegung haben wir gesehen, dass sie durch eine nach Richtung und Grösse unveränderliche Geschwindigkeit charakterisirt ist; man nennt sie daher gleichförmig, oder gleichförmig geradlinig. Da bei ihr also der Bewegungszustand unveränderlich ist, so werden wir aus dem im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Trägheitsprincip schliessen müssen, dass sie dann stattfindet, wenn ein Massenpunkt sich selbst überlassen ist. Ein sich selbst überlassener Massenpunkt nimmt eine gleichförmige geradlinige Bewegung an; in dem speciellen Falle verschwindender Geschwindigkeit verharrt er an seinem Anfangsort.

Wir gehen nun zu der numerischen Berechnung der Geschwindigkeit über. Nach der gegebenen Definition ist dazu die Abmessung einer Länge und einer Zeit nothwendig und ausreichend; sind die Einheiten für Längen- und Zeitmessungen festgesetzt, so ist dadurch über die Einheit der Geschwindigkeit bereits verfügt — sie ist (wie man sagt) keine fundamentale, sondern eine abgeleitete Einheit.

Eine Geschwindigkeit 7 ist also, nachdem wir Centimeter und Secunde als fundamentale Einheiten eingeführt haben, eine solche, bei welcher der Weg in Centimetern, und die zu seiner Durchmessung nöthige Zeit in Secunden ausgedrückt, das Zahlenverhältniss 7 ergeben. Umgekehrt besitzt ein Massenpunkt, der in gleichförmiger Bewegung während 5 Minuten 15 Meter zurücklegt, die Geschwindigkeit

$$V = \frac{15 \cdot 100}{5 \cdot 60} = 5.$$

Wir schliessen hieran eine allgemeine Bemerkung.

Die Verbindung, in welcher die Fundamentalgrössen — von denen wir bisher die beiden, Länge und Zeit, benutzt haben — in irgend einer physikalischen Function Φ derselben auftreten, nennt man ihre Dimension in Verallgemeinerung des Gebrauchs, nach welchem ein Gebilde, das durch das Produkt zweier oder dreier Längen gemessen wird — also eine Fläche F, ein Raum R —, als von zwei oder drei Dimensionen (in Bezug auf die Länge als Fundamentalgrösse) bezeichnet wird. Die Dimension einer Funktion Φ bezeichnet man durch den in eckige Klammern geschlossenen Buchstaben $[\Phi]$, die Dimension der Fundamentalgrössen Länge und Zeit analog durch $[l]$ und $[t]$ und drückt den Zusammenhang zwischen ihnen durch eine Gleichung aus nach den Beispielen

$$[F] = [l^2], \quad [R] = [l^3], \quad [V] = [l\, t^{-1}], \quad [R V^{-1}] = [l^2 t].$$

Diese Schemata zeigen alle anschaulich, welche Arten von funda-

mentalen Einheiten in einer Function auftreten, und welche Benennung ihr demgemäss zu ertheilen ist. Eine Fläche beträgt eine Anzahl $[cm^2]$ (Quadratcentimeter), ein Raum eine Anzahl $[cm^3]$ (Cubikcentimeter), eine Geschwindigkeit eine Anzahl $[cm, sec^{-1}]$. Sie gewinnen besondere Wichtigkeit bei Vertauschung von fundamentalen Maasseinheiten, z. B. Centimeter mit Meter, Secunde mit Minute, wie das in der practischen Physik häufig geschieht.

Hier übersieht man leicht die folgende Regel: Ist die neue Längeneinheit das λ-fache, die neue Zeiteinheit das τ-fache der alten, so wird eine Grösse Φ, deren Dimension

$$[\Phi] = [l^m t^n]$$

ist, sich in den neuen Einheiten durch eine $(\lambda^{-m}\tau^{-n})$ mal grössere Zahl ausdrücken als in den ursprünglichen. So hat man eine Geschwindigkeit, die in Centimetern und Secunden gegeben ist, mit $60/100 = 0{,}6$ zu multipliciren, um sie in Meter und Minuten zu verwandeln.

In Bezug auf die Dimensionen gilt auch die fernere leicht verständliche Bemerkung: Alle durch Addition, Subtraction oder Gleichsetzung verbundenen Functionen müssen gleiche Dimensionen besitzen.

Nachdem wir im Vorstehenden die Dimension der Geschwindigkeit ausführlich erörtert haben, wird die folgende Betrachtungsweise nicht zu einem Missverständniss führen.

Setzen wir in der Definitionsgleichung

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

den Nenner $t_2 - t_1 = 1$, so bezeichnet der Zähler $s_2 - s_1$ den in dieser Zeiteinheit zurückgelegten Weg, und es ergiebt sich scheinbar die viel angewandte Definition der Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung als die in der Zeiteinheit zurückgelegte Wegstrecke. Aber diese Definition ist nur in dem Sinne richtig, dass die Geschwindigkeit proportional ist der in der Zeiteinheit zurückgelegten Wegstrecke, durch sie gemessen, veranschaulicht wird, denn Geschwindigkeit und Weg sind von ganz verschiedenen Dimensionen, können also zwar numerisch, niemals aber physikalisch gleich werden.

Indessen lässt sich die angeführte Definition, vorsichtig angewandt, mit Vortheil benutzen, um verschiedene gleichförmige Bewegungen anschaulich darzustellen und zu vergleichen. Während gleicher Zeiten δt werden bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen Strecken zurückgelegt, die mit den betreffenden Geschwindigkeiten proportional sind, die also, als Längen auf der Richtung der Bewegung aufgetragen, Alles, was eine gleichförmige geradlinige Bewegung

charakterisirt, nämlich Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, anschaulich darstellen.

In diesem Sinne werden wir Strecken weiterhin als Repräsentanten von Geschwindigkeiten gleichförmiger Bewegungen benutzen. Dabei soll, wenn V eine Geschwindigkeit bezeichnet, (V) ihren Repräsentanten geben. Ein gleiches Verfahren lässt sich für jede andere Vectorgrösse ebenfalls anwenden.

§ 3. Zusammensetzung und Zerlegung gleichförmiger Geschwindigkeiten.

Wird, während der betrachtete Massenpunkt mit der Geschwindigkeit V_1 längs einer Geraden a_1 fortschreitet, diese Gerade selbst mit dem auf ihr wandernden Punkt in einer beliebigen Richtung a_2 mit einer Geschwindigkeit V_2 gleichförmig verschoben, oder befindet sich die Gerade umgekehrt in der Richtung a_2 und hat der Massenpunkt auf ihr die Geschwindigkeit V_2, während sie selbst in der Richtung a_1 mit der Geschwindigkeit V_1 verschoben wird, so sagen wir, dass der Massenpunkt gleichzeitig die Geschwindigkeit V_1 in der Richtung a_1 und V_2 in der Richtung a_2 besitzt. Indem wir diese Vorstellung weiter ausbilden, können wir einen Massenpunkt beliebig viele Geschwindigkeiten V_h in beliebigen Richtungen gleichzeitig annehmen lassen.

Bleiben wir zunächst bei nur zwei Geschwindigkeiten, so ergiebt die unmittelbare geometrische Anschauung folgenden unter dem Namen des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten bekannten Satz:

Ein Massenpunkt, der gleichzeitig zwei constante Geschwindigkeiten V_1 und V_2 in den Richtungen a_1 und a_2 besitzt, bewegt sich gleichförmig in gerader Linie mit einer Gesammtgeschwindigkeit V, deren Repräsentant (V) nach Grösse und Richtung gegeben wird durch die Diagonale in dem aus den Repräsentanten der gegebenen Geschwindigkeiten (V_1) und (V_2) vervollständigten Parallelogramm.

Diese Construction liefert nach der nebenstehenden Figur sogleich folgende Formeln:

$$(V)^2 = (V_1)^2 + (V_2)^2 + 2\,(V_1)\,(V_2)\cos\varphi\,,$$

$$\frac{(V_1)}{\sin\varphi_1} = \frac{(V_2)}{\sin\varphi_2} = \frac{(V)}{\sin\varphi}\,,$$

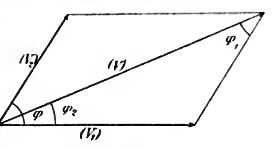


Fig. 1.

welche, da die Repräsentanten mit den Geschwindigkeiten proportional sind, für letztere ebenso liefern:

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\,V_1 V_2\cos\varphi\,, \qquad \frac{V_1}{\sin\varphi_1} = \frac{V_2}{\sin\varphi_2} = \frac{V}{\sin\varphi}\,. \tag{3}$$

Stehen zwei Geschwindigkeiten V_1, V_2 mit einer dritten V in dem vorstehend erörterten Zusammenhang, so nennen wir sie der letzteren **aequivalent** und bezeichnen dies kurz durch

$$V \text{ aeq. } V_1,\ V_2.$$

V heisst dann auch die Resultirende aus V_1 und V_2, umgekehrt heissen V_1 und V_2 die Componenten von V.

Die Construction des Parallelogramms gestattet nun bei wiederholter Anwendung auch für beliebig viele gegebene Geschwindigkeiten die resultirende Gesammtgeschwindigkeit nach Grösse und Richtung zu bestimmen (s. Fig. 2).

Denn wie V_{I} aeq. V_1, V_2 ist, so ist auch
V_{II} aeq. V_{I}, V_3, d. h. aeq. V_1, V_2, V_3,
V_{III} aeq. V_{II}, V_4, d. h. aeq. V_1, V_2, V_3, V_4 u. s. f.

Beachtet man, dass in der Figur, welche die successive Zusammensetzung der Geschwindigkeiten darstellt, die gebrochene Linie 0, 1, 2, 3, 4 durch die gleichsinnige Aneinanderreihung der Repräsentanten sämmtlicher gegebenen Geschwindigkeiten gebildet wird, so kann man das Resultat der Operation anschaulich auch so aussprechen:

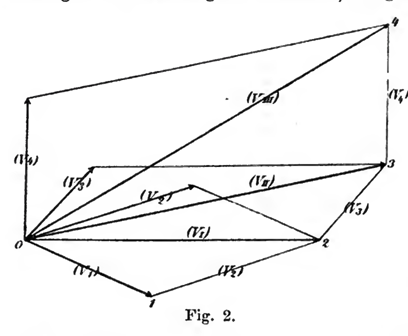


Fig. 2.

Um bei n gegebenen Geschwindigkeiten den Repräsentanten der resultirenden Gesammtgeschwindigkeit zu construiren, füge man die Repräsentanten aller gegebenen Geschwindigkeiten gleichsinnig an einander. Die Strecke vom Anfangs- bis zum Endpunkte der so erhaltenen gebrochenen Linie giebt nach Grösse und Richtung den Repräsentanten der resultirenden Geschwindigkeit.

Als specielles Resultat sei angeführt: n parallele Geschwindigkeiten setzen sich zu einer einzigen gleichgerichteten zusammen, deren Grösse gleich der Summe aller gegebenen ist.

Der obige allgemeine Satz lässt sich ohne Weiteres in folgender Weise umkehren:

Jede gebrochene Linie, mittelst deren man die beiden Enden des Repräsentanten einer gegebenen Geschwindigkeit

verbindet, lässt sich deuten als die gleichsinnige Aneinanderreihung der Repräsentanten von Geschwindigkeiten, welche mit der gegebenen aequivalent sind.

Hieraus erhellt sofort, dass, während das Problem der Zusammensetzung von gegebenen Geschwindigkeiten vollständig bestimmt war, seine Umkehrung, die Zerlegung einer gegebenen Geschwindigkeit in ein System aequivalenter Componenten, unendlich viele Lösungen zulässt und zu seiner Bestimmung noch einschränkende Bedingungen verlangt.

Von diesen sind die wichtigsten die folgenden:

a) Eine gegebene Geschwindigkeit V ist zu zerlegen in zwei Componenten, für deren eine die Grösse V_1 und die Richtung, d. h. der Winkel φ_2, den sie gegen V einschliesst, gegeben ist.

Nach Fig. 1 erhält man hier sofort

$$V_2^2 = V^2 + V_1^2 - 2\,V V_1 \cos\varphi_2 = (V - V_1)^2 + 4\,V_1 V \sin^2\frac{\varphi_2}{2},$$
$$\sin\varphi_1 = \frac{V_1}{V_2}\sin\varphi_2. \tag{4}$$

b) Eine gegebene Geschwindigkeit V ist in zwei Componenten zu zerlegen, deren Richtungen (natürlich mit V in einer Ebene liegend) durch die Winkel φ_2 und φ_1, die sie mit V einschliessen, gegeben sind; gesucht sind ihre Grössen V_1 und V_2.

Man erhält nach Fig. 1

$$V_1 = V\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad V_1 = V\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{5}$$

Stehen die beiden Richtungen normal zu einander, d. h. ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, so ist

$$V_1 = V\sin\varphi_1 = V\cos\varphi_2; \quad V_2 = V\sin\varphi_2 = V\cos\varphi_1. \tag{6}$$

c) Eine gegebene Geschwindigkeit V ist in drei zu einander normale Componenten zu zerlegen, deren Richtungen gegen V gegeben sind. Bezeichnen wir diese drei Richtungen als die Coordinatenaxen mit X, Y, Z, die Winkel von V mit ihnen durch α, β, γ, die Geschwindigkeitscomponenten ihnen parallel mit u, v, w, so ist:

$$u = V\cos\alpha, \quad v = V\cos\beta, \quad w = V\cos\gamma, \tag{7}$$

und umgekehrt

$$\cos\alpha = u/V, \ \cos\beta = v/V, \ \cos\gamma = w/V, \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2. \tag{8}$$

Dies Resultat ist zu benutzen, um das allgemeinste Problem der Zusammensetzung von beliebigen Geschwindigkeiten, das wir bisher nur geometrisch behandelt haben, nun auch analytisch durchzuführen.

Wir denken uns n beliebig gerichtete Geschwindigkeiten gegeben durch ihre Grösse V_h und ihre Richtungswinkel α_h, β_h, γ_h; es handelt sich um Richtung und Grösse der Resultirenden V.

Zerlegen wir jede einzelne Geschwindigkeit V_h nach den drei Coordinatenaxen X, Y, Z, so mögen die entstehenden Componenten u_h, v_h, w_h genannt werden. Es ist dann:

$$u_h = V_h \cos \alpha_h, \quad v_h = V_h \cos \beta_h, \quad w_h = V_h \cos \gamma_h. \tag{9}$$

Die parallelen Componenten lassen sich aber sogleich zusammensetzen zu einer einzigen Geschwindigkeit, die gleich ihrer Summe ist; so gelangt man zu nur drei Componenten parallel X, Y, Z von dem Betrage

$$\begin{aligned} u &= \sum u_h, & v &= \sum v_h, & w &= \sum w_h, \\ &= \sum V_h \cos \alpha_h, & &= \sum V_h \cos \beta_h, & &= \sum V_h \cos \gamma_h, \end{aligned} \tag{9'}$$

und diese geben, nach den letzten Formeln zusammengesetzt, die resultirende Gesammtgeschwindigkeit V und ihre Richtungswinkel α, β, γ durch die Gleichungen:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad \cos \alpha = u/V, \quad \cos \beta = v/V, \quad \cos \gamma = w/V. \tag{9''}$$

Auch das Problem der Zerlegung einer Geschwindigkeit behandelt sich unter Umständen besonders bequem durch Einführung der Componenten nach den Richtungen der Coordinatenaxen.

Sei z. B. das oben mit a) bezeichnete Problem angenommen: die Zerlegung einer gegebenen Geschwindigkeit V in zwei Componenten, von denen die eine V_1 sowohl nach Grösse als nach Richtung gegeben ist. Die Richtung von V sei durch die Winkel α, β, γ, die von V_1 durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 gegen die Coordinatenaxen gegeben, die der gesuchten Componente V_2 ebenso durch α_2, β_2, γ_2. Für die Componenten nach den Coordinatenaxen gilt demgemäss:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \alpha, & v &= V \cos \beta, & w &= V \cos \gamma, \\ u_1 &= V_1 \cos \alpha_1, & v_1 &= V_1 \cos \beta_1, & w_1 &= V_1 \cos \gamma_1, \\ u_2 &= V_2 \cos \alpha_2, & v_2 &= V_2 \cos \beta_2, & w_2 &= V_2 \cos \gamma_2. \end{aligned}$$

Da V die Resultante aus V_1 und V_2 sein soll, so muss nach dem eben Gesagten gelten:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

also

$$u_2 = u - u_1, \quad v_2 = v - v_1, \quad w_2 = w - w_1,$$

und es bestimmt sich daher V_2 nach Grösse und Richtung durch die Formeln

$$\begin{gathered} V_2 = \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 + (w - w_1)^2} \\ \cos \alpha_2 = \frac{u - u_1}{V_2}, \quad \cos \beta_2 = \frac{v - v_1}{V_2}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{w - w_1}{V_2}. \end{gathered} \tag{10}$$

§ 4. Plötzliche Aenderung der Geschwindigkeit; Impulse, Massen.

Diese letzten Gleichungen sind von Nutzen für die Beurtheilung einer plötzlichen Aenderung der Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung.

Verwandelt sich nämlich eine gleichförmige Bewegung von der Geschwindigkeit V in der Richtung a plötzlich in eine ebensolche von der Geschwindigkeit V_1 in der Richtung a_1, so können wir den Vorgang ansehen als entstanden durch den Hinzutritt einer Geschwindigkeit V' in einer bestimmten Richtung a', welche natürlich in der Ebene durch V und V_1 liegt, zu der ursprünglich vorhandenen V.

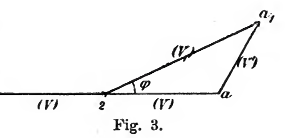


Fig. 3.

In der That, ist in der Figur (3) die Strecke $(\overline{1,\ 2})$ oder $(\overline{2,\ a})$ der Repräsentant der ursprünglichen Geschwindigkeit V, und $(\overline{2, a_1})$ der Repräsentant der definitiven V_1, so ist der Repräsentant der hinzugetretenen Geschwindigkeit V' die Strecke $(\overline{a,\ a_1})$. Dieselbe bestimmt sich durch die Gleichungen (10) gemäss der neuen Bezeichnung in der Form:

$$\begin{gathered} u' = u_1 - u, \quad v' = v_1 - v, \quad w' = w_1 - w, \\ V'^2 = (u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2 + (w_1 - w)^2, \\ \cos\alpha' = \frac{u_1 - u}{V'}, \quad \cos\beta' = \frac{v_1 - v}{V'}, \quad \cos\gamma' = \frac{w_1 - w}{V'}. \end{gathered} \tag{11}$$

Eine solche Aenderung der Geschwindigkeit kann nun nach dem Trägheitsprincip nicht ohne Ursache vor sich gehen; in unserem Falle kann aber jene Ursache der Aenderung nur eine unendlich kurze Zeit hindurch wirksam sein, da nach dem plötzlichen Wechsel die Geschwindigkeit weiterhin nach Richtung und Grösse unverändert bleibt. Eine momentan wirkende Bewegungsursache nennen wir einen I m p u l s und legen ihm, indem wir seine Eigenschaften nach denen der von ihm erzeugten Geschwindigkeit V' beurtheilen, eine Richtung bei, zusammenfallend mit der Richtung a' dieser Geschwindigkeit, und setzen seine Stärke proportional mit deren Grösse V'. Es liegt hierin ausgesprochen die fundamentale Annahme, dass zur Erzielung einer Geschwindigkeitsänderung V' für denselben Massenpunkt stets derselbe Impuls erforderlich ist, gleichviel zu einer wie grossen und wie gerichteten Geschwindigkeit V jener Zuwachs hinzutritt. Er ist also auch derselbe, welcher nöthig ist, um dem zuvor r u h e n d e n Massenpunkt ($V = 0$) die Gesammtgeschwindigkeit V' zu ertheilen. Bezeichnen wir die Stärke des Impulses mit J, die Winkel seiner Richtung gegen die Coordinatenaxen mit a, b, c, so machen wir den Ansatz:

$$J = V'C, \quad \alpha' = a, \quad \beta' = b, \quad \gamma' = c, \tag{12}$$

in welchem C den Proportionalitätsfactor bezeichnet, von dem wir vorläufig nur wissen, dass er für den betrachteten Massenpunkt eine Constante ist.

Da ein Impuls nach dem vorstehend Gesagten eine Vectorgrösse ist und sich von einer gewissen Geschwindigkeit nur durch einen constanten Factor unterscheidet, so können wir ihn genau wie die Geschwindigkeit durch eine Länge repräsentiren, die auf seiner Richtung abgegrenzt und mit dem Repräsentanten der von ihm hervorgebrachten Geschwindigkeit proportional ist, oder auch, da es sich nur um Vergleichungen handelt, zusammenfällt.

Ferner kann man alle Betrachtungen über die Zusammensetzung oder Zerlegung von Geschwindigkeiten sogleich auf die Impulse ausdehnen. Denn ist eine Geschwindigkeit V aequivalent mit einem System $V_1, V_2 \dots V_n$, so ist auch der Impuls $J = VC$, der die erste Geschwindigkeit V hervorzubringen vermag, aequivalent mit dem System $J_1, J_2 \dots J_n$, von denen jedes $J_h = V_h C$ die entsprechende Geschwindigkeit V_h erzeugen kann.

Speciell ist ein Impuls J aequivalent mit einem System paralleler Impulse $J_1, J_2 \dots J_n$, wenn

$$J = \Sigma J_h;$$

ferner ist derselbe aequivalent mit drei Impulsen F, G, H parallel den Coordinatenaxen — seinen Componenten —, wenn

$$F = J \cos a, \quad G = J \cos b, \quad H = J \cos c; \tag{13}$$

dabei haben die a, b, c die gleiche Bedeutung der Richtungswinkel von J wie in (12).

Auf Grund dieser letzteren Erwägung können wir zunächst die vier Gleichungen (12), welche unsere Festsetzungen bezüglich der Richtung und Stärke unseres Impulses enthalten, und von denen die letzten drei wegen der bekannten Relationen zwischen den drei Richtungswinkeln gegen rechtwinklige Axen nicht unabhängig von einander sind, durch folgende drei unabhängige ersetzen:

$$F = u'C, \quad G = v'C, \quad H = w'C, \tag{14}$$

die aus (13) sogleich folgen, wenn man darin die Relationen (12) und (7) einsetzt. Diese Formeln lassen sich nun auch so aussprechen: Die Geschwindigkeitsänderung V', welche ein Impuls J hervorbringt, ist aequivalent mit den drei Componenten u', v', w' parallel den Coordinatenaxen, welche die drei Componenten F, G, H von J, jede für sich allein wirkend, erzeugen würden.

Die vorhergehende Bemerkung gestattet uns, einen wichtigen Schluss über den Werth der Proportionalitätsconstanten C zu ziehen.

Denken wir uns n Massenpunkte gleicher Grösse aus gleicher Substanz, also auch gleicher Masse, durch n gleichzeitige, gleiche und parallele Impulse von der Ruhe in Bewegung gesetzt, so werden ihre Geschwindigkeiten gemäss den Formeln (12) und (14) ebenfalls gleich

und parallel sein. Da sie sonach während der Bewegung ihre gegenseitige Lage unverändert beibehalten, so kann man sie, ohne den Vorgang zu ändern, auch während oder bereits vor dem Beginn der Bewegung durch starre masselose Verbindungen an einander fesseln oder zu einem neuen Massenpunkt von der n-fachen Masse zusammenfügen. Auf diesen sind also jetzt ebenfalls n parallele gleiche Impulse J gleichzeitig auszuüben, um die Geschwindigkeit V' hervorzubringen. Nun sind aber n gleiche parallele Impulse aequivalent mit einem einzigen von n-facher Stärke und wir gelangen daher zu dem Resultat, dass zur Hervorbringung einer gleichen Geschwindigkeit bei einem n-fachen Massenpunkt auch der n-fache Impuls nöthig ist.

Sonach ergiebt sich, dass für die Vergleichung der Wirkung von Impulsen auf Massenpunkte derselben Substanz die Constante C mit der Quantität Materie M, welche dieselben enthalten, proportional sein muss und wir schreiben können:

$$J = V' Mc. \tag{15}$$

Hieraus folgt auch $V' = J/Mc$, d. h. durch denselben Impuls werden um so kleinere Geschwindigkeiten erzielt, je grösser die im Massenpunkt vereinigte Quantität Materie M ist. Die Masse M erscheint also als der Bewegung durch den Impuls entgegenwirkend, als ein Widerstand für die Bewegung.

Die Relation $J = V'Mc$ ist abgeleitet nur für verschiedene Massenpunkte derselben Substanz; die Constante c wird also zunächst noch von der Substanz abhängig sein, z. B. für Eisen einen anderen Werth haben können, als für Schwefel u. s. f. In Bezug auf sie stellen wir folgende Erwägung an.

Während von Massenpunkten derselben Substanz der eine naturgemäss von n-facher Masse als ein anderer zu bezeichnen ist, wenn er sich in n dem letzteren gleiche zerlegen lässt, ist es zunächst vollkommen willkürlich, wann wir eine Masse einer Substanz gleich dem Einfachen oder n-fachen einer Masse anderer Substanz setzen wollen. Wir treffen demgemäss nunmehr eine Verfügung, welche sich in der Folge als besonders practisch erweisen wird, indem wir bestimmen: Als gleich sollen fürderhin zwei Massen jederzeit **dann** gelten, wenn sie der Bewegung durch denselben Impuls gleichen Widerstand entgegensetzen — d. h. nach dem in § 1 Erörterten gleiche Trägheit besitzen.

Gleiche Massen beliebiger Substanz werden demnach durch gleiche Impulse auch gleiche Geschwindigkeiten mitgetheilt erhalten; hieraus folgt, dass die gemachte Annahme den Factor c von der Substanz des bewegten Massenpunktes unabhängig werden lässt; denn soll in Formel (15) für mehrere Substanzen gleichem J und M auch gleiches V'

entsprechen, so muss für sie nothwendig auch c den gleichen Werth haben. Da aber die Formel (15) den Einfluss aller Grössen, welche bei der gleichförmigen Bewegung eines Massenpunktes in Betracht kommen, bereits enthält, so muss c eine universelle Constante sein, die wir vortheilhaft, obgleich nicht nothwendiger Weise, als eine reine Zahl (von der Dimension Null) ansehen und dadurch numerisch bestimmen können, dass wir festsetzen, welche Masse, welchen Impuls wir gleich der Einheit der Masse oder des Impulses setzen, d. h. in welchen Einheiten wir Massen und Impulse ausdrücken wollen. Ueber beide können wir willkürlich verfügen, da dieselben mit den früher eingeführten Fundamentalgrössen nicht durch eine eindeutige Gleichung verbunden sind.

Als Masse Eins wählen wir die Masse eines Cubikcentimeters Wasser im Zustand der grössten Dichtigkeit, d. h. bei 4° Celsius, und nennen diese Masseneinheit „Gramm". Indem wir diese willkürliche Festsetzung treffen, die sich nur dadurch besonders empfiehlt, dass sie die Masseneinheit in Beziehung zu der Längeneinheit setzt, betrachten wir Masse M als eine dritte Fundamentalgrösse, deren Dimension wir durch $[m]$ bezeichnen. Die Masse ist im Gegensatz zu anderen oben eingeführten physikalischen Grössen ersichtlich kein Vector, sondern ein Scalar.

Als Impuls Eins wählen wir denjenigen, welcher auf den Massenpunkt Eins ausgeübt die Geschwindigkeit Eins hervorbringt. Diese Festsetzung giebt der Constante c den Werth Eins und daher der Formel (15) die Gestalt

$$J = V'M. \tag{16}$$

Während wir die Einheit des Impulses willkürlich bestimmen konnten, haben wir durch die Festsetzung, dass c eine reine Zahl sei, über seine Dimension schon oben verfügt; ein Impuls ist sonach eine abgeleitete, keine Fundamentalgrösse, und zwar enthält sie alle drei Fundamentalgrössen Länge, Zeit und Masse, denn wir haben unter Benutzung der in § 2 gegebenen Relation $[V] = [lt^{-1}]$ jetzt:

$$[J] = [mlt^{-1}].$$

Nach den erhaltenen allgemeinen Beziehungen können wir nun leicht in speciellen Fällen den Impuls nach Grösse und Richtung bestimmen, der eine verlangte Aenderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes hervorbringt; ebenso aber auch umgekehrt die Geschwindigkeitsänderung bei gegebenem Impuls. Ist die eine dieser Grössen durch ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen gegeben, so bestimmen sich die Componenten der andern gemäss

$$F = u'M, \quad G = v'M, \quad H = w'M. \tag{17}$$

Ist hingegen der Geschwindigkeitszuwachs nur in seiner Lage gegen die Anfangsgeschwindigkeit gegeben, so benutzt man passend die Relation $J = V'M$.

Als Anwendung behandeln wir das Problem, den Impuls zu bestimmen, welcher eine gegebene Bewegung nur der Richtung, nicht aber der Grösse ihrer Geschwindigkeit nach verändert. Wir benutzen dazu die Werthe (4) für Grösse und Richtung der bei einer Aenderung allgemein zuzufügenden Geschwindigkeit, und haben so die Beziehungen:

$$V'^2 = (V_1 - V)^2 + 4\,V V_1 \sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi' = \frac{V}{V'}\sin\varphi, \qquad (18)$$

in welchen V, V_1 die Anfangs- und Endgeschwindigkeit, φ den Winkel ihrer Richtungen, V' die hinzuzufügende Geschwindigkeit, φ' den Winkel ihrer Richtung gegen V_1 bezeichnet. Der nöthige Impuls J hat die Stärke $J = V'M$ und fällt in die Richtung von V'.

Soll die Geschwindigkeit durch den Impuls nicht geändert werden, so ist $V = V_1$ zu setzen, und man erhält dadurch aus (18)

$$J = V'M = 2\,VM\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi' = \cos\frac{\varphi}{2}, \qquad (18')$$

was aussagt: der erforderliche Impuls ist proportional der Anfangsgeschwindigkeit und der Masse des bewegten Punktes, sowie dem Sinus des halben Ablenkungswinkels, und zwar in der Richtung normal zu der Halbirungslinie des Winkels φ zwischen beiden Geschwindigkeiten auszuüben, — ein Resultat. das leicht durch die geometrische Anschauung zu verstehen ist.

§ 5. Beliebige Bewegung; Beschleunigung, Kraft.

Der allgemeinste Fall, dass sich ein Massenpunkt längs einer beliebig gekrümmten Bahn völlig beliebig fortbewegt, lässt sich unter gewisser Voraussetzung auf die bereits absolvirten Fälle zurückführen.

Wie in der analytischen Geometrie eine beliebige stetige Curve durch ein Polygon von unendlich kurzen Seiten ersetzt wird, so wollen wir auch die Bahn, welche der Massenpunkt beschreibt, in geradlinige Elemente δs zerlegen, soweit sie stetig gekrümmt ist (erste Voraussetzung); aber wir lassen die Länge dieser Linienelemente nicht willkürlich, sondern wählen sie gleich den während der wirklichen Bewegung innerhalb gleicher, äusserst kleiner Zeiten δt zurückgelegten Wegen. Findet die Bewegung in der Weise statt, dass sie während ebendieser Zeiträume δt als gleichförmig angesehen werden kann (zweite Voraussetzung), so stellen die Längen dieser Linienelemente δs nach § 2 die Repräsentanten derjenigen Geschwindigkeiten dar,

welche der Massenpunkt an jeder Stelle auf δs während δt besitzt, und welche nach unserer Grunddefinition (2) ist

$$V = \delta s / \delta t.$$

Wir bemerken, dass dieser Werth von der Grösse des willkürlich gewählten Zeitintervalles δt nicht abhängt, da nach unserer Annahme die Bewegung auf unendlich kleinen Strecken als gleichförmig zu betrachten ist.

Ist der Ort in der Bahn, wie schon früher angenommen, durch seinen längs der Bahn gemessenen Abstand s von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt gegeben, so verwandelt sich für unendlich kleines δt das Verhältniss $\delta s / \delta t$ in den Differentialquotienten von s nach t, und wir haben als Definition der Geschwindigkeit bei beliebiger Bewegung die Beziehung:

$$V = ds/dt. \tag{19}$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit den Cosinus der Richtungswinkel α, β, γ der Geschwindigkeit gegen die Coordinatenaxen, so erhalten wir nach (7) links die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit V nach diesen Richtungen, rechts resp. $ds . \cos \alpha$, $ds . \cos \beta$, $ds . \cos \gamma$, d. h. die Projectionen von ds auf die Coordinatenaxen und demgemäss die Zuwachse der Coordinaten x, y, z des bewegten Massenpunktes während der Zeit dt. Es gilt also

$$u = dx/dt, \quad v = dy/dt, \quad w = dz/dt. \tag{20}$$

Nun können aber die Componenten u, v, w auch als die Gesammtcomponenten mehrerer Geschwindigkeiten V_h von verschiedenen Richtungen $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ gegeben sein, deren Einzelcomponenten u_h, v_h, w_h sind; demgemäss erhalten wir als allgemeinste Fassung vorstehender Formeln

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum u_h, & \frac{dy}{dt} &= \sum v_h, & \frac{dz}{dt} &= \sum w_h, \\ &= \sum V_h \cos \alpha_h, & &= \sum V_h \cos \beta_h, & &= \sum V_h \cos \gamma_h, \end{aligned} \tag{20'}$$

d. h. also: die ersten Differentialquotienten der Coordinaten eines bewegten Punktes geben die Summen der parallel den bezüglichen Axen genommenen Geschwindigkeitscomponenten.

Die Formeln gestatten auch eine umgekehrte Verwendung. Sind für einen Massenpunkt zu jeder Zeit oder an jeder Stelle die Geschwindigkeitscomponenten gegeben, so gestatten diese Formeln bis zu einem gewissen Grade daraus die ganze Bewegung, also die Bahn des Punktes und seinen Ort in derselben für jeden Zeitmoment zu bestimmen. Dies wird weiterhin specieller auseinandergesetzt werden.

Wir wenden uns jetzt der allgemeinen Betrachtung einer beliebigen Bewegung wieder zu.

Von Element zu Element wechselt die Geschwindigkeit V nach Grösse und Richtung, z. B. an einer Stelle p von V zu V_1, und wir fassen gemäss den Betrachtungen des vorigen Paragraphen diese Aenderung auf als die Folge einer der früheren zugefügten neuen Geschwindigkeit.

Wir setzen voraus (dritte Voraussetzung), dass für unendlich kleines δt der Zuwachs von V auch nur unendlich klein gleicher Ordnung ist, und nennen ihn $\delta V'$. Diese Geschwindigkeit bestimmt sich nach Grösse und Richtung aus der Anfangsgeschwindigkeit V, der Endgeschwindigkeit V_1 und dem Winkel ihrer Richtungen φ; die Formel (18) des letzten Paragraphen zeigt, dass dabei $V_1 - V$ und φ mit $\delta V'$ von gleicher Ordnung sind, und wir vertauschen sie demgemäss mit δV und $\delta\varphi$. Es gilt dann nach eben diesen Gleichungen, indem wir entwickeln und uns auf die niedrigsten Glieder beschränken:

$$\delta V'^2 = \delta V^2 + V^2 \delta\varphi^2,$$
$$\sin\varphi' = \frac{V\delta\varphi}{\sqrt{\delta V^2 + V^2\delta\varphi^2}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{V\delta\varphi}{\delta V}. \tag{21}$$

Gemäss den Folgerungen in § 3 sagt die erste Gleichung aus, dass die zukommende Geschwindigkeit $\delta V'$ sich zerlegen lässt in zwei zu einander normale Componenten von der Grösse δV und $V\delta\varphi$. Die zweite Formel giebt den Neigungswinkel φ' der Geschwindigkeit $\delta V'$ gegen V_1 als eine im Allgemeinen endliche Grösse, welche, falls V nicht gleich Null ist, nur mit $\delta\varphi$ selbst verschwindet; dies sagt aus, dass die Zusatzgeschwindigkeit $\delta V'$ nur dann in die Richtung der Bahn fällt, wenn dieselbe keine Krümmung hat. Verglichen mit der ersten giebt die zweite Formel noch das weitere Resultat, dass von den Componenten von $\delta V'$ die eine, δV, parallel, die andere, $V\delta\varphi$, normal zu δs, gerichtet ist.

Die vorstehenden Gleichungen stellen die Aenderung des Bewegungszustandes an der Stelle p dar, sie haben aber den Uebelstand, noch abhängig zu sein von der Wahl des willkürlichen Zeitraumes δt, während dessen wir die Geschwindigkeit constant gedacht haben, der als offenbar unwesentlich beseitigt werden muss. Dies geschieht, wenn wir die erste Gleichung (21) rechts und links mit $(\delta t)^2$, die zweite in Zähler und Nenner mit δt dividiren und die erhaltenen Glieder deuten.

$1/\delta t$ ist die Anzahl der Geschwindigkeitswechsel in der Zeiteinheit, dividirt durch die Zeiteinheit, $\delta V'/\delta t$ ist also diejenige Zusatzgeschwindigkeit, welche sich als Resultante ergeben würde, wenn dasselbe $\delta V'$ in derselben Richtung die ganze Zeiteinheit hindurch bei jedem Geschwindigkeitswechsel zugefügt würde, dividirt durch die Zeiteinheit, — eine Grösse, ersichtlich von δt unabhängig, denn $\delta V'$ und δt wachsen und mindern sich in demselben Verhältniss. Wir nennen sie die Beschleunigung B des Massenpunktes an der Stelle p und

legen ihr die Richtung der Zusatzgeschwindigkeit $\delta V'$ bei. Wir können, da sie sich nur durch einen constanten Nenner von einer Geschwindigkeit unterscheidet, Alles, was wir über Zerlegung und Zusammensetzung jener gefunden haben, auf sie unmittelbar übertragen.

$\delta V/\delta t$ ist aus demselben Grunde die gesammte Aenderung der Geschwindigkeit des Massenpunktes, wenn der Vorgang, wie er an der Stelle p einmal stattfindet, sich die ganze Zeiteinheit hindurch in dem Zeitintervall δt wiederholen würde, oder die Geschwindigkeitsänderung bezogen auf die Zeiteinheit. Wir nennen sie die Bahnbeschleunigung oder Beschleunigung in der Bahn b, welche der Massenpunkt an der Stelle p erfährt.

$\delta\varphi/\delta t$ endlich ist analog die gesammte Richtungsänderung, welche die Bewegung des Massenpunktes während der Zeiteinheit erfahren würde; wir nennen sie wegen der Analogie der Gestalt von $\delta\varphi/\delta t$ mit $\delta s/\delta t$, das wir als Geschwindigkeit (Lineargeschwindigkeit) bezeichneten, die Winkelgeschwindigkeit oder Drehungsgeschwindigkeit d des Massenpunktes an der Stelle p.

Demgemäss resultirt für die erste Gleichung (21) die Form:

$$B^2 = b^2 + V^2 d^2. \tag{21'}$$

Für die Drehungsgeschwindigkeit $d = \delta\varphi/\delta t$ erhält man leicht noch einen andern Werth. Schreibt man nämlich

$$d = \frac{\delta\varphi}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta t},$$

so ist $\delta s/\delta t$ die Geschwindigkeit V in p, $\delta\varphi/\delta s$ ist die reciproke Länge der beiden, nur unendlich wenig verschiedenen, Normalen auf der Mitte der beiden in p zusammentreffenden Linienelemente δs und δs_1 vom Fuss- bis zum Schnittpunkt, mit andern Worten die reciproke Länge des Krümmungsradius ϱ der Bahncurve im Punkte p. Hierdurch gewinnt unser letztes Resultat die Form:

$$B^2 = b^2 + V^2 d^2, \quad b = \frac{\delta V}{\delta t}, \quad d = \frac{V}{\varrho}; \tag{22}$$

dazu kömmt die zweite Gleichung (21):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Vd}{b},$$

in der wir jetzt den Winkel zwischen Beschleunigung und Bahnelement mit ψ bezeichnet haben.

Wir bemerken, hinweisend auf die Entwickelung des § 3, dass wie die Zusatzgeschwindigkeit $\delta V'$, so auch die Beschleunigung B in der Ebene liegt, welche die beiden in p zusammenstossenden Linienelemente δs und δs_1 der Bahn enthält, das heisst in der Osculations-

ebene der Bahncurve im Punkte p; der eine Winkel ψ bestimmt ihre Lage sonach vollständig.

Denken wir uns nun, wie schon früher, den Ort des Massenpunktes durch seinen positiven oder negativen längs der Bahn gemessenen Abstand $s = f(t)$ von einem in derselben fest angenommenen Punkte gegeben, und betrachten wir, ebenso wie s, die Geschwindigkeit V als eine Function der Zeit, so werden die Verhältnisse $\delta s/\delta t$ und $\delta V/\delta t$ identisch mit den Differentialquotienten der Functionen s und V nach der Zeit, und die Formeln (19) und (22) lauten schliesslich:

$$V = \frac{ds}{dt}, \quad B^2 = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\varrho^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = V^2/\varrho \left(\frac{dV}{dt}\right). \tag{23}$$

Das bis hierher über die beliebige Bewegung eines Punktes Gefundene fassen wir zusammen in den Satz:

Ist für einen Punkt die Gestalt seiner Bahn und zu jeder Zeit sein längs der Bahn gemessener Abstand s von einem festen Anfang gegeben, so hat zu jeder Zeit t seine Geschwindigkeit die Grösse $V = ds/dt$ und die Richtung der Bahn, seine Beschleunigung B ist nach Richtung und Grösse bestimmt als die Resultante aus einer der Bahn parallelen Componente dV/dt (der Bahnbeschleunigung) und einer dem Krümmungsradius der Bahn parallelen Componente V^2/ϱ (der Normalbeschleunigung).

Die im Vorstehenden neu eingeführte Grösse „Beschleunigung" und zwar die gesammte B, wie ihre Componente parallel und normal zur Bahn, ist durch die Fundamentaleinheiten Länge und Zeit nach ihrer Dimension und ihrer Einheit völlig bestimmt; wir haben

$$[B] = [lt^{-2}],$$

und als Einheit der Beschleunigung diejenige, bei welcher eine Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um den Betrag der Geschwindigkeitseinheit wächst. —

Nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen betrachten wir als Ursache jeder plötzlichen Aenderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes hinsichtlich der Grösse oder der Richtung einen Impuls J, der seiner Richtung nach mit derjenigen der Zusatzgeschwindigkeit V' zusammenfällt, und dessen Grösse gegeben ist durch das Product $V'M$ der Zusatzgeschwindigkeit in die Masse des bewegten Punktes.

Bei einer beliebigen Bewegung mit nach Richtung und Grösse stetig wechselnder Geschwindigkeit müssen wir demgemäss unendlich viele, unendlich schwache Impulse δJ wirkend denken, ein jeder nach Richtung zusammenfallend mit der im betreffenden Zeitpunkt zugefügten Geschwindigkeit $\delta V'$, nach Stärke gegeben durch

$$\delta J = M \delta V'.$$

Auch diese Formel enthält noch den Einfluss des willkürlich gewählten Zeitraums δt, den wir wie oben durch Division mit δt beseitigen. Dann erhalten wir rechts $\delta V'/\delta t$, d. h. die Beschleunigung B des Massenpunktes.

$\delta J/\delta t$ aber ist nach dem Frühern die Summe aller derjenigen Impulse, welche der Massenpunkt während der Zeiteinheit erleiden würde, wenn in derselben unausgesetzt in Intervallen δt derselbe Impuls δJ in gleicher Stärke und Richtung sich wiederholte — diese Summe dividirt durch die Zeiteinheit.

Die hierdurch vollständig definirte neue physikalische Grösse, welche ersichtlich von dem willkürlichen Intervall δt unabhängig, aber von der gewählten Zeiteinheit abhängig ist, nennen wir die Kraft K, welche der Massenpunkt M an der Stelle p erleidet, und legen ihr die Richtung der Impulse, also auch die Richtung der Beschleunigung in p bei. Sie ist hiernach ersichtlich abermals eine Vectorgrösse.

Wir haben also

$$K = MB = M\sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\varrho^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = V^2/\varrho \frac{dV}{dt}, \tag{24}$$

und fassen das erhaltene fundamentale Resultat noch einmal in folgende Worte zusammen:

Die Kraft, welche ein (innerhalb der im Eingang gemachten Einschränkungen) beliebig bewegter Massenpunkt erleidet, ist ihrer Grösse nach gegeben durch das Product seiner Masse M in seine Gesammtbeschleunigung B und ist letzterer parallel gerichtet, d. h. liegt allenthalben in der Osculationsebene der Bahncurve unter einem Winkel ψ gegen die Richtung der Bewegung oder Geschwindigkeit, dessen Tangente gleich ist dem Quadrat der Geschwindigkeit V, dividirt durch das Product aus Krümmungsradius ϱ und Bahnbeschleunigung dV/dt.

Auch für die Kraft ist sowohl Dimension als Einheit durch ihre Definition vollkommen gegeben; wir haben

$$[K] = [mlt^{-2}]$$

und dazu diejenige Kraft als Krafteinheit, welche dem Massenpunkt Eins die Beschleunigung Eins mittheilt.

Hiernach kann man für jede Bewegung eines gegebenen Massenpunktes die wirkende Kraft numerisch berechnen.

Da sich die Kraft von einem Impuls nur durch einen constanten Nenner unterscheidet und wie diese ein Vector ist, so können wir alle für Impulse erhaltenen Sätze über Zerlegung in Componenten

und Zusammensetzung zu Resultanten sogleich auf Kräfte übertragen. Ihrer grossen Wichtigkeit wegen wollen wir sie aber in der Form, die sie für letztere annehmen, noch einmal zusammenstellen.

Zunächst der allgemeine Satz vom Parallelogramm der Kräfte, bei welchem die Kräfte wie Geschwindigkeiten und Impulse durch Strecken nach Grösse und Richtung repräsentirt werden. Er findet sich aus der Betrachtung der Bewegungsvorgänge ohne alle Schwierigkeit, während bei Beschränkung auf Gleichgewichtszustände ein ganz befriedigender Nachweis fast unmöglich scheint. Wir sprechen ihn folgendermassen aus:

n gegebene Kräfte, die auf einen Massenpunkt wirken, sind aequivalent mit einer einzigen, die man durch eine geometrische Construction aus jenen nach Grösse und Richtung bestimmen kann. Hierzu füge man die Repräsentanten aller gegebenen Kräfte gleichsinnig an einander; die Strecke vom Anfangs- zum Endpunkte der so erhaltenen gebrochenen Linie giebt dann den Repräsentanten der resultirenden Kraft.

Insbesondere ist die mit n parallelen Kräften aequivalente Resultante mit jenen gleichgerichtet und gleich ihrer Summe. Für nur zwei gegebene Kräfte K_1 und K_2, welche den Winkel φ einschliessen, erhält man die Grösse K der Resultirenden und die Winkel φ_1, φ_2, die sie mit K_2 und K_1 einschliesst durch:

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2 \cos\varphi, \quad \frac{K_1}{\sin\varphi_1} = \frac{K_2}{\sin\varphi_2} = \frac{K}{\sin\varphi}. \tag{25}$$

Stehen speciell K_1 und K_2 normal zu einander, so ist:

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2, \quad K_1 = K\sin\varphi_1, \quad K_2 = K\sin\varphi_2, \quad K_1/K_2 = \operatorname{tg}\varphi_1. \tag{25'}$$

Die Umkehrung des allgemeinen Satzes ergiebt:

Jede gebrochene Linie, mittelst deren man die beiden Enden des Repräsentanten einer gegebenen Kraft verbindet, lässt sich deuten als die gleichsinnige Aneinanderreihung der Repräsentanten von Kräften, welche mit der gegebenen aequivalent sind.

Hieraus erhellt sofort, dass, während das Problem der Zusammensetzung von gegebenen Kräften vollständig bestimmt war, die Zerlegung einer gegebenen Kraft in ein System aequivalenter Componenten auf unendlich viele Weisen möglich ist, und die Aufgabe zur Bestimmung noch einschränkender Bedingungen bedarf.

Der wichtigste Fall ist der, dass eine Kraft K nach drei zu einander normalen Richtungen, die wir als die X, Y, Z-Coordinatenaxen wählen, in Componenten, die jetzt und ferner mit den Buchstaben X,

Y, Z bezeichnet werden mögen, zerlegt werden soll. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung von K mit denen von X, Y, Z einschliesst, so gilt:

$$X = K\cos\alpha, \quad Y = K\cos\beta, \quad Z = K\cos\gamma,$$

und umgekehrt

$$\cos\alpha = X/K, \quad \cos\beta = Y/K, \quad \cos\gamma = Z/K, \qquad (26)$$
$$K^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Zerlegt man dieselbe Kraft K nach drei anderen zu einander senkrechten Richtungen X', Y', Z', welche die Winkel α', β', γ' mit ihr einschliessen, so gilt ebenso:

$$X' = K\cos\alpha', \quad Y' = K\cos\beta', \quad Z' = K\cos\gamma'.$$

Nun ist aber:

$$\cos\alpha' = \cos(K,X)\cos(X,X') + \cos(K,Y)\cos(Y,X') + \cos(K,Z)\cos(Z,X'),$$
$$\cos\beta' = \cos(K,X)\cos(X,Y') + \cos(K,Y)\cos(Y,Y') + \cos(K,Z)\cos(Z,Y'),$$
$$\cos\gamma' = \cos(K,X)\cos(X,Z') + \cos(K,Y)\cos(Y,Z') + \cos(K,Z)\cos(Z,Z'),$$

also nach (26) auch

$$X' = X\cos(X,X') + Y\cos(Y,X') + Z\cos(Z,X'),$$
$$Y' = X\cos(X,Y') + Y\cos(Y,Y') + Z\cos(Z,Y'), \qquad (26')$$
$$Z' = X\cos(X,Z') + Y\cos(Y,Z') + Z\cos(Z,Z');$$

die Componenten einer Kraft nach verschiedenen Coordinatensystemen stehen also in demselben Zusammenhang, wie die Projectionen einer Länge auf die betreffenden Axen; dies ist selbstverständlich, nachdem wir Kräfte durch Strecken repräsentirt haben.

Das Resultat (26) ist zu benutzen, um das allgemeine Problem der Zusammensetzung von beliebigen auf einen Punkt wirkenden Kräften, welches oben nur geometrisch gelöst ist, in bequemer Weise analytisch durchzuführen.

Sind n Kräfte nach ihren Grössen K_h und ihren Richtungswinkeln α_h, β_h, γ_h gegeben, so zerlegen wir jede einzelne in drei Componenten X_h, Y_h, Z_h parallel den Coordinatenaxen; es ist dann

$$X_h = K_h\cos\alpha_h, \quad Y_h = K_h\cos\beta_h, \quad Z_h = K_h\cos\gamma_h. \qquad (27)$$

Die sämmtlichen parallelen Componenten X_h resp. Y_h und Z_h setzen sich nach dem Obigen zusammen zu einer Gesammtcomponente X resp. Y und Z, welche gegeben sind, durch

$$X = \Sigma X_h, \qquad Y = \Sigma Y_h, \qquad Z = \Sigma Z_h,$$
$$= \Sigma K_h\cos\alpha_h, \qquad = \Sigma K_h\cos\beta_h, \qquad = \Sigma K_h\cos\gamma_h, \qquad (27')$$

und diese endlich geben nach den letzten Formeln (26) eine Resultante von der Stärke K mit den Richtungswinkeln α, β, γ, die bestimmt sind durch:

$$K^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$\cos\alpha = X/K, \quad \cos\beta = Y/K, \quad \cos\gamma = Z/K. \tag{27''}$$

Von diesen fundamentalen Betrachtungen machen wir zunächst eine Anwendung zur Deutung der Gleichungen (24), die wir schreiben:

$$K^2 = \left(M\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(M\frac{V^2}{\varrho}\right)^2, \quad \operatorname{tg}\psi = M\frac{V^2}{\varrho}\Big/ M\frac{dV}{dt}. \tag{28}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit (25') und bedenken, dass ψ den Winkel der Kraft K gegen die Richtung der Bahn im Sinne der stattfindenden Bewegung bezeichnet, so erkennen wir, dass K hier zerlegt erscheint in zwei zu einander normale Componenten, von denen die erstere MdV/dt in der Richtung der Bahn, die zweite MV^2/ϱ in der Richtung von deren Krümmungsradius liegt. Es gelten demnach die folgenden drei wichtigen Sätze:

Für einen jeden bewegten Massenpunkt ist

1. die Kraftcomponente P in der Richtung der Tangente der Bahn gleich der Masse M des Punktes multiplicirt mit seiner Bahnbeschleunigung dV/dt,

$$P = M dV/dt; \tag{29^I}$$

2. die Kraftcomponente N_1 in der Richtung der Hauptnormale der Bahn gleich der Masse M des Punktes multiplicirt mit dem Quadrat seiner Bahngeschwindigkeit und dividirt durch den Krümmungsradius ϱ der Bahn an der betrachteten Stelle, letzteren positiv oder negativ gerechnet, jenachdem er auf die als positiv oder negativ gewählte Seite der Hauptnormalen fällt,

$$N_1 = MV^2/\varrho; \tag{29^{II}}$$

3. die Kraftcomponente N_2 nach der Richtung der Binormale der Bahn gleich Null,

$$N_2 = 0. \tag{29^{III}}$$

Wir fügen hinzu, was aus diesen Sätzen in zwei speciellen Fällen sich ergiebt:

Eine geradlinige Bewegung kann nur unter einer in der Richtung der Bahn wirkenden Kraft bestehen; ihre Grösse ist

$$K = MdV/dt.$$

Eine krummlinige Bewegung mit constanter Geschwindigkeit kann nur unter der Wirkung einer Kraft bestehen, welche allenthalben in der Richtung der Hauptnormale der Bahn liegt und den Werth hat

$$K = MV^2/\varrho.$$

Dass in diesem letzteren Falle, obwohl die Geschwindigkeit constant bleibt, doch eine Kraft zur Erhaltung der Bewegung nöthig ist,

kann man sich nochmals verdeutlichen, indem man überlegt, dass nach dem Trägheitsprincip jeder Massenpunkt die Tendenz hat, nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Richtung seiner Bewegung ungeändert beizubehalten. Es ist also eine Kraft nöthig, um ihn von der geraden Linie in die gekrümmte Bahn abzulenken und seinen Widerstand gegen die krummlinige Bewegung zu überwinden. Diesen Widerstand denkt man sich der ausgeübten Kraft gleich stark und entgegengesetzt gerichtet und nennt ihn Centrifugalkraft.

Hiernach ist also die Centrifugalkraft eines mit einer Geschwindigkeit V bewegten Massenpunktes M an einer Stelle der Bahn, wo deren Krümmungsradius gleich ϱ ist, gegeben durch MV^2/ϱ; ihre Richtung ist derjenigen des Krümmungsradius entgegengesetzt.

Diese Deutung überträgt man von Bewegungen mit constanter auf solche mit beliebiger Geschwindigkeit.

Das Vorstehende bietet die Mittel, um in jedem speciellen Falle die Kraft, welche zur Herstellung einer Bewegung nöthig ist, nach ihrer Grösse und nach ihrer Lage gegen die Bahn des bewegten Massenpunktes vollständig zu bestimmen. Indessen liegt hierin nicht die eigentliche Bedeutung der gefundenen Resultate, sondern umgekehrt in ihrer Anwendung, um bei gegebener Kraft die Beschleunigung und daraus die gesammte Bewegung des Massenpunktes zu bestimmen, auf welchen die Kraft wirkt.

Es hat sich nämlich gezeigt, dass durch Einführung des Begriffes der Kraft in der im Obigen erörterten Weise eine grossartige Vereinfachung der Betrachtung der Bewegungserscheinungen erreicht wird, und unzählige Einzelfälle, die sich hinsichtlich der Bahngestalt und des Gesetzes der Geschwindigkeit unterscheiden, einheitlich zusammengefasst werden in ein einziges Problem.

Hierzu ist die bisher benutzte Gestalt der zwischen Kraft und Beschleunigung bestehenden Beziehungen wenig geeignet, da sie die Kenntniss der Gestalt und Lage der Bahn voraussetzen, die zu finden eben unser Problem ist. Wir umgehen die Schwierigkeit, indem wir die Lage der Kraft gegen ein absolut festes Coordinatensystem einführen.

Dies geschieht am Einfachsten, wenn wir von den Gleichungen (17) des vorigen Paragraphen ausgehen, die den Zusammenhang zwischen den Componenten F, G, H eines Impulses und den durch denselben hervorgebrachten Componenten u', v', w' der Geschwindigkeitsänderung darstellen. Indem wir sie auf einen unendlich schwachen Impuls δJ mit den Componenten δF, δG, δH und demgemäss unendlich kleine Geschwindigkeitscomponenten $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$ der unendlich kleinen Zusatzgeschwindigkeit $\delta V'$ anwenden, schreiben wir sie:

$$\delta F = M\delta u', \quad \delta G = M\delta v', \quad \delta H = M\delta w'.$$

Diese Formeln beziehen wir nun wiederum auf die oben betrachtete beliebige Bewegung und verstehen unter $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$ und δF, δG, δH die an der Stelle p beim Uebergang von dem Linienelement δs zu dem folgenden δs_1 auftretenden Grössen. Dividiren wir sie, wie auch oben geschah, durch δt, so erhalten wir dadurch diejenigen Zuwachse, die in der Zeiteinheit eintreten würden, wenn während derselben in den Zeitintervallen δt immer wieder die gleichen Veränderungen stattfänden, wie an der Stelle p einmal; d. h. also nach den bezüglichen oben angegebenen Definitionen einerseits die Componenten der Beschleunigung nach den Coordinatenaxen, nämlich die Grössen du/dt, dv/dt, dw/dt, andererseits die Componenten der wirkenden Kraft X, Y, Z. Demgemäss nehmen jene Gleichungen die Gestalt an:

$$X = M du/dt, \quad Y = M dv/dt, \quad Z = M dw/dt, \tag{30}$$

und geben so einen neuen Ausdruck des Gedankens, dass die wirkende Kraft gleich ist dem Product aus Masse und Beschleunigung und der Richtung nach mit letzterer zusammenfällt. In der That können wir aus ihnen die Folgerungen ziehen:

$$K^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = M^2\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] = M^2 B^2,$$

$$X : Y : Z = \frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt} : \frac{dw}{dt},$$

welche dies aussprechen. Der directe Nachweis, dass hierdurch die Beschleunigung nach Grösse und Richtung wirklich in Uebereinstimmung mit (28) gegeben wird, erfordert einige Rechnung und mag als nicht nothwendig unterbleiben. Man gelangt am Besten zuerst zu den drei Sätzen (29) und daraus zu (28).

Die Kräfte X, Y, Z können nun ihrerseits Resultanten sein aus je einer Anzahl einzelner Componenten X_1, $X_2 \ldots X_n$ u. s. f., die durch Zerlegung gegebener Einzelkräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ erhalten sind; es ist dann:

$$X = \Sigma X_h, \quad Y = \Sigma Y_h, \quad Z = \Sigma Z_h.$$

Ferner können wir für u, v, w die durch die Formeln (20) gegebenen Werthe dx/dt, dy/dt, dz/dt setzen, in welchen x, y, z die Coordinaten des Massenpunktes zur betrachteten Zeit bezeichnen. So gelangen wir zu der definitiven Form:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h, \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h, \quad M\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_h. \tag{31}$$

Diese fundamentalen Gleichungen bilden den Ausgangspunkt für alle Untersuchungen, welche aus gegebenen Kräften die Gesetze der durch sie bedingten Bewegungserscheinungen ableiten.

Man betrachtet in der Physik die auf Massenpunkte wirkenden Kräfte als abhängig von der Zeit t, den Coordinaten x, y, z des bewegten Punktes und den Componenten $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$ seiner Geschwindigkeit. Eine Abhängigkeit von der Beschleunigung würde nichts wesentlich Anderes ergeben, als die eben genannten Abhängigkeiten; denn man könnte in einem solchen Falle die drei Gleichungen (31) durch Auflösen nach den Beschleunigungen d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 auf die Form bringen:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \Xi, \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = \mathsf{H}, \quad M\frac{d^2z}{dt^2} = \mathsf{Z},$$

in welcher Ξ, H, Z nur noch t, x, y, z, u, v, w enthalten und als Kraftcomponenten gedeutet werden können. Indessen kann unter Umständen dadurch eine besonders einfache Form und anschauliche Bedeutung der Kräfte gewonnen werden, dass man sie als Functionen der Beschleunigungen einführt, und in solchen Fällen wird man sie benutzen; das wichtigste Beispiel hierfür ist W. Weber's Gesetz für die Wechselwirkung bewegter electrischer Theilchen.

Anders verhält es sich mit der Abhängigkeit der Kräfte von höheren Differentialquotienten als den zweiten; hier tritt eine eigenthümliche Schwierigkeit für die Vorstellung ein.

Die Bewegung während eines Zeitelementes dt bestimmt die Geschwindigkeiten des Massenpunktes parallel den Coordinatenaxen, die während zweier seine Beschleunigungen, die während dreier, vierer ... analog die Werthe der dritten, vierten ... Differentialquotienten seiner Coordinaten nach der Zeit. Beginnt also eine Bewegung von der Ruhe aus, so ist nach zwei Zeitelementen die Beschleunigung B und also auch die Kraft $K = mB$ schon vollständig bestimmt, jene höheren Differentialquotienten aber sind noch völlig unbestimmt.

Daher hat es einen guten Grund, dass man für gewöhnlich die Kräfte nur als Functionen der sieben Argumente t, x, y, z, u, v, w ansieht; wir werden weiterhin ebenso verfahren.

Wie wir in den vorstehenden Betrachtungen von den Coordinaten, welche den Ort des Massenpunktes bestimmen, fortgeschritten sind zu deren ersten Differentialquotienten nach der Zeit, welche seine Geschwindigkeiten, und den zweiten, welche seine Beschleunigungen geben, so könnten wir auch Beziehungen für die dritten, vierten und höheren aufstellen unter Benutzung der obigen Methoden und ohne neu auftretende Schwierigkeiten. Statt auf die Kraftcomponenten selbst würden wir dann auf die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Aenderung der Kraftcomponenten mit der Zeit geführt werden.

Während indessen die Einführung des Begriffes der Kraft für die Zusammenfassung je einer grossen Zahl einzelner Bewegungserschei-

nungen unter ein alle umfassendes Gesetz von überraschendstem Vortheil ist, zeigt sich, dass die Einführung der höheren Ausdrücke, bei den von der Natur gebotenen Erscheinungen wenigstens, in dieser Hinsicht nichts irgend Erhebliches mehr leistet, im Gegentheil auf unverhältnissmässig complicirte Gesetze führt. Wir haben also keine Ursache in derartige Untersuchungen einzugehen.

§ 6. Geradlinige Bewegung; constante Kraft, freier Fall, Atwood'sche Fallmaschine; einfachste Fälle variabler Kräfte.

Für die Behandlung der geradlinigen Bewegung bilden nach dem vorigen Paragraphen folgende Sätze die Grundlage.

Sei s der Abstand von einem auf der Geraden willkürlich gewählten Nullpunkt, so ist die Geschwindigkeit:

$$V = ds/dt,$$

die Beschleunigung:

$$B = dV/dt = d^2s/dt^2, \tag{32}$$

die wirkende Kraft:

$$K = MB = MdV/dt = Md^2s/dt^2.$$

Alle drei fallen in die Richtung der Bahngeraden.

Die Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn s als Function der Zeit gegeben ist, denn dann berechnen sich alle oben angeführten Grössen vollkommen unzweideutig nach den vorstehenden Formeln; willkürlich ist nur unter Umständen die Deutung, die man ihnen geben kann.

Sei z. B. $s = a \sin(bt - c)$, so haben wir eine Bewegung, die zur Zeit $t_0 = c/b$ von der Stelle $s = 0$ beginnt, zur Zeit $t_0 + \pi/2b$ die grösste Elongation a nach der positiven Seite, weiter um $t_0 + 2\pi/2b$ wieder den Nullpunkt, um $t_0 + 3\pi/2b$ die grösste Elongation a nach der negativen Seite, um $t_0 + 4\pi/2b$ den Nullpunkt zum dritten Male erreicht und dies Spiel mit der Periode $T = 2\pi/b$ immer wiederholt; man nennt a die Amplitude, $(t - t_0)/T$ die Phase der stattfindenden Oscillation. Hier bestimmt sich aus

$$s = a \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}$$

das System von Werthen:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \\ B &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \\ K &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Ma \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}. \end{aligned}\right\} \tag{32a}$$

Es gilt aber, wie man erkennt, zugleich auch folgendes System:

$$V = \frac{2\pi}{T} \sqrt{a^2 - s^2},$$
$$B = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s, \qquad (32^b)$$
$$K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Ms;$$

oder auch endlich

$$B = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 - V^2},$$
$$K = -\frac{2\pi M}{T}\sqrt{\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 - V^2}. \qquad (32^c)$$

Die Wurzelgrössen wechseln ihr Vorzeichen, wenn s den Werth $\pm a$, V den Werth $\pm 2\pi a/T$ berührt.

Jede dieser Formeln giebt für V, B oder K ein leicht in Worte zu fassendes oder durch Construction zu verdeutlichendes Gesetz; betrachten wir näher, als besonders wichtig, die drei für die wirkende Kraft erhaltenen.

Das erste

$$K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Ma \sin\frac{2\pi(t - t_0)}{T}$$

sagt aus, dass K von dem Ort und der Geschwindigkeit unabhängig ist und mit der Zeit periodisch nach Grösse und Richtung wechselt,

für $t = t_0$ ist $K = 0$,
für $t = t_0 + \frac{1}{4}T$, $K = -a$,
für $t = t_0 + \frac{1}{2}T$, $K = 0$,
für $t = t_0 + \frac{3}{4}T$, $K = +a$,
für $t = t_0 + T$, $K = 0$, u. s. f.

Das zweite,

$$K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Ms,$$

lässt die Kraft von Zeit und Geschwindigkeit unabhängig, dagegen abhängig vom Ort des Massenpunktes werden. Da der Factor von s positiv ist, so ist die Kraft immer nach dem Anfangspunkt hingerichtet, nämlich an Stellen auf der positiven Seite der Bahn negativ und umgekehrt. Sie verschwindet im Nullpunkte selbst und wächst mit der Entfernung ins Unendliche; man kann sie ansehen als eine Anziehung, die von dem Nullpunkt ausgeht und mit der Entfernung des Massenpunktes proportional ist.

Das dritte,

$$K = -\frac{2\pi}{T}M\sqrt{\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 - V^2},$$

enthält nur die Geschwindigkeit, nicht aber Ort und Zeit. Es ergiebt eine Kraft, deren absoluter Werth mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt, für $V=0$ den grössten reellen Betrag $(2\pi/T)^2 Ma$, für $V = \pm\, 2\pi a/T$ den kleinsten, nämlich Null ergiebt, für noch grössere V aber imaginär wird, was aussagt, dass unter der Wirkung einer solchen Kraft diese grösseren Geschwindigkeiten nicht aus kleineren entstehen können. Letzteres ist begreiflich, da ja schon für $V = \pm\, 2\pi a/T$ die Beschleunigung verschwindet.

So lange wir nur einen Massenpunkt in einer bestimmten Bewegung vor uns haben, sind diese drei Deutungen des Gesetzes der wirkenden Kraft physikalisch vollkommen gleichwerthig, und nur die grössere Einfachheit könnte veranlassen, dass eine vor der andern bevorzugt werde; höchstens könnte man der letzten Form die Bedeutung eines allgemeinen Gesetzes absprechen, weil sie nicht jede beliebige Anfangsgeschwindigkeit zulässt. Anders, wenn mehrere Massenpunkte vorhanden sind, und es aus irgend einem Grunde, z. B. weil sie längs derselben Bahn oder einander benachbart ihre Bewegungen ausführen, wahrscheinlich ist, dass sie eine gemeinsame Bewegungsursache haben. Dann kann der Fall eintreten, dass von den oben in den verschiedenen Formen ausgesprochenen Eigenschaften der Kraft eine einzige als die charakteristische, die andern nur als gewissermassen zufällige erscheinen.

Um diesen Umstand, der einiges Licht darauf wirft, aus welchem Grunde mitunter eine bestimmte Gestalt für das Gesetz der Kraft bevorzugt wird, noch etwas zu betrachten, wollen wir jetzt annehmen, dass auf derselben Bahn mit dem Punkte M, und ohne durch diesen gehindert zu werden, noch ein zweiter Punkt M' sich bewege und zwar nach dem Gesetze:

$$s' = a' \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T'}.$$

Es werden für diesen dann folgende Gesetze der wirkenden Kraft K' aufzustellen sein:

$$K' = -\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 M' a' \sin \frac{2\pi(t-t_0')}{T'},$$

$$K' = -\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 M' s',$$

$$K' = -\frac{2\pi}{T'} M' \sqrt{\left(\frac{2\pi a'}{T'}\right)^2 - V'^2}.$$

Man betrachtet nun verschiedene bewegte Massenpunkte im Allgemeinen als unter derselben Kraft stehend, wenn sich deren Werth für die gleichen Werthe der Variabeln (d. h. hier

also t, s oder V) gleich oder nur durch einen constanten Factor, der z. B. der Masse M gleich sein kann, verschieden ergiebt.

Wir erkennen, dass die beiden Punkte M und M' jedenfalls nicht unter der Wirkung derselben Kraft stehen, so lange alle drei Parameter ihrer Bewegungsgesetze (nämlich a, t_0, T resp. a', t_0', T') verschieden sind, denn die zweite Formel enthält den einen, die dritte zwei, die erste alle drei in sich.

Ist aber $T = T'$, so werden die zweiten Gesetze für K und K' gleich, d. h. sie geben für denselben Ort ($s = s'$) Werthe, die sich nur durch den Factor M resp. M' unterscheiden. In diesem Falle wird also die zweite Form eine wesentliche Eigenschaft der wirkenden Kraft aussprechen, die anderen nur unwesentliche, denn sie zeigen sich an verschiedenen Punkten in verschiedener Weise. Wir werden demgemäss sagen: die beiden Massenpunkte M und M', die sich auf derselben (oder auch auf zwei durch den Nullpunkt für s gehenden) Geraden nach den Gesetzen

$$s = a \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T},$$

$$s' = a' \sin \frac{2\pi(t - t_0')}{T}$$

bewegen, stehen unter der Wirkung derselben Kraft, nämlich einer Anziehung nach dem Nullpunkt hin, die proportional ist mit ihrer Masse und mit ihrem Abstand vom Nullpunkt; der Proportionalitätsfactor hat den Werth $(2\pi/T)^2$, wobei T die Dauer einer vollständigen Schwingung für beide Punkte bezeichnet. —

Während nach dem Vorstehenden das Gesetz für s als Function der Zeit den ganzen Vorgang der geradlinigen Bewegung eindeutig bestimmt, gilt nicht das Gleiche bei gegebener Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Kraft. Mathematisch zeigt sich dies darin, dass das Fortschreiten von diesen Grössen zur Bestimmung des Ortes s als Function der Zeit Integrationen erfordert, bei deren jeder eine willkürliche Constante in die Rechnung eingeht, — physikalisch hingegen sieht man jene Thatsache leicht ein, indem man sich vergegenwärtigt, dass, wenn auch die Geschwindigkeit für jede Zeit gegeben ist, die ganze Bewegung doch noch auf einem beliebigen Bereich der Bahn stattfinden kann, wenn sie hingegen für jede Stelle gegeben ist, dann noch zu einem beliebigen Zeitpunkt, u. s. f.

Es müssen daher neben der Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Kraft noch einige andere Daten gegeben sein, um das Problem vollständig zu bestimmen. Um diesen Punkt klar zu stellen, behandeln wir zunächst den denkbar einfachsten Fall ausführlich, dass die wirkende Kraft weder von Zeit, noch Ort, noch Geschwindigkeit ab-

hängt, vielmehr eine Constante ($K = C$) ist. Mit der Kraft ist dann auch die Beschleunigung eine Constante und man nennt daher die daraus folgende Bewegung gleichförmig beschleunigt. Dieser Fall ist deshalb von hervorragendstem Interesse, weil, wie sich zeigen wird, die bez. Bewegungsart von einem unter der Wirkung seiner Schwere vertical irgendwie frei bewegten Massenpunkt eingeschlagen wird.

Aus

$$M\frac{dV}{dt} = M\frac{d^2s}{dt^2} = C$$

folgt

$$MV = M\frac{ds}{dt} = Ct + C_1, \quad Ms = C\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \tag{33}$$

wobei C_1 und C_2 die Integrationsconstanten sind.

Ein Blick auf diese Formeln zeigt, dass ihre Bestimmung auf drei Weisen möglich ist, nämlich indem man festsetzt:

a) für einen Zeitpunkt t_1 den Ort s_1,
für einen Zeitpunkt t_2 die Geschwindigkeit V_2;

b) für einen Zeitpunkt t_1 den Ort s_1,
für einen anderen t_2 den Ort s_2;

c) für einen Zeitpunkt t_1 den Ort s_1,
für einen Ort s_2 die Geschwindigkeit V_2.

Dabei kann man zur Vereinfachung der Endformeln stets einen der festgesetzten Zeitpunkte als die Zeit Null festsetzen, einen der festgesetzten Orte zum Nullpunkt für s wählen.

Jede der oben aufgezählten drei Bestimmungsarten giebt die Lösung einer einfachen physikalischen Aufgabe; wir gehen demgemäss näher auf sie ein.

a) Ist $t_1 = 0$, $s_1 = 0$, so hat man zur Bestimmung von C_1 und C_2 die Gleichungen:

$$MV_2 = Ct_2 + C_1,$$
$$0 = C_2.$$

Es wird also:

$$\begin{aligned} M(V - V_2) &= C(t - t_2), \\ Ms &= C\frac{t^2}{2} + (MV_2 - Ct_2)t. \end{aligned} \tag{34}$$

Die Gleichungen werden besonders einfach, wenn man specieller auch noch $t_2 = 0$ und $V_2 = 0$ nimmt, d. h. zur Zeit, von der aus t gerechnet wird, den Massenpunkt mit der Geschwindigkeit Null vom Nullpunkt ausgehen lässt. Hierbei ist dann

$$MB = C, \quad MV = Ct, \quad Ms = C\frac{t^2}{2}, \quad MV^2 = 2Cs. \tag{34'}$$

Diese Gesetze gelten nach Galilei's Beobachtungen beim freien Fall eines kleinen Körpers unter der Wirkung der Schwere, voraus-

gesetzt, dass die Richtung $+s$ vertical nach unten gerechnet wird; auf dieser Thatsache beruht, dass wir bei solchen und ähnlichen Experimenten die Schwere als eine constante Kraft behandeln, die normal zur Erdoberfläche wirkt.

Dieselben Beobachtungen haben in Uebereinstimmung mit späteren, viel genaueren Messungen das wichtige Resultat ergeben, dass die Beschleunigung durch die Schwere an derselben Stelle der Erdoberfläche für alle Körper die gleiche Grösse hat, von Ort zu Ort aber wechselt. Man bezeichnet die Beschleunigung durch die Schwere mit dem Buchstaben g; die Kraft, welche die Schwere auf einen Massenpunkt ausübt, nämlich

$$K = Mg,$$

nennt man das Gewicht, welches der Massenpunkt an jener Stelle der Erdoberfläche besitzt. Das Gewicht ist aber nach dem Gesagten nicht (wie der Sprachgebrauch vermuthen lässt) eine einer gegebenen Masse individuelle Constante, sondern noch ausserdem von der Stelle auf der Erde abhängig, auf welche es bezogen wird. Auf das Gesetz, nach welchem seine Aenderung mit dem Orte geschieht, gehen wir später ausführlich ein.

Auf der Proportionalität der Gewichte mit den Massen beruht das später zu besprechende Verfahren, Massen mittelst der Wage zu vergleichen und zu messen.

Führt man ein, dass nach dem Gesagten für die Schwere $K = C = Mg$ ist, so nehmen die Galilei'schen Fallgesetze die Form an:

$$V = gt, \quad s = g\frac{t^2}{2}, \quad V^2 = 2gs. \tag{35}$$

Ist nach dem Gesagten auch der freie Fall unter der Wirkung der Schwere die denkbar einfachste der Beobachtung zugängliche Anwendung unserer Grundgleichungen (32), so hat er doch als Mittel zur experimentellen Prüfung derselben den Uebelstand, dass die wichtige Abhängigkeit der Bewegung von der Masse in den Endformeln garnicht hervortritt. In dieser Hinsicht bietet die Abänderung des Experimentes, wie sie die Atwood'sche Fallmaschine gestattet, eine Ergänzung. Indem wir die Construction dieses sinnreichen Instrumentes als bekannt voraussetzen, erinnern wir nur daran, dass bei demselben eine grosse Masse $M + m$ durch das Gewicht mg einer kleinen (variirbaren) m in Bewegung gesetzt wird. Demgemäss werden, für den Fall, dass die Bewegung zur Zeit $t = 0$ vom Zustand der Ruhe aus im Nullpunkt beginnt, die Formeln (34') hier folgendermassen eintreten:

$$B = \frac{mg}{M + m}, \quad V = \frac{mgt}{M + m}, \quad s = \frac{mgt^2}{2(M + m)}; \tag{36}$$

sie stimmen mit den Gesetzen für den freien Fall formell überein,

nur steht an Stelle der ganzen Beschleunigung durch die Schwere g der Bruchtheil $g.m/(M+m)$.

Nächst dem bisher allein betrachteten speciellsten Falle, dass die Bewegung zur Zeit $t=0$ mit der Geschwindigkeit $V=0$ begann (freier Fall), steht der andere, dass die Geschwindigkeit für $t=0$ von Null verschieden, etwa $=V_0$ gegeben ist (verticaler Wurf).

Hier haben wir:

$$M(V-V_0)=Ct, \quad Ms=C\frac{t^2}{2}+MV_0t; \tag{37}$$

schreiben wir die erstere Formel in der Gestalt:

$$V=\frac{Ct}{M}+V_0,$$

so erhellt daraus, dass zur Zeit $t_1=-V_0M/C$ (im Falle der Schwere zur Zeit $t_1=-V_0/g$) die Geschwindigkeit V verschwindet und, weil mit $ds/dt=0$ zugleich $d^2s/dt^2>0$ ist, ebenda s seinen kleinsten Werth annimmt. Betrachtet man die Zeit $t=0$ als Beginn der Bewegung, d. h. schliesst negative Werthe t von der Betrachtung aus, so tritt dieser Fall nur ein, wenn $V_0<0$, d. h. die Anfangsgeschwindigkeit nach der Richtung von $-s$, der Kraft entgegen, im Falle der Schwere also nach oben gerichtet gewesen ist. Der kleinste erreichte Werth von s findet sich, wenn man den speciellen Werth $t_1=-V_0M/C$ in die allgemeine Formel einsetzt:

$$s_1=-\frac{V_0^2M}{C}; \tag{37'}$$

im Falle der Schwere giebt $s_1=-V_0^2/g$ dem absoluten Werthe nach die grösste in Folge der Anfangsgeschwindigkeit V_0 erreichte Höhe über dem Ausgangspunkt.

Verfolgt man den Massenpunkt noch weiter auf seinem Wege und fragt, nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit er den Ausgangspunkt wieder passirt, so erhält man das Resultat:

$$t_2=-2V_0M/C=2t_1, \quad V_2=-V_0; \tag{37''}$$

die Zeit ist die doppelte, die er bis zur Erreichung der höchsten Stelle brauchte, die Geschwindigkeit ist der Anfangsgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt.

b) Ist für $t=0$, $s=0$, für $t=t'$, $s=s'$, wobei $t'>0$ sein soll, so gilt zur Bestimmung von C_1 und C_2:

$$0=C_2, \quad Ms'=C\frac{t'^2}{2}+C_1t',$$

daher wird

$$MV=Ct+\frac{Ms'}{t'}-C\frac{t'}{2}, \quad M(s-s')=C\frac{t^2-t'^2}{2}. \tag{38}$$

Diese Formeln geben unter Anderem die Antwort auf die Frage: mit welcher Geschwindigkeit V_0 muss der Punkt zur Zeit $t = 0$ ausgehen, um in der Zeit t' die Länge s' unter der Wirkung der Schwere vertical zurückzulegen. Hierzu ist in der ersten Formel $V = V_0$, $t = 0$ zu setzen, wodurch folgt:

$$V_0 = \frac{s'}{t'} - \frac{Ct'}{2M}$$

oder wegen $C/M = g$ auch $V_0 = s'/t' - gt'/2$.

c) Ist für $t = 0$, $s = 0$, für $s = s'$, $V = V'$, so bestimmt sich C_1, C_2 und zugleich der Zeitpunkt t', zu welchem der Ort s' erreicht wird, aus

$$C_2 = 0, \quad MV' = Ct' + C_1, \quad Ms' = C\frac{t'^2}{2} + C_1 t',$$

woraus folgt:

$$C_1 = \pm \sqrt{M^2V'^2 - 2MCs'}, \quad t' = \frac{1}{C}\left(MV' \mp \sqrt{M^2V'^2 - 2MCs'}\right). \quad (39)$$

Diese Resultate bieten in doppelter Hinsicht Gelegenheit zu wichtigen Bemerkungen.

Erstens erhalten wir für C_1 wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel zwei Werthe: es kann also vorkommen, dass die gemachten Festsetzungen die Integrationsconstanten nicht eindeutig bestimmen, sondern zwei oder mehr Bewegungsgesetze mit ihnen verträglich sind; dann ist den Festsetzungen noch eine Angabe zuzufügen, welche die zu wählende Wurzel charakterisirt.

Zweitens kann der Ausdruck unter der Wurzel negativ, also die Constante C_1 imaginär werden: es kann also vorkommen, dass die Nebenbedingungen mit den Hauptgleichungen des Problems in Widerspruch treten und eine reelle Lösung unmöglich machen. In unserm Falle ist das leicht zu übersehen; denn da die kleinste Geschwindigkeit, mit welcher die Stelle $s = 0$ verlassen werden kann, gleich Null ist, so kann die kleinste Geschwindigkeit, mit welcher eine auf positiver Seite gelegene Stelle s' erreicht werden kann, nur die bei freiem Fall stattfindende, nämlich $\sqrt{2Cs'/M}$ sein; verlangt man eine kleinere, so ist das Problem unlösbar. —

Nächst dem Falle, dass die wirkende Kraft constant ist, steht hinsichtlich der Einfachheit derjenige, dass sie nur von einem Argument t, s oder V abhängt. Hier lässt sich für ganz beliebige Gesetze der Abhängigkeit der Weg zur Durchführung des Problems folgendermassen darlegen.

a) Sei gegeben die Kraft als beliebige Function der Zeit, so gilt für die Beschleunigung eine Relation der Form:

$$B = \frac{d^2s}{dt^2} = f(t),$$

aus der sich sogleich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} V = \frac{ds}{dt} &= \int f(t)dt + C_1, \\ s &= \int dt \int f(t)dt + C_1 t + C_2. \end{aligned}\right| \quad (40)$$

b) Sei gegeben die Kraft als Function des Ortes, also auch:

$$B = \frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi(s),$$

so folgt durch Multiplication mit $\frac{ds}{dt}dt = ds$ und Integration:

$$\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \int \varphi(s)ds + \frac{C_1}{2}, \quad \text{oder}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2\int\varphi(s)ds + C_1}$$

und daher (41)

$$t = C_2 \pm \int \frac{ds}{\sqrt{2\int\varphi(s)ds + C_1}},$$

eine Gleichung, die den gesuchten Zusammenhang zwischen s und t enthält und sich in endlicher oder unendlicher Form nach s auflösen lässt.

c) Sei schliesslich die Kraft als Function nur der Geschwindigkeit gegeben, so können wir schreiben:

$$B = \frac{dV}{dt} = \psi(V), \quad \text{und erhalten daraus:}$$

$$t = \int \frac{dV}{\psi(V)} = C_1.$$

Diese Formel, nach V aufgelöst, schreibe sich: (42)

$$V = \frac{ds}{dt} = \chi(t, C_1);$$

aus ihr folgt sogleich:

$$s = C_2 + \int \chi(t, C_1)dt.$$

Die Bestimmung der Integrationsconstanten geschieht in der oben ausführlich erörterten Weise. —

Für die Behandlung der complicirteren Fälle, dass die Kraft mehrere Argumente enthält, lassen sich ähnliche allgemeine Regeln nicht aufstellen.

Es wird zur Beleuchtung der nachdrücklich hervorgehobenen Thatsache, dass gegebene Gesetze für die Kraft allein die Bewegung nicht eindeutig bestimmen, dienen, wenn wir die oben aufgestellten Regeln anwenden, um von den drei Gesetzen für Kraft oder Beschleunigung, die wir aus dem einen Gesetz

$$s = a \sin 2\pi \frac{(t - t_0)}{T}$$

geschlossen haben, rückwärts die ihnen entsprechenden allgemeinsten Formeln für s berechnen.

a) Wir setzen gemäss (32^a) kurz:

$$B = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}$$

und erhalten:

$$V = \frac{ds}{dt} = C_1 + \frac{\alpha T}{2\pi} \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T},$$

$$s = C_2 + C_1 t + \alpha \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}.$$

Hier unterscheidet sich s von der Ausgangsformel nur durch das Glied $C_2 + C_1 t$, welches eine gleichförmige Bewegung darstellt.

b) Setzen wir ferner gemäss (32^b):

$$B = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\beta s, \quad \text{wo } \beta > 0,$$

so folgt:

$$V^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C_1 - \beta s^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{C_1 - \beta s^2};$$

hieraus aber:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(s \sqrt{\frac{\beta}{C_1}}\right) = C_2 \pm t \quad \text{oder}$$

$$s = \sqrt{\frac{C_1}{\beta}} \sin (C_2 \pm t) \sqrt{\beta}.$$

Es bleibt also, falls keine Nebenbedingungen gegeben sind, hier Amplitude und Phase willkürlich.

c) Setzen wir schliesslich gemäss (32^c):

$$B = \frac{dV}{dt} = -\gamma \sqrt{\delta^2 - V^2},$$

so giebt sich:

$$\arcsin \frac{V}{\delta} = C_1 - \gamma t \quad \text{oder} \quad V = \frac{ds}{dt} = \delta \sin (C_1 - \gamma t),$$

und daher

$$s = \frac{\delta}{\gamma} \cos (C_1 - \gamma t) + C_2.$$

Hier bleibt der absolute Werth von s und die Phase unbestimmt.

§ 7. Bewegungen in der Ebene und im Raume, bestimmt durch gegebene Werthe der Geschwindigkeiten; Beispiele.

Ehe wir zu dem allgemeinen Falle übergehen, der dem im letzten Abschnitt behandelten speciellen direct entspricht, nämlich eine räumliche Bewegung durch die wirkenden Kräfte bestimmen, wollen wir gleichsam vorbereitend das einfachere Problem in Angriff nehmen, aus nach Richtung und Grösse gegebenen Geschwindigkeiten das Gesetz der Bewegung abzuleiten.

Die Gleichungen des Problemes lauten nach (20') folgendermassen:

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma u_h, \quad \frac{dy}{dt} = \Sigma v_h, \quad \frac{dz}{dt} = \Sigma w_h; \tag{43}$$

in ihnen sind die u_h, v_h, w_h, gemäss dem am Ende von § 5 über die Kräfte Gesagten, als direct oder indirect gegebene Functionen von x, y, z und t allein anzusehen. Es handelt sich darum, aus ihnen drei endliche Relationen zwischen x, y, z und t abzuleiten, d. h. also drei Combinationen von ihnen aufzusuchen, welche die Integration gestatten. Die drei Integrationsconstanten zu bestimmen muss der Ort des Massenpunktes für einen beliebigen Zeitpunkt gegeben sein.

In den Fällen, dass u, v und w nur die Zeit enthalten, oder u nur x, v nur y, w nur z, sind die Gleichungen (43) selbst diese integrirbaren Combinationen, ebenso, aber minder einfach, wenn u nur x und t, v nur y und t, w nur z und t enthält.

Handelt es sich allein um die Aufsuchung der Bahn, so muss man versuchen, schon aus den Differentialgleichungen die Zeit zu eliminiren. Dies ist sofort ausführbar, wenn u, v, w die Zeit gar nicht oder nur in einem gemeinsamen Factor enthalten; dann ist nämlich

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

von t unabhängig und giebt die zwei im Allgemeinen partiellen Differentialgleichungen der Bahn, die freilich nicht immer eine direct integrable Form haben.

Einfachst ist dies letztere Problem für den Fall einer ebenen Bewegung, denn

$$dx : dy = u : v$$

ist dann eine gewöhnliche Differentialgleichung. Die ersten Beispiele sollen Anwendungen hiervon geben.

1. Seien u und v lineäre Functionen von x und y:

$$\frac{dx}{dt} = u = (\alpha x + \beta y)F(t), \quad \frac{dy}{dt} = v = (\gamma x + \delta y)F(t), \tag{44}$$

α, β, γ, δ constant, $F(t)$ eine beliebige Function von t, so ist:

$$(\alpha x + \beta y)dy - (\gamma x + \delta y)dx = 0 \tag{44'}$$

die Differentialgleichung der Bahn. Dieselbe ist sogleich in integrabler Form, falls

$$\delta = -\alpha$$

ist, und ergiebt dann:

$$2\alpha xy + \beta y^2 - \gamma x^2 = \varepsilon, \tag{44''}$$

wo $\varepsilon/2$ die Integrationsconstante bezeichnet. Die Bewegung findet also in einem Kegelschnitt statt, dessen Centrum im Coordinatenanfang liegt, und der nach Lage und Verhältniss der Axen vollständig bestimmt ist. Die Integrationsconstante giebt nur den absoluten Werth

der letzteren und bestimmt sich etwa dadurch, dass ein Punkt gegeben ist, durch welchen die Bahn hindurchgehen soll.

Man kann, ohne das Problem zu specialisiren, nur durch Drehen des Coordinatensystems die Grösse α zum Verschwinden bringen; der Kegelschnitt erscheint dann auf seine Hauptaxen bezogen und wir haben für diese speciellen Coordinatenrichtungen:

$$\frac{dx}{dt} = \beta y \, . \, F(t), \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x \, . \, F(t), \quad \beta y^2 - \gamma x^2 = \varepsilon. \tag{45}$$

Hieraus folgt dann weiter:

$$\frac{\pm\, dx}{\sqrt{\beta(\varepsilon + \gamma x^2)}} = F(t) \, . \, dt = \frac{\pm\, dy}{\sqrt{\gamma(-\varepsilon + \beta y^2)}}.$$

Das doppelte Vorzeichen rührt nur davon her, dass aus der Bahngleichung sich für jedes x zwei entgegengesetzt gleiche y ergeben und umgekehrt; es giebt also keineswegs zwei Lösungen des Problemes. Seine Bestimmung geschieht, indem man gemäss der Bedeutung

$$x\sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta y^2 - \varepsilon}, \quad y\sqrt{\beta} = \sqrt{\varepsilon + \gamma x^2}$$

für den Anfangszustand die beiden Wurzeln positiv oder negativ wählt und ihr Vorzeichen beim Durchgang durch Null umkehrt.

Für die Integration sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) $\beta . \gamma > 0$, die Bahn ist eine Hyperbel; es folgt:

$$l\left(x\sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\beta(\varepsilon + \gamma x^2)}\right) \quad = \pm\sqrt{\beta\gamma}\int F(t) \, . \, dt + C,$$

$$l\left(y\sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma(-\varepsilon + \beta y^2)}\right) = \pm\sqrt{\beta\gamma}\int F(t) \, . \, dt + C';$$

b) $\beta . \gamma < 0$, die Bahn ist eine Ellipse; es folgt:

$$\arcsin x\sqrt{\frac{-\gamma}{\varepsilon}} = \pm\sqrt{-\beta\gamma}\int F(t) \, . \, dt + C_1,$$

$$\arcsin y\sqrt{\frac{\beta}{\varepsilon}} \quad = \pm\sqrt{-\beta\gamma}\int F(t) \, . \, dt + C_1'.$$

Wir kommen hier scheinbar zu noch zwei weiteren Integrationsconstanten C und C', es ist aber klar, dass, weil

$$\beta y^2 - \gamma x^2 = \varepsilon$$

sein soll, dieselben nicht von einander unabhängig sind.

In der That bemerkt man leicht, dass die Relationen gelten müssen:

$$\gamma e^{C} = \beta e^{C'}, \quad C_1 - C_1' = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Um einige noch sich bietende Fragen klar zu stellen, nehmen wir jetzt einfach $F(t) = 1$, und schreiben die Resultate in der Form:

a)
$$x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,\mathfrak{Sin}\,(k \pm t\sqrt{\beta\gamma}),$$
$$y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\,\mathfrak{Cof}\,(k \pm t\sqrt{\beta\gamma}),$$

wobei $\mathfrak{Sin}\,\xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$, $\mathfrak{Cof}\,\xi = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}$ gesetzt ist;

b)
$$x = \sqrt{\frac{-\varepsilon}{\gamma}}\,\sin\,(k \pm t\sqrt{-\beta\gamma}),$$
$$y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\,\cos\,(k \pm t\sqrt{-\beta\gamma}).$$

k ist die eine zu ε noch hinzukommende Integrationsconstante. Beide bestimmen sich einfach, wenn man annimmt, dass für $t = 0$, $y = +b$ und $x = 0$ sei; dann muss nämlich k verschwinden und $\sqrt{\varepsilon/\beta} = b$ sein. Das doppelte Vorzeichen unter $\mathfrak{Cof}$ und cos kann dann fortgelassen werden, das unter $\mathfrak{Sin}$ und sin bestimmt sich durch die erste Gleichung (45), so dass wir erhalten:

a)
$$x = b\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\mathfrak{Sin}\,(t\sqrt{\beta\gamma}),$$
$$y = b\,\mathfrak{Cof}\,(t\sqrt{\beta\gamma});$$

b)
$$x = b\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\,\sin\,(t\sqrt{-\beta\gamma}),$$
$$y = b\cos\,(t\sqrt{-\beta\gamma}).$$

Wir sehen: im Falle (a) beschreibt der Punkt den oberen Ast der Hyperbel, welcher positiven Werthen von y entspricht, in der Richtung von negativen zu positiven Werthen x, beginnt im Unendlichen zur Zeit $t = -\infty$, endet im Unendlichen um $t = +\infty$ und gelangt nie auf den unteren Zweig; im Falle (b) rotirt der Punkt auf der Ellipse in negativer Richtung, die Umlaufsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\beta\gamma}}.$$

2. Ein zweites Beispiel soll Polarcoordinaten benutzen. Die Aufgabe sei folgende:

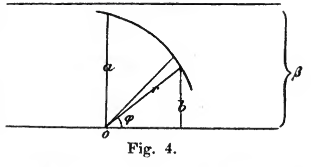


Fig. 4.

Ein Boot werde über einen Canal von der Breite β mittelst eines am Punkte o des einen Ufers befestigten Taues gezogen (Fig. 4); das Tau werde in der Zeit dt um vdt verkürzt, die Geschwindigkeit des Wassers im Canal, welcher das Boot folgt, sei gleich u.

Bezeichnet man die Länge des Taues mit r, seinen Winkel gegen die positive Strömungsrichtung mit φ, so hat man, da dr der in der Richtung von r, $rd\varphi$ der in der Richtung normal zu r während dt zurückgelegte Weg ist, die Gleichungen des Problems in der Form:

$$\frac{dr}{dt} = -v, \quad r\frac{d\varphi}{dt} = -u \sin\varphi, \tag{46}$$

woraus für die Gesammtgeschwindigkeit V folgt:

$$V^2 = v^2 + u^2 \sin^2\varphi.$$

In diesen Gleichungen kommt scheinbar nur die eine Componente der Strömungsgeschwindigkeit u zur Geltung. Dies klärt sich so auf: v ist die resultirende Geschwindigkeit in der Richtung von r, nicht aber diejenige, welche das gespannte Tau in dieser Richtung bewirkt. Denn damit dieselbe mit der Componente von u in der Richtung von r, nämlich mit $+u\cos\varphi$, zusammen v als Resultante giebt, muss sie den Betrag $-(v + u\cos\varphi)$ haben.

Die Differentialgleichung der Bahn erhält man durch Elimination der Zeit in der Form:

$$\frac{dr}{r} = \frac{v}{u}\frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

daraus folgt durch Integration:

$$lr = C - \frac{v}{2u}\, l\left(\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right) = C - \frac{v}{u}\, l\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Hier, wie weiterhin, ist mit l der natürliche Logarithmus bezeichnet.

Ist zur Zeit des Abganges $r = r_0$ und $\varphi = \varphi_0$, dann bestimmt sich C so, dass wir haben:

$$l\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{v}{u}\, l\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}}\right) \quad \text{oder auch} \quad \left(\frac{r}{r_0}\right)^{u/v} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}. \tag{47}$$

Die Zeit der Ueberfahrt ist $T = r_0/v$, also von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig.

Die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zu untersuchen, bezeichnen wir mit a den Radiusvector, der $\varphi = \pi/2$ entspricht, und haben dann einfacher:

$$r = a\operatorname{tg}^{v/u}\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Während φ von 0 bis π und von da bis 2π wächst, nimmt hiernach r von 0 bis ∞ zu und wieder bis 0 ab.

Die frühere Formel

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{v}{u\sin\varphi}$$

zeigt, dass die Bahncurve für $\varphi = 0$, π und 2π den Radiusvector tangirt.

Der normale Abstand b von der Axe ist gegeben durch

$$b = r \sin \varphi = 2a \frac{\sin^{(v+u)/u}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^{(v-u)/u}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \tag{47'}$$

er ist also für $\varphi = 0$ oder 2π stets gleich Null, für $\varphi = \pi$ aber 0 oder ∞, jenachdem $u > v$ oder $v > u$ ist. Er besitzt ein Maximum oder Minimum für

$$\frac{d(r \sin \varphi)}{d\varphi} = 0, \quad \text{d. h. } r\left(\frac{v}{u} + \cos \varphi\right) = 0.$$

Da $r = 0$ das Minimum $b = 0$ bestimmt, so giebt

$$\cos \varphi_1 = -\frac{v}{u}$$

die Lage des Maximums, das nur auftritt für $u > v$; der zugehörige Werth von r und b ist:

$$r_1 = a\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^{v/2u}, \quad b_1 = \frac{a}{u} \cdot \frac{(u+v)^{(v+u)/2u}}{(u-v)^{(v-u)/2u}}. \tag{47''}$$

Hiernach kann man sich von dem ganzen Verlauf leicht ein Bild machen (vergl. Fig. 5).

Zwei Bemerkungen von allgemeiner Bedeutung seien dem zugefügt.

Da die Breite des Canales in der ganzen Entwickelung nicht vorkommt, so berücksichtigt letztere also auch nicht die Besonderheiten, welche die beiden Grenzen des Stromes bieten. Es ist daher ausdrücklich noch hinzuzufügen, dass die ausserhalb verlaufenden Theile der Curven — also jedenfalls der ganze untere Zweig — für das vorliegende Problem keine directe Bedeutung haben. Demgemäss ist es

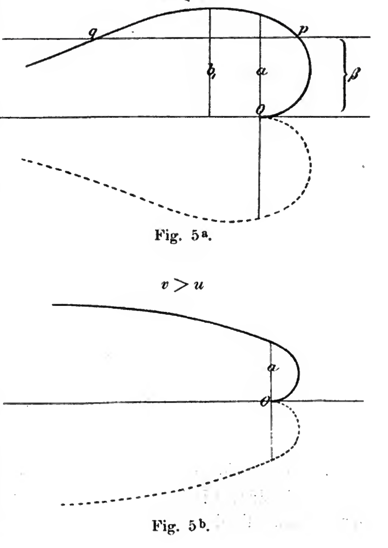


Fig. 5a.

Fig. 5b.

z. B. im Falle der Figur (5^a) unmöglich, das Boot von Punkt q nach o den Forderungen entsprechend überzuführen. In Wirklichkeit würde das Boot längs des Ufers von q bis p treiben und der Zug durch das Tau gar nicht wirksam werden.

Aber auch wenn der ganze obere Zweig innerhalb der Breite des Canals verläuft, so bezieht er sich doch zum Theil nicht auf unser eigentliches Problem — nämlich innerhalb des Stückes von Unendlich her bis zu der Stelle des Maximums b_1 von b.

Auch hier würde in Wirklichkeit das Tau schlaff hängen und das Schiff ausschliesslich der Strömung u folgen, denn das Tau verhindert in Wirklichkeit nur, dass die Entfernung nicht grösser werde als verlangt, gestattet aber, dass sie kleiner sei. Unsere Formeln tragen aber dem letzteren Umstand nicht Rechnung, sondern behandeln das Tau als starre Linie.

Wie hier, so ist es in vielen Fällen nicht möglich, die practischen Probleme erschöpfend in eine Formel zu fassen.

Es ist von Interesse zu untersuchen, wie die Verhältnisse und Formeln sich ändern, wenn das Boot nicht durch ein Tau, sondern durch Ruder eine Geschwindigkeit v in der Richtung nach dem Punkt o mitgetheilt erhält. Der Unterschied liegt darin, dass das Tau die resultirende Geschwindigkeit $-v$ in der Richtung von r erzwingt, also jede Einwirkung der Strömung u auf die Geschwindigkeit parallel mit r gewissermassen aufhebt, während jetzt $-v$ nur der eine Antheil der Geschwindigkeit parallel mit r ist, dem sich die bezügliche Componente der Strömung u zuaddirt. Demgemäss sind die Gleichungen des neuen Problems:

$$\frac{dr}{dt} = u \cos \varphi - v, \quad r\frac{d\varphi}{dt} = -u \sin \varphi; \tag{48}$$

man erhält daraus:

$$\frac{dr}{r} = \frac{v - u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi, \quad \text{also}$$

$$l(r) = C - \frac{v}{u} l\left(\text{cotg} \frac{\varphi}{2}\right) - l(\sin \varphi),$$

und daher nach denselben Annahmen wie oben

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \left(\frac{\text{tg} \frac{\varphi}{2}}{\text{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \right)^{v/u}. \tag{48'}$$

Die Discussion ist nach dem Vorstehenden leicht auszuführen.

3. Als drittes Beispiel behandeln wir folgendes. Längs der X-Axe bewege sich mit der positiven constanten Geschwindigkeit U, zur Zeit

$t = 0$ im Coordinatenanfang beginnend, eine Marke, — der untersuchte Punkt hingegen laufe in der XY-Ebene mit der constanten Geschwindigkeit V immer in der Richtung auf die wandernde Marke zu. Zur Zeit $t = 0$ befinde er sich auf der Y-Axe im Abstand a vom Nullpunkt. Die so bestimmte Curve giebt unter Anderem die Bahn, in welcher ein Hund seinem Herrn nachläuft, und heisst die Verfolgungscurve.

Fig. 6.

Für die Aufstellung der bezüglichen Gleichungen bedenke man, dass, wenn zur Zeit t die Marke $x_1 = Ut$, $y_1 = 0$, der Punkt aber x, y zu Coordinaten hat, die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit mit den Coordinatenaxen einschliesst, resp. sind

$$\cos(V, x) = \frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2}}, \quad \cos(V, y) = \frac{-y}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2}}.$$

Die Componenten der Geschwindigkeit V, als die Projectionen ihres Repräsentanten, ergeben sich hiernach durch die Formeln:

$$\frac{dx}{dt} = +V\frac{Ut - x}{\sqrt{(Ut - x)^2 + y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = -V\frac{y}{\sqrt{(Ut - x)^2 + y^2}}. \tag{49}$$

Wir haben hier also einen Fall, wo u und v die Coordinaten und die Zeit neben einander enthalten, — die Elimination der Zeit, um zu der Gleichung der Bahn zu gelangen', macht demgemäss auch mehr Umstände.

Wir erhalten zunächst aus den letzten Gleichungen:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Ut - x}{y}, \quad V = \pm\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}; \tag{49'}$$

dx und dy sind die während desselben Zeitelementes dt eintretenden Zuwachse der beiden Coordinaten.

Das doppelte Vorzeichen, welches wir hier erhalten haben, giebt zu einer wichtigen Bemerkung Anlass. Wo ein solches in Folge der angewandten Operationen noch vor einer Integration der Gleichungen auftritt, deutet es an, dass die dasselbe enthaltenden Formeln ausser dem eigentlich gestellten Problem noch ein anderes mit umfassen; es ist dann jedes Mal durch eine besondere Betrachtung zu entscheiden, welches von beiden Vorzeichen dem eigentlichen Problem entspricht.

In unserem Falle übersieht man leicht, welches das fremde Problem ist; denn geht man statt von den Gleichungen (49) aus von

$$\frac{dx}{dt} = -V\frac{Ut-x}{\sqrt{(Ut-x)^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = +V\frac{y}{\sqrt{(Ut-x)^2+y^2}},$$

so gelangt man zu denselben Gleichungen (49'). Jene Gleichungen sprechen aber aus, dass der Massenpunkt eine von der wandernden Marke hinweggerichtete Geschwindigkeit besitzt, — sie bestimmen statt der Verfolgungs- die sog. Fluchtcurve.

Es folgt weiter aus der ersten Gleichung (49')

$$Ut = x - y\frac{dx}{dy}, \quad \text{also} \quad Udt = d\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = -yd\frac{dx}{dy},$$

und durch Einsetzen in die zweite und Division mit dy

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \mp\frac{V}{U}y\frac{d^2x}{dy^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \mp\frac{U}{V}\frac{dy}{y}. \tag{50}$$

Jetzt ist die Integration ausführbar und giebt:

$$l\left(\frac{dx}{dy}+\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right) = C_1 \mp \frac{U}{V}l(y).$$

Die Gleichung (49') für dx/dy zeigt, dass zur Zeit $t=0$, wo $x=0$, $y=a$ ist, dx/dy verschwindet. Dies bestimmt die Constante

$$C_1 = \pm\frac{U}{V}l(a),$$

so dass wird:

$$l\left(\frac{dx}{dy}+\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right) = \pm\frac{U}{V}l\left(\frac{y}{a}\right);$$

daher folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{\pm U/V} - \left(\frac{y}{a}\right)^{\mp U/V}\right). \tag{50'}$$

Die Deutung des doppelten Vorzeichens geschieht nun durch die Ueberlegung, dass bei der Fluchtcurve für Werthe von $y < a$, bei der Verfolgungscurve für Werthe $y > a$ das Verhältniss dx/dy grösser als Null ist. Dies zeigt, dass das obere Zeichen der Verfolgungs-, das untere der Fluchtcurve entspricht.

Die zweite Integration ergiebt:

$$x + C_2 = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{\pm\frac{U}{V}+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\pm U/V} + \frac{1}{\pm\frac{U}{V}-1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\mp U/V}\right)$$

und nach Einführung, dass für $x=0$, $y=a$ sein soll:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{Vy}{\pm U + V}\left(\frac{y}{a}\right)^{\pm U/V} + \frac{Vy}{\pm U - V}\left(\frac{y}{a}\right)^{\mp U/V} \mp \frac{2UVa}{U^2 - V^2}\right); \quad (50'')$$

dies ist die definitive Form der Bahngleichung.

Wir unterwerfen der Discussion nur die Verfolgungscurve, indem wir das untere Vorzeichen beseitigt denken. Dann kommt y mit den beiden Exponenten $(V+U)/V$ und $(V-U)/V$ vor und es sind die beiden Fälle zu unterscheiden, dass $V \gtrless U$, d. h. der Verfolger grössere oder kleinere Geschwindigkeit besitzt als der Verfolgte, — die blosse Anschauung ergiebt, dass im ersteren Falle ein Einholen stattfinden muss, im letzteren nicht. Dies bestätigt die Formel, denn wenn wir in derselben $y = 0$ setzen, so muss sie dasjenige $x = x'$ geben, in welchem Beide zusammentreffen. Es zeigt sich, dass für $V > U$ resultirt:

$$x' = \frac{aUV}{V^2 - U^2}$$

und hieraus für die Zeit T, welche bis zum Einholen von dem Augenblick an vergangen ist, in welchem Verfolger und Verfolgter die Y-Axe passirten:

$$T = \frac{x'}{U} = \frac{aV}{V^2 - U^2}.$$

In dem Grenzfall, dass $V = U$ ist, wird x' und T unendlich.

§ 8. Bewegungen in der Ebene und im Raume bestimmt durch gegebene Werthe der Kräfte; Beispiele.

Die Gleichungen des allgemeinen Bewegungsproblemes für einen Massenpunkt m sind nach (31):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_h;$$

die Kräfte auf der rechten Seite derselben werden betrachtet als Functionen von $t, x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$. Es handelt sich darum, aus ihnen durch Combination drei integrable Formeln zu bilden, welche durch die Integration auf Beziehungen von der Form führen:

$$\Phi_1 = C_1, \quad \Phi_2 = C_2, \quad \Phi_3 = C_3,$$

worin die Φ_h Functionen von $t, x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$, die C_h die bezüglichen ersten Integrationsconstanten bezeichnen.

Aus diesen letzteren Formeln sind abermals drei integrable Combinationen zu bilden, die durch die Integration liefern:

$$\Psi_1 = C_1', \quad \Psi_2 = C_2', \quad \Psi_3 = C_3',$$

in welchen die Ψ_h Functionen von t, x, y, z und von den drei C_h, die C_h' aber die zweiten Integrationsconstanten bezeichnen.

Sind die C_h und C_h' durch gegebene Zustände des bewegten Punktes bestimmt, so geben die letzten Formeln, nach x, y, z aufgelöst, den Ort des Punktes zu jeder Zeit und durch Elimination der Zeit aus ihnen die Gleichungen der Bahn.

Das Auffinden dieser integrabeln Combinationen bildet die Hauptschwierigkeit der Lösung des Problemes. Dieselbe kommt ganz in Wegfall, wenn jede Gleichung neben der Zeit nur eine Coordinate und deren Differentialquotienten enthält; dann reducirt sich die Aufgabe auf die bei geradliniger Bewegung behandelte, denn jede Gleichung ist für sich allein zweimal zu integriren. Die erste der folgenden Aufgaben giebt hierfür ein Beispiel specieller Art, insofern die Bewegung in der Ebene stattfindet, die letztere ein etwas complicirteres räumliches Problem. Andere Beispiele folgen in späteren Abschnitten.

1. Es werde ein Massenpunkt in einer gegebenen Richtung fortgeschleudert und der Wirkung der Schwere überlassen (schiefer Wurf). Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c und um den Winkel α gegen die Horizontale nach oben geneigt. Ein Coordinatensystem sei mit seinem Nullpunkt in die Ausgangsstelle, mit seiner Y-Axe vertical nach unten, mit seiner X-Axe in die verticale Ebene durch die Anfangsgeschwindigkeit gelegt; dann ist aus Symmetrierücksichten klar, dass die Bewegung durchaus in der XY-Ebene verlaufen wird.

Die Gleichungen des Problems sind:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg;$$

dazu sei für $t = 0$ (51)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = c\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -c\sin\alpha.$$

Die Integration giebt demgemäss:

$$x = ct\cos\alpha, \quad y = g\frac{t^2}{2} - ct\sin\alpha. \tag{51'}$$

Hieraus folgt die Gleichung der Bahn:

$$y = \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha} - x\operatorname{tg}\alpha, \tag{51''}$$

also die Gleichung einer Parabel mit verticaler Axe; ihr Scheitel hat die Coordinaten a und b, welche die Werthe haben:

$$a = \frac{c^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha, \quad b = -\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha. \tag{51'''}$$

Führt man ein durch den Scheitel gehendes mit X, Y paralleles System Ξ, H ein, indem man

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b$$

setzt, so folgt als Gleichung der Bahn:

$$\eta = \frac{\xi^2 g}{2c^2 \cos^2 \alpha}.$$

Die Höhe des schiefen Wurfes ist gleich $-b$, die horizontale Wurfweite gleich $2a$.

Stellen wir die Frage, in welcher Richtung der Punkt mit der gegebenen Geschwindigkeit ausgehen muss, um eine verlangte Stelle x_1, y_1 zu treffen, so ist aus der Gleichung

$$y_1 = \frac{g x_1^2}{2c^2 \cos^2 \alpha} - x_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

welche aussagt, dass die Parabel durch den Coordinatenanfang und die Stelle x_1, y_1 geht, der Winkel α zu bestimmen. Man erhält leicht:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + 2c^2 g y_1 - g^2 x_1^2}}{g x_1}. \tag{52}$$

Diese Formel ergiebt zwei Werthe für α, sobald der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen grösser als Null ist, einen Werth, wenn er gleich, keinen, wenn er kleiner als Null ist.

Im ersten Fall kann man also bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c den Punkt auf zwei Wegen erreichen, mittelst einer flacheren oder steileren Parabel, im letzten überhaupt nicht mehr. Die Grenze zwischen beiden Bereichen, d. h. den geometrischen Ort aller Punkte, die nur mittelst einer Parabel zu erreichen sind, bildet die Curve, die dadurch gegeben ist, dass die Grösse unter der Wurzel verschwindet, d. h. für die

$$c^4 + 2gc^2 y_1 - g^2 x_1^2 = 0$$

ist; diese Curve ist eine Parabel, deren Axe in die Y-Axe fällt und deren Scheitel um $c^2/2g$, d. h. um die bei verticalem Wurf überhaupt erreichbare Höhe über dem Anfangspunkt liegt; sie schneidet die Horizontale in der Entfernung $x_1 = \pm c^2/g$, d. h. der grössten horizontalen Wurfweite, die, wie Formel (51''') zeigt, bei der Elevation $\alpha = \pi/4$ erreicht wird, und hüllt sämmtliche derselben Anfangsgeschwindigkeit entsprechende Wurfcurven ein.

2. Wir behandeln als zweites Beispiel die Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung der Schwere auf der rotirenden Erde.

Die Rotation wirkt in mehrfacher Hinsicht modificirend auf die Erscheinung ein; einerseits stellt letztere sich dem an der Rotation theilnehmenden Beobachter in veränderter Gestalt dar, andererseits werden auch die Bedingungen des Problems dadurch factisch geändert, dass die Rotation die Anfangsgeschwindigkeit beeinflusst.

Wir denken uns die Erde als Kugel, nehmen die Rotationsaxe zur Z-Axe eines absolut festen Coordinatensystems, legen die X- und Y-Axe beliebig in die Ebene des Aequators. Eine Stelle der Ober-

fläche sei durch die geographische Breite ψ und die geographische Länge φ — letztere gegen die XZ-Meridianebene gerechnet — gegeben. Rotirt die Erde, so wächst φ gleichförmig mit der Zeit, es ist also

$$\varphi = \varkappa t = \frac{2\pi}{T} t,$$

worin T die Dauer eines Umlaufes von 86400 Secunden beträgt.

An der durch φ, ψ gegebenen Stelle befinde sich der mit der Erde bewegte Beobachter; dieser beurtheilt die Erscheinung wie sie sich in Bezug auf ein mit ihm fortschreitendes Coordinatensystem Ξ, H, Z darstellt. Unsere Grundgleichungen (31) sind aber für ein absolut festes Coordinatensystem aufgestellt und demgemäss müssen wir von ihm ausgehen.

Die auf den Massenpunkt wirkende Kraft ist, was wir hier ohne Beweis aussprechen, die Anziehung der Erde, die, wenn wir letztere als homogene Kugel ansehen, nach dem Mittelpunkt hin gerichtet ist; die in Folge der ellipsoidischen Gestalt und der Inhomogenität eintretenden Abweichungen hiervon sind unbedeutend. Wir wollen das Gesetz ihrer Wirkung aber zunächst noch nicht einführen, sondern für die Componenten desselben die Buchstaben X, Y, Z vorläufig beibehalten. Dann lauten die Grundgleichungen:

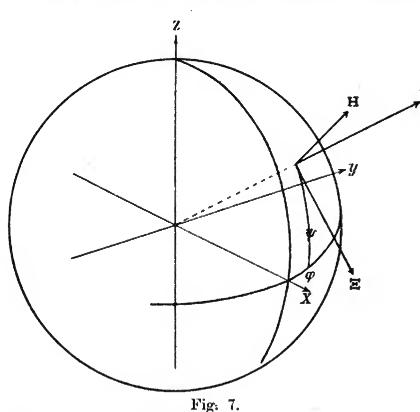


Fig. 7.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}.$$

Um diese Gleichungen auf das bewegliche System Ξ, H, Z zu transformiren, bestimmen wir die Lage des letzteren folgendermassen: die Z-Axe stehe an der Stelle φ, ψ normal zur Erdoberfläche nach aussen gerichtet, die Ξ-Axe liege im Meridian nach Süden, die H-Axe normal dazu nach Osten; dann wird das Ξ, H, Z-System für $\psi = \pi/2$, $\varphi = 0$ dem X, Y, Z-System parallel.

Bezeichnen wir noch den Erdradius mit R, so gelten folgende Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
x &= [(R+\zeta)\cos\psi + \xi\sin\psi]\cos\varphi - \eta\sin\varphi,\\
y &= [(R+\zeta)\cos\psi + \xi\sin\psi]\sin\varphi + \eta\cos\varphi,\\
z &= \ (R+\zeta)\sin\psi - \xi\cos\psi,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
\xi &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\psi - z\cos\psi,\\
\eta &= \ y\cos\varphi - x\sin\varphi,\\
R+\zeta &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\psi + z\sin\psi.
\end{aligned}
\tag{53'}
$$

Analog gilt für die Kraftcomponenten:

$$
\begin{aligned}
\Xi &= (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\sin\psi - Z\cos\psi,\\
\mathrm{H} &= \ Y\cos\varphi - X\sin\varphi,\\
\mathrm{Z} &= (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\cos\psi + Z\sin\psi.
\end{aligned}
\tag{53''}
$$

Wendet man die Factoren dieses Systems auf die Bewegungsgleichungen an, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi\sin\psi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi\sin\psi - \frac{d^2z}{dt^2}\cos\psi &= \frac{\Xi}{m},\\
\frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi \qquad - \frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi \qquad &= \frac{\mathrm{H}}{m},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi\cos\psi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi\cos\psi + \frac{d^2z}{dt^2}\sin\psi &= \frac{\mathrm{Z}}{m}.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Nun kommt in den Coordinaten x, y, z die Zeit t in doppelter Weise vor, einmal durch ξ, η, ζ, das andere Mal durch $\varphi = \varkappa t$. Wir können daher schreiben:

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial\varphi}\varkappa + \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\varkappa^2 \quad \text{u. s. f.,}
$$

wo nun das Zeichen ∂ sich nur auf das Vorkommen von t in ξ, η, ζ bezieht. Es ist aber nach den obigen Formeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\varphi} &= -y, & \frac{\partial y}{\partial\varphi} &= x, & \frac{\partial z}{\partial\varphi} &= 0,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} &= -x, & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} &= -y, & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} &= 0,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2\varkappa\frac{\partial y}{\partial t} - \varkappa^2 x,\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\varkappa\frac{\partial x}{\partial t} - \varkappa^2 y,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (54) ein, so kann man die $\cos\varphi\cos\psi\ldots$ unter die Zeichen ∂ ziehen und erhält ohne alle Rechnung durch Vergleichung mit (53):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt}\varkappa\sin\psi - \xi\varkappa^2 - [(R+\zeta)\sin\psi - \xi\cos\psi]\varkappa^2\cos\psi = \frac{\Xi}{m},$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt}\varkappa\sin\psi + 2\frac{d\zeta}{dt}\varkappa\cos\psi - \eta\varkappa^2 = \frac{\mathrm{H}}{m},$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt}\varkappa\cos\psi - (R+\zeta)\varkappa^2 + [(R+\zeta)\sin\psi - \xi\cos\psi]\varkappa^2\sin\psi = \frac{\mathrm{Z}}{m},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\Xi}{m} + R\varkappa^2\cos\psi\sin\psi + (\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi)\varkappa^2\sin\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\sin\psi,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}}{m} + \eta\varkappa^2 - 2\varkappa\frac{d}{dt}(\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi), \tag{54'}$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\mathrm{Z}}{m} + R\varkappa^2\cos^2\psi + (\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi)\varkappa^2\cos\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\cos\psi.$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen erkennen wir am besten, indem wir sie zunächst auf einen im Anfangspunkt des Coordinatensystems Ξ, H, Z ruhenden Massenpunkt anwenden, und demgemäss ξ, η, ζ, $d\xi/dt$, $d\eta/dt$, $d\zeta/dt$ gleich Null, Ξ, H, Z gleich Ξ_0, H_0, Z_0 setzen. Dann lauten sie:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\Xi_0}{m} + R\varkappa^2\cos\psi\sin\psi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}_0}{m}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\mathrm{Z}_0}{m} + R\varkappa^2\cos^2\psi; \tag{54''}$$

fände keine Rotation statt, so wäre an derselben Stelle:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\Xi_0}{m}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}_0}{m}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\mathrm{Z}_0}{m}.$$

Wir bemerken, dass die scheinbaren Beschleunigungen und Kraftcomponenten in Folge der Rotation sich von den wirklichen unterscheiden, und können leicht Folgendes erkennen:

In Folge der Rotation treten für einen gegen das bewegte System ruhenden Punkt zu den gegebenen Kräften scheinbar noch zwei Componenten hinzu, die eine Resultante normal zur Rotationsaxe besitzen von der Grösse $K' = mR\varkappa^2\cos\psi$. Bemerkt man, dass $R\cos\psi = r$, der Abstand von der Rotationsaxe, dass $\varkappa = 2\pi/T = \omega$, die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist, so erhält man auch $K' = mr\omega^2$, und da überdies $r\omega$ die Lineargeschwindigkeit v in Folge der Rotation ist, so findet sich der Werth $K' = mv^2/r$; nach dem in § 5 Entwickelten ist also K' die Centrifugalkraft.

Dasselbe gilt für die auf einen beliebigen relativ zu dem System Ξ, H, Z ruhenden Punkt ξ, η, ζ scheinbar ausgeübten Kräfte; denn ihre Componenten parallel den Ξ, H, Z-Axen werden resp.

$$\Xi' = [(R+\zeta)\cos\psi + \xi\sin\psi]\varkappa^2\sin\psi, \quad \mathrm{H}' = \eta\varkappa^2,$$
$$\mathrm{Z}' = [(R+\zeta)\cos\psi + \xi\sin\psi]\varkappa^2\cos\psi$$

und deuten sich genau in derselben Weise.

Wir sprechen daher den für manche Anwendungen wichtigen allgemeinen Satz aus:

Ein Massenpunkt, der in Bezug auf ein um eine beliebige Axe gleichförmig rotirendes Coordinatensystem **ruht**, erfährt scheinbar Kräfte, welche die Resultanten sind von den wirklich ausgeübten und der in Folge der Rotation eintretenden Centrifugalkraft. Seine Bedeutung wird später hervortreten.

Für den relativ zu dem System Ξ, H, Z bewegten Massenpunkt ist diese Wirkung nicht die Einzige, sondern es kommen noch folgende drei Componenten zu den vorigen hinzu:

$$+ 2\varkappa m \frac{d\eta}{dt} \sin\psi, \quad - 2\varkappa m \frac{d}{dt}(\xi \sin\psi + \zeta\cos\psi), \quad + 2\varkappa m \frac{d\eta}{dt}\cos\psi.$$

Die erste und letzte setzt sich zusammen zu einer Resultante, die normal zur Rotationsaxe nach aussen gerichtet ist und den Werth $2\varkappa m\, d\eta/dt$ hat, also proportional mit der nach Osten gerichteten Geschwindigkeitscomponente ist; die zweite stellt eine von Westen nach Osten gerichtete Kraft dar, die proportional mit der Geschwindigkeitscomponente normal zur Drehungsaxe ist.

Wir gehen nun an die Integration unserer Differentialgleichungen unter der beschränkenden, aber in der Anwendung auf das Experiment ganz unbedenklichen Annahme, dass die Bewegung in einem so kleinen Bereich stattfindet, dass seine Dimensionen neben dem Erdradius, d. h. hier ξ, η, ζ neben R, vernachlässigt werden können.

Dann ist, wie wir später zeigen werden, auch die Anziehung der Erde als nach Grösse und Richtung constant und zwar gleich der im Punkte $\xi = \eta = \zeta = 0$ anzunehmen, also $\Xi = \mathsf{H} = 0$, $\mathsf{Z} = - m g_0$ zu setzen, wo g_0 die Beschleunigung bezeichnet, wie sie auf ruhender Erde sein würde.

Unsere Gleichungen werden sonach:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= R\varkappa^2 \cos\psi \sin\psi + 2\varkappa \frac{d\eta}{dt}\sin\psi, \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= - 2\varkappa \frac{d}{dt}(\xi \sin\psi + \zeta\cos\psi), \qquad (55)\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= - g_0 + R\varkappa^2 \cos^2\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\cos\psi.
\end{aligned}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $\cos\psi$, die letzte mit $\sin\psi$ und subtrahiren, so folgt:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\xi\cos\psi - \zeta\sin\psi) = + g_0 \sin\psi,$$

multipliciren wir mit $\sin\psi$ und $\cos\psi$ und addiren, so kommt:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi) = -(g_0 - R\varkappa^2)\cos\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt},$$

hierzu die zweite Gleichung:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = - 2\varkappa\frac{d}{dt}(\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi),$$

giebt das für die Behandlung geeigneteste System, das wir kürzer schreiben:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = + g'', \quad \frac{d^2\varrho}{dt^2} = - g' + 2\varkappa \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = - 2\varkappa \frac{d\varrho}{dt}. \qquad (55')$$

Hier ist σ als eine Coordinate parallel der Rotationsaxe, ϱ als eine normal dazu anzusehen und zwar ist

$$\sigma = \xi \cos \psi - \zeta \sin \psi, \quad \varrho = \xi \sin \psi + \zeta \cos \psi.$$

Die erste Formel giebt:

$$\sigma = + g'' \frac{t^2}{2} + at + a_1; \qquad (56^a)$$

die zweite und dritte combiniren sich durch Elimination von η zu:

$$\frac{d^3\varrho}{dt^3} = - 4\varkappa^2 \frac{d\varrho}{dt},$$

welches führt auf:

$$\varrho = b + b_1 \cos 2\varkappa t + b_2 \sin 2\varkappa t. \qquad (56^b)$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so lautet dieselbe:

$$g' - 4\varkappa^2 (b_1 \cos 2\varkappa t + b_2 \sin 2\varkappa t) = + 2\varkappa \frac{d\eta}{dt}$$

und liefert integrirt:

$$g' t - 2\varkappa (b_1 \sin 2\varkappa t - b_2 \cos 2\varkappa t) + c = 2\varkappa \eta. \qquad (56^c)$$

Diese Werthe für σ, ϱ, η enthalten sechs willkürliche Constanten a, a_1, b, b_1, b_2 und c, sind also die gesuchten allgemeinen Lösungen.

Beginnt der Massenpunkt seine Bewegung zur Zeit $t = 0$ in $\xi = \eta = \zeta = 0$ von der Ruhe aus, so sind σ, ϱ, η und ihre ersten Differentialquotienten für $t = 0$ gleich Null zu setzen. In Folge dessen wird

$$\sigma = + g'' \frac{t^2}{2}, \quad \varrho = - \frac{g'}{4\varkappa^2}(1 - \cos 2\varkappa t), \quad \eta = + \frac{g' t}{2\varkappa} - \frac{g'}{4\varkappa^2} \sin 2\varkappa t; \qquad (56)$$

und da aus

$$\sigma = \xi \cos \psi - \zeta \sin \psi, \quad \varrho = \xi \sin \psi + \zeta \cos \psi$$

folgt:

$$\xi = \sigma \cos \psi + \varrho \sin \psi, \quad \zeta = \varrho \cos \psi - \sigma \sin \psi,$$

so erhält man schliesslich in Rücksicht auf die Werthe von g' und g'' folgende Gesetze des freien Falles auf der rotirenden Erde:

$$\begin{aligned} \xi &= + \left[\frac{g_0 t^2}{2} - \frac{(g_0 - R\varkappa^2)}{4\varkappa^2}(1 - \cos 2\varkappa t)\right] \cos \psi \sin \psi, \\ \eta &= + \frac{(g_0 - R\varkappa^2)}{4\varkappa^2}(2\varkappa t - \sin 2\varkappa t) \cos \psi, \\ \zeta &= - \frac{(g_0 - R\varkappa^2)}{4\varkappa^2}(1 - \cos 2\varkappa t) \cos^2 \psi - \frac{g_0 t^2}{2} \sin^2 \psi. \end{aligned} \qquad (57)$$

Die Formeln vereinfachen sich noch dadurch, dass bei wirklichen Beobachtungen $2\varkappa t = 4\pi t/T$ wegen $T = 86\,400$ Secunden eine äusserst

kleine Grösse ist und die trigonometrischen Glieder die Entwickelung gestatten. Man erhält so durch Beschränkung auf die erste Ordnung:

$$\xi = + \frac{R\varkappa^2 t^2}{2} \cos\psi \sin\psi, \quad \eta = + (g_0 - R\varkappa^2) \frac{\varkappa t^3}{3} \cos\psi, \qquad (57')$$
$$\zeta = -(g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi) \frac{t^2}{2}.$$

Diese Formeln sprechen folgende Thatsachen aus:

1. Auf der rotirenden Erde wird die verticale Fallgeschwindigkeit dadurch verringert, dass sich von der Beschleunigung in Folge der Attraction die verticale Componente der Beschleunigung durch die Centrifugalkraft subtrahirt; die gesammte Beschleunigung ist

$$g = g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi.$$

2. Der von der Ruhe aus fallende Körper weicht auf der nördlichen Hemisphäre in der Richtung von West nach Ost und von Nord nach Süd aus der Normalen zur Oberfläche ab.

3. Nur die erstere Abweichung η ist durch die Beobachtung nachweisbar; die letztere versteckt sich dadurch, dass auch die Richtung der auf einen ruhenden Punkt ausgeübten Kraft in diesem Sinne und um den entsprechenden Betrag aus der Normalen abweicht. Denn die Bahn des fallenden Punktes auf die ΞZ-Ebene projicirt, giebt eine Gerade in einer Neigung gegen die Verticale, deren Tangente ist

$$\frac{R\varkappa^2 \cos\psi \sin\psi}{g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi};$$

eben dieselbe Richtung hat aber nach (55) die auf einen ruhenden Punkt wirkende Kraft, hat also auch ein mit einem Gewicht gespannter frei herabhängender Faden, wie er zur experimentellen Bestimmung des „Lothes" angewandt wird.

4. Die Bahn des frei fallenden Punktes verläuft hiernach in einer durch diese Richtung normal zum Meridian gelegten Ebene, und hat die Gleichung:

$$\eta^2 = \frac{(g_0 - R\varkappa^2)^2\, 8\zeta^3 \varkappa^2 \cos^2\psi}{9(g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi)^3}. \qquad (57'')$$

Beobachtungen über die durch die Theorie gegebene östliche Abweichung, welche, wenn bestätigt, einen schönen Beweis für die Rotation der Erde erbringt, sind zuerst von Benzenberg 1803 im Michaelisthurm in Hamburg, 1804 in einem Kohlenschacht bei Schlebusch angestellt (Benzenberg'scher Fallversuch) und 1831 unter noch günstigern Umständen von Reich im Dreibrüderschacht bei Freiberg wiederholt worden.

Beide Beobachter bestimmten neben der geographischen Breite und der Intensität der ganzen Schwere g am Beobachtungsort sowohl Fallhöhe als Fallzeit und massen die Coordinaten des Punktes, in

welchem die fallenden Kugeln auftrafen, in einem Coordinatensystem, dessen Anfang der Fusspunkt des Lothes von der Ausgangsstelle war und dessen Ξ- und H-Axe, wie oben, nach Süd und Ost lag.

Bei der Berechnung findet sich eine gewisse Willkür, da die gemessene Fallhöhe, Fallzeit und Schwere nicht der dritten Formel (57′) entsprechen konnte, weil diese Formel den Luftwiderstand nicht berücksichtigt. Die angewandte Berechnungsmethode kommt im Wesentlichen darauf hinaus, dass das Verhältniss der letzten beiden Formeln (57′) für die speciellen Werthe $-\zeta = h$ (Fallhöhe), $t = \tau$ (Fallzeit) benutzt wird; dies ergiebt dann den Werth η_1 der ganzen östlichen Abweichung:

$$\eta_1 = \left(h - \frac{R h \varkappa^2 \sin^2 \psi}{g}\right) \frac{2 \varkappa \tau}{3} \cos \psi.$$

An Stelle des nicht berücksichtigten kleinen zweiten Gliedes der Klammer ist eine Correction für die Wirkung des Luftwiderstandes gesetzt.

Die Beobachtungen werden durch Luftströmungen auf den langen Wegen sehr beeinflusst und stimmen unter sich nur wenig; eine im Widerspruch mit der Theorie bei der ersten und letzten der genannten Reihen gefundene kleine Abweichung (1,5‴ und 4,3 mm) der fallenden Kugeln nach Süden dürfte auf diese Ursache zurückgeführt werden.

Die östliche Abweichung fand sich bei den Fallhöhen von 235′, 262′, 158,54 m berechnet resp. 3,85‴, 4,67‴, 27,5 mm, beobachtet wurde resp. 4,00‴, 5,05‴, 28,4 mm. Ein directer Beweis für die Rotation der Erde ist hierdurch als erbracht anzusehen. —

Eine andere interessante Anwendung gestatten unsere Formeln noch, nämlich auf die Abweichung, die eine horizontal abgefeuerte Geschützkugel in Folge der Rotation der Erde erleidet. Hierbei können wir von der Einwirkung der Schwere absehen und die Gleichungen (56 a, b, c) schreiben:

$$\begin{aligned}
\sigma &= + at, \\
\varrho &= - b_1 (1 - \cos 2\varkappa t) + b_2 \sin 2\varkappa t, \\
\eta &= - b_1 \sin 2\varkappa t - b_2 (1 - \cos 2\varkappa t).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, da $\xi = \sigma \cos \psi + \varrho \sin \psi$, $\zeta = - \sigma \sin \psi + \varrho \cos \psi$ ist:

$$\begin{aligned}
\xi &= + at \cos \psi - [b_1 (1 - \cos 2\varkappa t) - b_2 \sin 2\varkappa t] \sin \psi, \\
\eta &= \qquad\qquad - b_2 (1 - \cos 2\varkappa t) - b_1 \sin 2\varkappa t, \\
\zeta &= - at \sin \psi - [b_1 (1 - \cos 2\varkappa t) - b_2 \sin 2\varkappa t] \cos \psi.
\end{aligned}$$

Seien nun zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeiten parallel ξ, η, ζ resp. gleich α, β, γ, so gilt zur Bestimmung der Constanten:

$$\begin{aligned}
\alpha &= + a \cos \psi + b_2 2\varkappa \sin \psi, \\
\beta &= - b_1 2\varkappa, \\
\gamma &= - a \sin \psi + b_2 2\varkappa \cos \psi,
\end{aligned}$$

es ist also
$$a = (\alpha \cos \psi - \gamma \sin \psi),$$
$$b_1 = -\beta/2\varkappa,$$
$$b_2 = (\alpha \sin \psi + \gamma \cos \psi)/2\varkappa.$$

Setzt man diese Werthe ein und beschränkt sich wiederum in Bezug auf $\varkappa t$ auf die erste Ordnung, so erhält man:
$$\xi = \alpha t + t^2 \varkappa \beta \sin \psi,$$
$$\eta = \beta t - t^2 \varkappa (\alpha \sin \psi + \gamma \cos \psi),$$
$$\zeta = \gamma t + t^2 \varkappa \beta \cos \psi;$$
das erste Glied giebt überall den Werth, wie er ohne Rotation der Erde stattfindet, das zweite die durch letztere verursachte Abweichung.

Sehr einfach wird das Resultat, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nach Süden oder Norden gerichtet ist; im ersten Falle ist $\alpha > 0$, im letzten $\alpha < 0$, β und γ verschwinden. Demgemäss haben wir:
$$\xi = \alpha t, \quad \eta = -t^2 \varkappa \alpha \sin \psi, \quad \zeta = 0;$$
im ersten Falle geht auf der nördlichen Hemisphäre die Abweichung nach Westen, im zweiten nach Osten, der Betrag ist unter 45^0 Breite bei 300 m Geschwindigkeit und zwanzig Secunden Flugdauer etwa 3,2 m. Eben so gross ist die südliche Abweichung bei einem Schuss nach Osten.

§ 9. Bedingte Bewegung; feste oder bewegte Oberflächen und Curven; Beispiele; Gleichgewichtsbedingungen.

Unter bedingter Bewegung eines Punktes verstehen wir eine solche, die ausser durch direct gegebene Kräfte noch durch Gleichungen für seine Coordinaten bestimmt ist. Für nur einen Massenpunkt kommen in erster Linie die Fälle in Betracht, dass derselbe gezwungen ist, bei seiner Bewegung auf einer festen oder bewegten Oberfläche oder Curve zu bleiben. Andere Fälle werden wir gelegentlich der Behandlung der Centralkräfte besprechen.

Wenn in Folge der gegebenen Bedingungen der Massenpunkt sich anders bewegt, als die direct gegebenen Kräfte verlangen, so müssen wir daraus schliessen, dass mit den Bedingungen die Wirksamkeit noch anderer Kräfte angenommen und eingeführt ist, deren Gesetze aus ihrer in diesen Bedingungen ausgedrückten Wirksamkeit indirect gefunden werden müssen. Denn jede Ursache der Aenderung einer Bewegung ist nach unserer Vorstellung eine Kraft.

Nach diesem Princip verfahren wir in den folgenden einfachen, wie auch in allen complicirten Fällen.

1. Sei ein Massenpunkt m gezwungen, auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so kann das nach unserer Vorstellung nur dadurch erreicht werden, dass die Oberfläche eine Kraft K' auf ihn ausübt, die in jedem

Augenblick genügt, die ihn hinwegtreibenden Kräfte aufzuheben, die der Resultante von jenen also entgegengesetzt gerichtet und gleich sein muss.

Wir nennen K' die Reactionskraft der Bahn, indem wir sie von dieser auf den Massenpunkt ausgeübt denken, die von ihr aufgehobene entgegengesetzt gerichtete hingegen den Druck des Massenpunktes gegen die Oberfläche, weil sie die Kraft angiebt, mit welcher der Punkt die Oberfläche zu durchbrechen strebt.

Seien die Componenten von K' gleich X', Y', Z', so werden wir die Bewegungsgleichungen in der Form ansetzen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h + X', \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h + Y', \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_h + Z'$$

und müssen X', Y', Z' so bestimmen, dass die Coordinaten x, y, z zu jeder Zeit der Gleichung der Oberfläche, welche in der Form

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

gegeben sein mag, genügen.

Die nähere Ueberlegung zeigt aber, dass in dieser Form die Aufgabe noch nicht bestimmt ist; denn die Anzahl der Gleichungen beträgt vier, die Anzahl der Unbekannten aber sechs, nämlich x, y, z, X', Y', Z'. Das Gleiche giebt auch eine einfache physikalische Betrachtung; denn zerlegen wir die Kraft K' an der Stelle, wo der Massenpunkt sich befindet, in eine Componente normal und eine tangential zur Oberfläche, so kann die letztere an der betrachteten Stelle keine Bewegung aus der Oberfläche heraus veranlassen und also auch keine verhindern. Diese Componente bleibt daher durch die bisherigen Festsetzungen unberührt. Wir wollen deshalb zu ihnen noch die specielle Annahme hinzufügen, dass eine tangentiale Einwirkung seitens der festen Oberfläche überhaupt nicht ausgeübt wird und schliessen hierdurch die Wirkung einer Reibung an derselben von vorn heraus aus.

Nehmen wir sonach die Einwirkung der Oberfläche normal gegen das Flächenelement, auf welchem sich der Massenpunkt befindet, gerichtet an und vertauschen demgemäss K' mit der Bezeichnung N, die Componenten X' mit $N\cos(n, x)$ u. s. f., so haben wir als Bewegungsgleichungen die folgenden:

$$\begin{gathered} m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h + N\cos(n,x), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h + N\cos(n,y), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_h + N\cos(n,z), \quad \varphi(x, y, z) = 0; \end{gathered} \tag{58}$$

vier Gleichungen, entsprechend den vier Unbekannten x, y, z, N — das Problem ist also jetzt vollkommen bestimmt. Die Cosinus der Winkel, welche die Normale in der Stelle x, y, z mit den Coordinatenaxen einschliesst, bestimmen sich bekanntlich durch die Formeln:

$$\cos(n, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big/ \Phi, \quad \cos(n, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big/ \Phi, \quad \cos(n, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big/ \Phi,$$
$$\text{falls } \Phi^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \text{ ist.} \tag{58}$$

Dass eine normal zur Oberfläche wirkende Reactionskraft auf die Bewegung in der Oberfläche keinen Einfluss hat, ist übrigens schon durch die p. 23 ausgesprochenen allgemeinen Sätze bewiesen, von denen der erste sagte, dass die Beschleunigungscomponente nach der Bahn multiplicirt mit der Masse des bewegten Punktes gleich ist der Tangentialcomponente der wirkenden Kraft. Eine solche Componente liefert aber die angenommene Reaction der Bahn nicht, sie influirt also auch nicht auf die Grösse der Geschwindigkeit.

Die beiden anderen Sätze nehmen unter Rücksicht auf die Componenten der Reaction nach der Haupt- und Binormale der Bahn leicht angebbare Formen an; sie gewinnen besonderes Interesse in dem speciellen Falle, dass äussere Kräfte fehlen, der Massenpunkt also mit einer Anfangsgeschwindigkeit auf der Oberfläche sich selbst überlassen ist. Denn da die Componente nach der Binormale der Bahn verschwinden muss, die einzig wirkende Kraft aber normal zur Oberfläche liegt, so muss die Hauptnormale der Bahncurve überall mit der Normalen der Oberfläche zusammenfallen, — d. h. die Bahn muss auf der Oberfläche eine sogenannte kürzeste oder geodätische Linie bilden. Die Grösse der Reaction und demgemäss der Druck des Massenpunktes gegen die Oberfläche ist dabei identisch mit der Centrifugalkraft des Punktes, die Grösse seiner Geschwindigkeit ist constant gleich seiner Anfangsgeschwindigkeit.

Während im Vorstehenden angenommen wurde, dass der Massenpunkt vollständig an die Oberfläche gebunden ist, wird in Wirklichkeit ihm meist die Ausweichung nur nach einer Seite behindert, nach der andern aber gestattet sein. Dies drückt sich in unserer Auffassung so aus, dass die Reactionskraft der Oberfläche ihre Richtung nicht wechseln, sondern nur nach der einen Seite der Oberfläche hin wirken kann. Da nun in unseren Formeln (58) nicht die Richtung der Reaction N, sondern diejenige der Normalen n auf der Oberfläche, positiv gerechnet von der Seite, wo $\varphi(x, y, z) < 0$, nach derjenigen, wo $\varphi(x, y, z) > 0$, eingeführt ist, so ist N als die Componente der Reactionskraft nach dieser Normalenrichtung aufzufassen und die Annahme constanter Richtung identisch mit unveränderlichem Vorzeichen von N. Jenachdem also der Massenpunkt auf die Seite, wo $\varphi(x, y, z) > 0$, oder wo $\varphi(x, y, z) < 0$ ist, frei ausweichen kann, wird N dauernd negativ oder positiv sein müssen, und die Gleichungen (58) hören sogleich auf anwendbar zu sein, sowie N durch Null hindurch-

gehend sich positiven, resp. negativen Werthen zuwendet; von diesem Moment an sind sie mit den für einen freien Punkt geltenden zu vertauschen, d. h. ist N solange dauernd gleich Null zu setzen, bis der Massenpunkt im Laufe der nach diesem Gesetz stattfindenden Bewegung die Oberfläche nach der anderen Seite hin durchbrechen würde. —

Man erweitert die vorstehenden Gleichungen leicht auf den Fall, dass die Oberfläche sich mit der Zeit selbst bewegt. Zerlegt man ihre Geschwindigkeit an der Stelle, wo sich der Massenpunkt befindet, in eine Componente normal, eine parallel zur Oberfläche, so kann diese letztere auf die Bewegung des Massenpunktes nicht einwirken, die erstere giebt einen parallelen Zuwachs zu derjenigen Kraft, die bei ruhender Oberfläche wirken würde; die Richtung der Reaction wird also in Folge hiervon nicht geändert und es bleiben auch die Gleichungen (58) gültig, mit der einzigen Ausnahme, dass die Gleichung der Oberfläche jetzt die Zeit enthält. Die $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ bestimmen sich dabei ganz ebenso, als wenn t ein constanter Parameter wäre.

2. Ist der Massenpunkt gezwungen, auf einer festen Curve zu bleiben, so werden wir, wenn wir wiederum die Wirkung der Reibung ausschliessen, ihren Einfluss durch eine normal zum Curvenelement gerichtete Kraft zu erklären haben. Bei einer Curve sind aber an jeder Stelle unendlich viel Normalen möglich, und es ist daher in unserem Falle nicht nur die Grösse der Reactionskraft, sondern auch ihre Richtung in der Normalenebene unbekannt. Beide Grössen drücken sich symmetrisch durch die Werthe der Componenten der Kraft nach zwei beliebig in der Normalebene gelegenen Richtungen aus. Für diese Richtungen bieten sich nun gemäss der Thatsache, dass in der analytischen Geometrie eine Raumcurve als die Schnittlinie zweier Oberflächen bestimmt wird, naturgemäss die Richtungen der Normalen im Curvenelement auf diesen beiden Oberflächen dar, welche, wie die Anschauung zeigt, in der Normalenebene desselben liegen. Wir bezeichnen die beiden Richtungen mit n' und n'', die ihnen parallelen Reactionen mit N' und N'' und haben deshalb für die Bewegung eines an eine feste Curve gebundenen Punktes die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_h + N'\cos(n', x) + N''\cos(n'', x), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_h + N'\cos(n', y) + N''\cos(n'', y), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_h + N'\cos(n', z) + N''\cos(n'', z), \\ \varphi'(x, y, z) &= 0, \quad \varphi''(x, y, z) = 0, \end{aligned} \qquad (59)$$

fünf Gleichungen mit den fünf Unbekannten x, y, z, N', N''.

Die Verallgemeinerung auf bewegte feste Curven geschieht ebenso wie für die Oberflächen.

Die letzteren Gleichungen specialisiren sich für ebene Curven, indem man als die eine Oberfläche die XY-Ebene wählt, als zweite den geraden Cylinder über der gegebenen Bahncurve. Dann ist

$$\cos(n', x) = \cos(n', y) = \cos(n'', z) = 0,$$

und es tritt an Stelle von $\varphi'(x, y, z) = 0$ und $\varphi''(x, y, z) = 0$

$$z = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Vertauscht man noch N' und n' mit N und n, so werden die Gleichungen (59) jetzt lauten:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h + N\cos(n, x),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h + N\cos(n, y), \tag{60}$$
$$\psi(x, y) = 0,$$

die dritte $\Sigma Z_h + N'' = 0$ giebt nichts für das Bewegungsproblem. Rechnet man die Richtung des Bahnelementes s gegen n wie Y gegen X, so kann man dafür auch schreiben:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_h + N\frac{dy}{ds},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_h - N\frac{dx}{ds}, \tag{60'}$$
$$\psi(x, y) = 0.$$

Für die Bewegung längs fester Curven gewinnen die p. 23 ausgesprochenen allgemeinen Sätze noch eine besondere Bedeutung, wenn wir auch die Reactionskraft der festen Bahn nach der Richtung der Haupt- und der Binormale zerlegen; diese Componenten mögen N_1' und N_2'' genannt werden.

Man kann sie demgemäss folgendermassen aussprechen:

1. Die Tangentialcomponente der äussern Kräfte ist gleich dem Product aus Masse und Bahnbeschleunigung des bewegten Punktes,

$$P = M\,dV/dt.$$

2. Die Reactionscomponente parallel der Hauptnormale ist gleich der Centrifugalkraft vermindert um die bezügliche Componente der äussern Kräfte,

$$N_1' = MV^2/\varrho - N_1;$$

der zweite Theil ist von der Bewegung unabhängig und lässt sich als der negative Gleichgewichtsdruck des Massenpunktes gegen die Bahn bezeichnen. ϱ ist positiv oder negativ zu zählen, je nachdem der Krümmungsradius in die Richtung fällt, in welcher die Hauptnormale positiv gerechnet wird oder in die entgegengesetzte.

3. Die Reactionscomponente parallel der Binormale ist entgegengesetzt gleich der bezüglichen Componente der äussern Kräfte,

$$N_2'' = - N_2.$$

Wirken keine äussern Kräfte, so nehmen diese Sätze entsprechend einfachere Formen an, die wir nicht auszusprechen brauchen.

Für ebene Curven liegt die Hauptnormale überall in ihrer Ebene, es kommen daher hier die ersten beiden Sätze allein in Betracht, und sie haben die besondere Bedeutung, in einem sehr allgemeinen Falle die gesuchten Combinationen für die Durchführung der Integration zu bieten.

1. Dies wird deutlich hervortreten, wenn wir als Beispiel die Bewegung auf einer ebenen Curve unter der Wirkung der Schwere behandeln.

Sei die Y-Axe positiv nach unten, die X-Axe nach links gerechnet, dann lauten die Gleichungen (60):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \qquad + N\frac{dy}{ds},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = + mg - N\frac{dx}{ds},$$

und die daraus gefolgerten besprochenen Sätze sind:

$$m\frac{dV}{dt} = mg\frac{dy}{ds}, \quad N = m\left(\frac{V^2}{\varrho} + g\frac{dx}{ds}\right). \tag{61}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $Vdt = ds$, so erhält man durch Integration:

$$\frac{V^2}{2} = C_1 + gy,$$

und wenn man die Integrationsconstante bestimmt durch die Annahme, dass in der Tiefe y_0 die Geschwindigkeit V_0 ist:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = g(y - y_0). \tag{61'}$$

Das erste Integral spricht den allgemeinen Satz aus, dass **bei der Bewegung unter der Wirkung der Schwere die Geschwindigkeitsdifferenz gegen die Ausgangsgeschwindigkeit nur von der Höhendifferenz gegen den Ausgangspunkt abhängig ist**; in allen grösseren Höhen (d. h. für kleinere y) ist die Geschwindigkeit kleiner, in allen kleineren Höhen (d. h. für grössere y) grösser als die Anfangsgeschwindigkeit. In der Höhe

$$y = y_0 - \frac{V_0^2}{2g} \tag{61''}$$

verschwindet sie.

Hieraus folgt, dass auf einer Bahn, welche zwei- oder mehrmals diese Höhe übersteigt, eine periodische Oscillation von der einen Nullstelle zur andern hin stattfinden muss.

Setzt man den erhaltenen Werth für V^2 ein, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung (61):

$$N = m\left[\left(\frac{V_0^2 + 2g(y - y_0)}{\varrho}\right) + g\frac{dx}{ds}\right], \qquad (61''')$$

und hierdurch ist, sowie die Bahn gegeben ist, N vollkommen für jede Stelle bestimmt.

Dabei bedeutet positives Vorzeichen, dass N in der als positiv eingeführten Richtung der Normale, negatives, dass es in entgegengesetzter Richtung wirkt.

N verschwindet, wenn

$$V_0^2 + 2g(y - y_0) = -g\varrho\frac{dx}{ds} = +g\varrho\cos(n, y)$$

ist; wechselt es zugleich das Vorzeichen, so kehrt sich die Richtung des Druckes um und der Massenpunkt verlässt die Bahn, falls sie nur nach einer Seite hin das Ausweichen verhindert.

Ist die Bahn ein Kreis mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt und n nach Innen positiv gerechnet, so ist ϱ gleich dem Kreisradius, $\varrho\cos(n, y) = -y$, also wird

$$N = \frac{m}{R}(V_0^2 + g(3y - 2y_0)).$$

Ist V_0 gleich Null, also y_0 die Tiefe unter dem Kreismittelpunkt, in welcher der Massenpunkt umkehren würde, so wechselt N sein Vorzeichen in einer Tiefe y_1, die dem einfachen Gesetz folgt:

$$y_1 = \tfrac{2}{3}y_0.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass dieser Werth y_1 nur dann vom Punkte wirklich erreicht wird, wenn $y_0 < 0$ ist, die Bewegung sich also über mehr als den Halbkreis erstreckt. Läuft also der Massenpunkt auf der Innenseite einer kreisförmigen Rinne und erhebt er sich über das Niveau des Mittelpunktes, so verlässt er diese Rinne in der Höhe $y_1 = \frac{2}{3}y_0$; ebenso wenn er auf der äussern Seite von oben herabläuft.

Die Abhängigkeit zwischen Ort und Zeit folgt aus (61′) in Rücksicht auf

$$V^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)$$

in der Form:

$$\frac{\pm dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{V_0^2 + 2g(y - y_0)}} = dt,$$

oder

$$\int\frac{dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{V_0^2 + 2g(y - y_0)}} = C_2 \pm t. \qquad (62)$$

Auch sie ist vollständig bestimmt, wenn die Curve gegeben ist, auf der die Bewegung stattfindet. Das doppelte Vorzeichen drückt aus,

dass dieselbe Curve in entgegengesetzten Richtungen in gleichen Zeiten durchlaufen werden kann, es bestimmt sich durch den Anfangszustand und bleibt dieser Bestimmung gemäss unverändert bis eine Nullstelle für die Geschwindigkeit erreicht ist; hier geht die Wurzelgrösse durch Null und tritt demgemäss ein Zeichenwechsel ein.

Nehmen wir als Bahn zunächst eine Gerade durch den Coordinatenanfang, die um den Winkel α gegen die X-Axe abwärts geneigt ist, und rechnen s von oben nach unten, so lauten die Formeln (61):

$$m\frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha.$$

Die Bewegung ist also gleichförmig beschleunigt, wie beim senkrechten Wurf; aber statt der ganzen Beschleunigung g wirkt nur die Componente $g \sin \alpha$ nach der Bahnrichtung. Es folgt:

$$V = \frac{ds}{dt} = c_1 + gt \sin \alpha, \quad s = c_2 + c_1 t + g\frac{t^2}{2} \sin \alpha;$$

war zur Zeit $t = 0$ sowohl s als V gleich Null, so erhalten wir den einfachen „Fall" auf der schiefen Ebene, und es gilt:

$$V = gt \sin \alpha, \quad s = g\frac{t^2}{2} \sin \alpha, \quad V^2 = 2gs \sin \alpha.$$

Bezeichnet S die ganze Länge der schiefen Ebene, so ist ihre Höhe $H = S \sin \alpha$; die letzte Formel giebt also:

$$V^2 = 2gH;$$

das heisst in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satz (61'): die Endgeschwindigkeit für alle schiefen Ebenen gleicher Höhe ist gleich.

Bezeichnet ferner T die ganze Fallzeit über S, so giebt die zweite Formel:

$$T^2 = \frac{2S}{g \sin \alpha},$$

ein Satz, der sich geometrisch so deutet: alle Sehnen eines Kreises, die im tiefsten oder höchsten Punkte desselben zusammentreffen, werden in der gleichen Zeit durchfallen. Diese Zeit ist ersichtlich dieselbe, die zum freien Falle über den verticalen Durchmesser gebraucht wird.

Von Formel (62) machen wir eine Anwendung auf den Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf der Cycloide; die Formel lautet, wenn $V_0 = 0$ gesetzt, also der Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit betrachtet wird:

$$\int \frac{dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{2g(y - y_0)}} = C_2 \pm t. \tag{62'}$$

Hierbei ist die Wurzel im Zähler der reciproke cosinus des Winkels α zwischen ds und der Y-Axe. Betrachten wir nun die Cycloide

als durch das Rollen eines Kreises vom Radius R unterhalb der horizontalen X-Axe entstanden, und ist p in Fig. 8 der die Curve markirende Punkt, so steht das Curvenelement in p normal zu der Sehne nach der Berührungsstelle $\overline{pq}$ und fällt in die Richtung der Sehne $\overline{pr}$; der Winkel α ist also identisch mit dem in der Figur bei p und r mit α bezeichneten und demgemäss:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{pr}}{2R} = \frac{2R - y}{\overline{pr}},$$

woraus folgt:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2R - y}{2R}}.$$

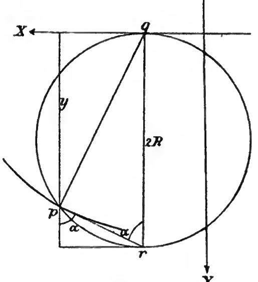


Fig. 8.

Sonach wird die Gleichung (62):

$$\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{dy}{\sqrt{(2R - y)(y - y_0)}} = C_2 \pm t,$$

und y bleibt immer zwischen y_0 und $2R$. Setzt man hier:

$$y = \eta + \frac{2R + y_0}{2}, \quad \text{also} \quad dy = d\eta,$$

so erhält man:

$$\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2R - y_0}{2}\right)^2 - \eta^2}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin\left(\frac{2\eta}{2R - y_0}\right) = C_2 \pm t,$$

oder nach Wiedereinführung von y:

$$\sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin\left(\frac{2y - 2R - y_0}{2R - y_0}\right) = C_2 \pm t.$$

Beginnt die Bewegung zur Zeit $t = 0$ auf der Höhe y_0, so bestimmt sich die Constante und wir haben:

$$\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\arcsin\left(\frac{2y - 2R - y_0}{2R - y_0}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = t.$$

Die Dauer einer halben einfachen Schwingung $T/2$ ist die Zeit, die bis zum Erreichen der Tiefe $2R$ vergeht; demgemäss findet sich die Dauer der einfachen Schwingung:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

also unabhängig von der Ausgangsstelle oder von der Schwingungsweite. Die Schwingungen auf der Cycloide sind tautochron.

Durch eine einfache geometrische Betrachtung kann man zeigen, dass der Krümmungsradius ϱ der Cycloide in ihrem tiefsten Punkte gleich dem vierfachen Radius des erzeugenden Kreises ist. Man erhält so auch:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\varrho}{g}}.$$

Diese Formel giebt zugleich die Schwingungsdauer auf einer Kreislinie vom Radius ϱ oder die eines Fadenpendels von der Länge ϱ bei unendlich kleiner Amplitude; denn auf unendlich kleinem Bogen fällt der Krümmungskreis mit der Cycloide zusammen. Auf den Werth der Schwingungsdauer bei endlichen Amplituden gehen wir später ein.

2. Als Beispiel für die Bewegung auf einer ruhenden Oberfläche nehmen wir das sphärische Pendel vor, d. h. die Oscillation eines schweren Punktes in einer festen Kugelfläche.

Legen wir die Z-Axe positiv nach unten, das Kugelcentrum in den Nullpunkt und bezeichnen den Radius der Kugel mit R, so lauten die Gleichungen (58) in unserem Falle:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{x}{R}N, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{y}{R}N, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{z}{R}N + mg, \\ R^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \tag{63}$$

Aus letzterer Gleichung folgt auch:

$$0 = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

und demgemäss bilden wir eine erste von N freie Combination, indem wir die Gleichungen (63) mit $(dx/dt)\,dt = dx$, $(dy/dt)\,dt = dy$, $(dz/dt)\,dt = dz$ multipliciren und addiren; dies liefert uns den ersten p. 23 angegebenen Satz in der Form: $\frac{1}{2}d(V^2) = g\,dz$, also nach der Integration:

$$\frac{V^2}{2} = gz + C_1.$$

Eine zweite von N freie Combination erhalten wir, indem wir die erste Gleichung (63) mit y, die zweite mit x multipliciren und subtrahiren; dann folgt:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

also nach der Integration:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_1'.$$

Dies sind die zwei ersten Integrale, die mit

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

zusammen den Ort des Punktes als Function der Zeit bestimmen. Wir genügen der dritten Gleichung identisch und reduciren die Anzahl der Unbekannten von drei auf zwei, indem wir Polarcoordinaten einführen und setzen:

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\cos\vartheta,$$

worin nun ϑ das Complement der geographischen Breite, φ die gegen die XZ-Ebene gerechnete geographische Länge bezeichnet; letztere ist positiv gedacht in der Richtung von Ost über Süd nach West.

Es folgt:

$$\frac{dx}{dt} = R\left(\cos\vartheta\cos\varphi\,\frac{d\vartheta}{dt} - \sin\vartheta\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = R\left(\cos\vartheta\sin\varphi\,\frac{d\vartheta}{dt} + \sin\vartheta\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

$$\frac{dz}{dt} = -R\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Das Einsetzen in die beiden ersten Integrale liefert:

$$\frac{R^2}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = gR\cos\vartheta + C_1,$$

$$R^2\sin^2\vartheta\,\frac{d\varphi}{dt} = C_1'.$$

Nun wollen wir diese ersten Integrationsconstanten bestimmen, indem wir festsetzen, dass zur Zeit $t = 0$

$$\vartheta = \vartheta_0,\quad \varphi = 0,\quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0,\quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

ist, d. h. also dass das sphärische Pendel in der XZ-Ebene in der Anfangsamplitude ϑ_0 mit der horizontalen Geschwindigkeit $R\omega\sin\vartheta_0$ sich selbst überlassen wird. Hiernach wird gelten:

$$\left.\begin{aligned} R\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \sin^2\vartheta_0\,.\,\omega^2\right] &= 2g(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),\\ \frac{d\varphi}{dt}\sin^2\vartheta &= \omega\sin^2\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \tag{63'}$$

Eliminirt man mittelst der letzten Gleichung $d\varphi/dt$ aus der ersten, so nimmt diese die Form an:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \omega^2(\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta)\frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta} = \frac{2g}{R}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

oder auch

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{2g}{R}\sin^2\vartheta - \omega^2\sin^2\vartheta_0(\cos\vartheta + \cos\vartheta_0)\right). \tag{63''}$$

Diese Formel zeigt, dass $d\vartheta/dt$ bei einer und derselben Bewegung nur von der Amplitude ϑ abhängt und auf drei Weisen verschwindet; erstens gemäss den Anfangsbedingungen für $\vartheta = \vartheta_0$, aber ausserdem auch für die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\frac{2g}{R}(1 - \cos^2\vartheta) = \omega^2\sin^2\vartheta_0(\cos\vartheta + \cos\vartheta_0), \tag{63'''}$$

die wir mit ϑ_1 und ϑ_2 bezeichnen wollen. Daher schreibt sich also:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R\sin^2\vartheta}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta).$$

Nimmt man $\omega^2 R/2g$ als eine neben 1 kleine Grösse an, so erkennt man, dass die eine Wurzel für $\cos\vartheta$ nahe bei $+1$, die andere nahe bei -1 liegt, und zwar die erstere kleiner als $+1$, die letztere kleiner als -1 ist; es entspricht also nur ersterer ein reeller Werth von ϑ und wir erhalten das Resultat, dass, weil $(d\vartheta/dt)^2$ positiv sein muss, ϑ stets zwischen den zwei Grenzwerthen ϑ_0 und ϑ_1 hin und her oscilliren muss; ϑ_2 bezeichnet dabei den dritten nicht reellen Wurzelwerth, dessen cosinus kleiner als -1 ist.

Wir erhalten weiter:

$$dt = \sqrt{\frac{R}{2g}} \cdot \frac{\pm \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_2)}}, \tag{64}$$

also den Zusammenhang zwischen ϑ und t durch ein elliptisches Integral gegeben. Ersetzt man hierin dt gemäss (63′) durch seinen Werth $\sin^2\vartheta\, d\varphi/\omega \sin^2\vartheta_0$, so bestimmt sich auch der Zusammenhang zwischen ϑ und φ; es ergiebt sich:

$$d\varphi = \pm\,\omega\sqrt{\frac{R}{2g}} \cdot \frac{\sin^2\vartheta_0\, d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_2)}}, \tag{64′}$$

worin nach (63‴) auch

$$\omega\sqrt{\frac{R}{2g}}\sin\vartheta_0 = \frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1}} \quad \text{ist.}$$

Das doppelte Vorzeichen bestimmt sich durch den Anfangszustand, ist dort nämlich positiv oder negativ zu wählen, jenachdem ϑ_1 grösser oder kleiner als ϑ_0 ist, ϑ also anfangs wächst oder abnimmt. Das so gewonnene bleibt bestehen bis zur Erreichung der Amplitude ϑ_1, dann verschwindet die Wurzel und wechselt das Vorzeichen; ebenso weiterhin.

Wir lassen nun eine angenährte Rechnung eintreten, indem wir festsetzen, dass in Bezug auf ϑ_0 und ϑ_1 Glieder vierter Ordnung gegen 1 vernachlässigt werden sollen. Berechnet man demgemäss die Wurzeln von (63‴), so erhält man:

$$\cos\vartheta_1 = 1 - \frac{R\omega^2}{2g}\sin^2\vartheta_0, \quad \cos\vartheta_2 = -1.$$

Sonach wird $\cos\vartheta - \cos\vartheta_2 = 2 - (1 - \cos\vartheta)$, wo das zweite Glied zweiter Ordnung in Bezug auf das erste ist; die Entwickelung der Gleichung (64) innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenze giebt das Resultat:

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \frac{\pm \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}}\left(1 + \frac{1 - \cos\vartheta}{4}\right).$$

Setzt man hierin:

$$\cos\vartheta = \xi + \frac{\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1}{2}, \quad \text{also} \quad -\sin\vartheta\, d\vartheta = d\xi,$$

so lautet das Integral:

$$t + C_2 = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}{2}\right)^2 - \xi^2}} \left(\frac{10 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}{8} - \frac{\xi}{4}\right)$$

$$= \mp \frac{1}{16}\sqrt{\frac{R}{g}} \left\{(10 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) \arcsin\left(\frac{2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)^2 - (2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1)^2}\right\}.$$

Dies bestimmt für jede Amplitude ϑ die entsprechende Zeit. Als Schwingungsdauer T (Dauer einer einfachen Schwingung) wollen wir die Zeit bezeichnen, die vom Verlassen der Amplitude ϑ_0 bis zum ersten Wiedererreichen derselben verläuft; es ist also $T/2$, wie man leicht erkennt, die Zeit bis zur Erreichung der Amplitude ϑ_1; nimmt man den obigen Ausdruck zwischen den beiden Grenzen ϑ_0 und ϑ_1, so findet sich:

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} + \sin^2\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right). \tag{65}$$

Für unendlich kleine Amplituden fällt die Formel mit der p. 63 für das ebene Pendel gegebenen zusammen.

In derselben Annäherung soll nun auch die Abhängigkeit zwischen ϑ und φ bestimmt werden. Die Formel (64') giebt hier zunächst:

$$d\varphi = \pm \frac{\sin\vartheta_0 \sin\vartheta_1}{\sqrt{(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}} \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)\sqrt{(1 + \cos\vartheta)^3 (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}}$$

und durch Entwickelung:

$$d\varphi = \pm \frac{\sin\vartheta_0 \sin\vartheta_1}{2\sqrt{2(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}} \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}} \left(1 + \frac{3}{4}(1 - \cos\vartheta)\right).$$

Setzt man wieder ein:

$$\cos\vartheta = \xi + \frac{\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1}{2},$$

so erhält man:

$$\varphi + C_2' = \mp \frac{\sin\vartheta_0 \sin\vartheta_1}{2\sqrt{2(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}} \left\{ \int \frac{d\xi}{\left(\frac{2 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}{2} - \xi\right)\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}{2}\right)^2 - \xi^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}{2}\right)^2 - \xi^2}} \right\}.$$

Die Ausführung der Integration ergiebt:

$$\varphi + C_2' = \mp \frac{\sin\vartheta_0 \sin\vartheta_1}{2\sqrt{2(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}} \left\{ \frac{-2}{\sqrt{(1-\cos\vartheta_0)(1-\cos\vartheta_1)}} \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{(1-\cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}{(1-\cos\vartheta_1)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \arcsin\left(\frac{2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}\right)\right\}.$$

Wir bestimmen den Zuwachs, den φ erleidet, während ϑ von ϑ_0 bis ϑ_1 geht; er ist identisch mit demjenigen, der stattfindet, während ϑ von ϑ_1 wieder nach ϑ_0 gelangt. Wir nennen ihn $\Phi/2$; dann ergiebt sich:

$$\Phi = \mp \frac{2\pi \cos\frac{\vartheta_0}{2} \cos\frac{\vartheta_1}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}} \left[1 + \frac{3}{2} \sin\frac{\vartheta_0}{2} \sin\frac{\vartheta_1}{2}\right].$$

Dies ist aber innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenze identisch mit

$$\Phi = \mp \pi \left(1 + \frac{3}{2} \sin\frac{\vartheta_0}{2} \sin\frac{\vartheta_1}{2}\right). \tag{65'}$$

Nach dieser Formel erreicht der Massenpunkt die ursprüngliche Amplitude ϑ_0 nicht an der dem Ausgangsort diametral gegenüberliegenden Stelle, sondern beschreibt auf diesem Wege um den tiefsten Punkt stets einen grösseren Winkel als π. Daraus folgt, dass seine Bahn keine geschlossene ist, sondern, projicirt auf die XY-Ebene, etwa in der in Fig. 9 verzeichneten Weise verläuft, entfernt ähnlich einer Ellipse, die, während sie durchlaufen wird, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihr Centrum dreht. Die Drehung verschwindet nur dann, wenn eine der Grenzamplituden ϑ_0 oder ϑ_1 gleich Null ist; und dies findet

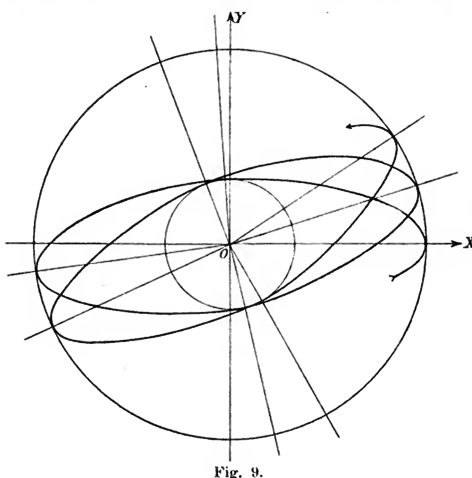


Fig. 9.

statt, wenn die Bewegung aus der Amplitude ϑ_0 ohne seitliche Anfangsgeschwindigkeit beginnt, also ω gleich Null ist.

Die hier gefundene Erscheinung hat ein gewisses practisches Interesse. Wir werden am Ende dieses Abschnittes die Theorie des sogenannten Foucault'schen Pendelversuches geben, bei welchem in Folge der Rotation der Erde die Schwingungsebene eines ebenen Pendels sich mit der Zeit scheinbar ändert. Wir sehen aber, dass auch auf ruhender Erde eine ähnliche Drehung stets dann eintreten würde, wenn das Pendel nicht genau ebene Schwingungen ausführt. Beträgt z. B. die Amplitude $\vartheta_0 = 5^0$ und findet eine seitliche Abweichung $\vartheta_1 = 1^0$ statt, so dreht sich die Schwingungscurve schon während 10 Doppelschwingungen um nahe 2 Grad. Ist auch eine so bedeutende Abweichung in der Wirklichkeit beim Foucault'schen Versuch leicht zu vermeiden, so bildet doch der besprochene Umstand bei jenen Beobachtungen, die ein stundenlanges Schwingen des Pendels benutzen, eine sehr wichtige Fehlerquelle.

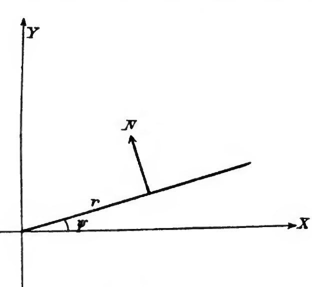


Fig. 10.

3. Um einen einfachen Fall für die Bewegung auf bewegter starrer Bahn in der Ebene zu behandeln, nehmen wir an, eine starre Linie rotire mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen ihrer Punkte und auf ihr gleite ein schwerer Massenpunkt.

Der Drehpunkt sei der Coordinatenanfang, der Winkel der Geraden gegen die X-Axe $\psi = \varkappa t$. Dann lauten die Gleichungen (60'), falls kurz $N/m = n$ gesetzt wird:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n \sin\psi, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g + n\cos\psi, \tag{66}$$
$$y\cos\psi = x\sin\psi, \quad \psi = \varkappa t.$$

Integrable Combinationen zu finden beachten wir, dass aus

$$r = x\cos\psi + y\sin\psi$$

in Verbindung mit der Gleichung der Geraden

$$0 = x\sin\psi - y\cos\psi \quad \text{folgt:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\psi + \frac{dy}{dt}\sin\psi, \qquad 0 = \frac{dx}{dt}\sin\psi - \frac{dy}{dt}\cos\psi + \varkappa r,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\psi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\psi + \varkappa^2 r, \quad 0 = \frac{d^2x}{dt^2}\sin\psi - \frac{d^2y}{dt^2}\cos\psi + 2\varkappa\frac{dr}{dt}.$$

Hiernach erhält man durch die Factoren $\cos\psi$, $\sin\psi$ und $\sin\psi$, $-\cos\psi$ folgende Combinationen:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \varkappa^2 r - g \sin \varkappa t, \quad -2\varkappa \frac{dr}{dt} = -n + g \cos \varkappa t, \tag{66'}$$

die erste zur Bestimmung von r, die zweite von n. Die erste Gleichung hat eine einfache Bedeutung; sie giebt die Beschleunigung in der Bahn gleich der Tangentialcomponente der Schwerebeschleunigung, plus der Centrifugalbeschleunigung; dies stimmt überein mit den p. 51 abgeleiteten Resultaten.

Differentiirt man die erste Formel zweimal nach t und addirt zum Resultat dieselbe mit $\varkappa^2$ multiplicirte Gleichung, so gelangt man zu:

$$\frac{d^4 r}{dt^4} = \varkappa^4 r. \tag{66''}$$

Setzt man hierin $r = e^{qt}$, so erhält man zur Bestimmung von q die Gleichung:

$$q^4 - \varkappa^4 = 0, \quad \text{d. h.} \quad (q^2 - \varkappa^2)(q^2 + \varkappa^2) = 0$$

und demgemäss vier Wurzeln $\pm\varkappa$, $\pm\varkappa\sqrt{-1}$. Hiernach ist die allgemeine Lösung der Gleichung (66''):

$$r = ae^{\varkappa t} + be^{-\varkappa t} + c \cos \varkappa t + d \sin \varkappa t.$$

Ein specieller Werth hiervon genügt auch unserer eigentlichen Gleichung ($66'_{\mathrm{I}}$), durch Einsetzen der allgemeinen Lösung bestimmt sich nämlich $c = 0$, $d = g/2\varkappa^2$; hiernach wird die vollständige — zwei Constanten enthaltende — Lösung unseres Problemes:

$$r = ae^{\varkappa t} + be^{-\varkappa t} + \frac{g}{2\varkappa^2} \sin \varkappa t. \tag{67}$$

Der Werth von n folgt durch Einfügen dieses Resultates in ($66'_{\mathrm{II}}$):

$$n = 2g \cos \varkappa t + 2\varkappa^2 (ae^{\varkappa t} - be^{-\varkappa t});$$

er hat geringeres Interesse.

Der einfachste Fall der im Vorstehenden erhaltenen Bewegung ist der, dass in Folge der Anfangsbedingungen a und b verschwindet. Dies kann dadurch erreicht werden, dass dem Massenpunkt zur Zeit $t = 0$, wo die starre Linie horizontal lag, im Drehpunkt die positive Geschwindigkeit $g/2\varkappa$ ertheilt wird, oder dass er zur Zeit $t = \pm\pi/2\varkappa$, wo die starre Linie vertical steht, in der Entfernung $\pm g/2\varkappa^2$ aus der Ruhe seine Bewegung beginnt. Er beschreibt dann eine Bahn, deren Gleichung sogleich in Polarcoordinaten gegeben ist durch

$$r = \frac{g \sin \psi}{2\varkappa^2},$$

d. h. einen Kreis vom Durchmesser $g/2\varkappa^2$, der von der Y-Axe halbirt wird und die X-Axe von oben tangirt. Der Druck $N = n \cdot m$, den in diesem Falle die Bahn ausübt, ist gleich $2mg \cos \varkappa t$, d. h. der doppelten

Normalcomponente des Gewichtes des Punktes, — ein Maximum im Drehpunkt, Null bei der grössten Elongation.

Ist durch die Anfangsbedingungen nur a zum Verschwinden gebracht, so nähert sich die Bewegung immer mehr jener Kreisform und geht nach unendlich langer Zeit in dieselbe über; ist nur b gleich Null, so entfernt sie sich je mehr und mehr davon; die bezüglichen beiden Bahnen haben übereinstimmend spiraligen Character, werden aber in entgegengesetzter Richtung — das eine Mal von aussen, das andere von innen her — durchlaufen.

Ist a und b von Null verschieden, so nähert sich die spiralige Bahn von Unendlich her dem Kreise und entfernt sich wieder in's Unendliche.

4. Ein in mehrfacher Hinsicht interessantes Beispiel für die Bewegung auf einer ihrerseits bewegten starren Oberfläche bietet das Foucault'sche Pendel, d. h. die Oscillation eines schweren Punktes in einer mit der Erde rotirenden Kugelschaale. Wir behandeln das Problem unter der Voraussetzung so kleiner Amplituden, dass deren Quadrat neben der Einheit vernachlässigt werden kann.

Die Grundgleichungen dieses Problemes folgen aus dem System (54′), wenn man darin die Kraftcomponenten Ξ, H, Z parallel dem mit der Beobachtungsstelle rotirenden Coordinatensystem zerlegt in den von der Schwere und den vom Widerstand der Kugelschaale herrührenden Theil.

Wir erhalten so, falls wieder $N/m = n$ gesetzt wird, bei Beschränkung auf gegen den Erdradius kleine Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\xi}{L}n + R\varkappa^2\cos\psi\sin\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\sin\psi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{\eta}{L}n - 2\varkappa\frac{d\xi}{dt}\sin\psi - 2\varkappa\frac{d\zeta}{dt}\cos\psi, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{\zeta}{L}n - g_0 + R\varkappa^2\cos^2\psi + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\cos\psi, \\ &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = L^2. \end{aligned} \tag{68}$$

Beschränken wir uns auf gegen L sehr kleine Elongationen, so ist ζ von L nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden. Demgemäss liefert die letzte Bewegungsgleichung:

$$n = g_0 - R\varkappa^2\cos^2\psi - 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\cos\psi,$$

und durch Einsetzen dieses Werthes in die beiden ersten, bei Beschränkung auf die erste Potenz der Amplituden, d. h. der ξ und η:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= R\varkappa^2\cos\psi\sin\psi - (g_0 - R\varkappa^2\cos^2\psi)\frac{\xi}{L} + 2\varkappa\frac{d\eta}{dt}\sin\psi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \qquad - (g_0 - R\varkappa^2\cos^2\psi)\frac{\eta}{L} - 2\varkappa\frac{d\xi}{dt}\sin\psi. \end{aligned} \tag{68′}$$

Ruhe findet nicht statt im Punkte $\xi = \eta = 0$, sondern in:

$$\xi = \frac{L R \varkappa^2 \cos\psi \sin\psi}{g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi}, \quad \eta = 0,$$

denn das Loth wird in Folge der Rotation nach Süden hin abgelenkt (vergl. hierzu p. 53). Verschiebt man das Coordinatensystem um diesen Betrag und setzt noch kurz:

$$\varkappa \sin\psi = \varkappa', \quad g_0 - R\varkappa^2 \cos^2\psi = g',$$

so gelangt man zu folgender Form der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g' \frac{\xi}{L} + 2\varkappa' \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -g' \frac{\eta}{L} - 2\varkappa' \frac{d\xi}{dt}. \tag{68''}$$

Hieraus erhält man zwei integrable Combinationen durch die Factoren $(d\xi/dt)\,dt = d\xi$, $(d\eta/dt)\,dt = d\eta$ und $-\eta$, ξ; sie lauten:

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{d\eta}{dt}\right) dt = -\frac{g'}{L}(\xi\, d\xi + \eta\, d\eta),$$

$$\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\varkappa'(\xi\, d\xi + \eta\, d\eta).$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = C - \frac{g'}{L}(\xi^2 + \eta^2),$$

$$\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = C' - \varkappa'(\xi^2 + \eta^2).$$

Führt man hier ein:

$$\xi = r\cos\varphi, \quad \eta = r\sin\varphi, \quad \text{also}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

so folgt:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - \frac{g' r^2}{L},$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C' - \varkappa' r^2. \tag{69}$$

Setzt man in diese Gleichungen:

$$\varphi + \varkappa' t = \Phi, \tag{69'}$$

so lauten dieselben:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 - 2\varkappa'\frac{d\Phi}{dt} + \varkappa'^2\right) = C - \frac{g' r^2}{L},$$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dt} = C',$$

und wenn man sie mit den Factoren 1, $2\varkappa'$ zusammenfasst, ergiebt sich:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \varkappa'^2\right) = C + 2\varkappa' C' - \frac{g' r^2}{L}.$$

$C + 2\varkappa' C'$ ist eine Constante, die in C'' abgekürzt werden mag, $\varkappa'^2$ ist in Wirklichkeit immer so klein gegen g'/L, dass es daneben vernachlässigt werden kann; demgemäss erhält man die beiden ersten Integrale in der Gestalt:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \frac{g'}{L}\right) = C'', \quad r^2\frac{d\Phi}{dt} = C'. \tag{70}$$

Sie enthalten $\varkappa'$ und damit die Rotationsgeschwindigkeit der Erde gar nicht mehr explicite, sind also der Form nach identisch mit denjenigen Gleichungen, welche sehr kleine Schwingungen in einer ruhenden Kugelschaale bestimmen; nur steht $\Phi = \varphi + \varkappa' t$ an Stelle des in jenem Falle auftretenden φ und g' an Stelle von g_0, d. h. auf rotirender Erde ist die Beschleunigung der Schwerkraft durch die Centrifugalkraft vermindert und es folgt $\varphi + \varkappa' t$ demselben Gesetz, wie auf ruhender φ.

Da der Einfluss der Centrifugalkraft auf die Grösse der Beschleunigung die Erscheinung nur quantitativ, und zwar nicht bedeutend verändert, so ist die auf rotirender Erde wahrnehmbare Bewegung im Wesentlichen zusammengesetzt aus der auf ruhender zu beobachtenden und einer gleichförmigen Drehung der Kugelschaale mit dem darauf laufenden Massenpunkte um die Z-Axe mit der Geschwindigkeit

$$-\varkappa' = -\varkappa \sin \psi.$$

In dem speciellen Falle, dass $C' = 0$ ist, sind die Schwingungen als ebene mit rotirender Pendelebene anzusehen; denn aus $d\Phi/dt = 0$ folgt $d\varphi/dt = -\varkappa'$. Da die Bedingungen des Problems am vollständigsten bei den sogenannten Fadenpendeln experimentell erreicht sind, so erhalten wir hierdurch den durch Beobachtungen von Foucault bestätigten Satz:

Die Schwingungsebene eines auf der Erde schwingenden Fadenpendels dreht sich scheinbar mit einer constanten Geschwindigkeit, welche gleich ist derjenigen der Erdrotation multiplicirt mit dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Die Richtung dieser Drehung ist auf der nördlichen Halbkugel eine negative, nämlich von Ost über Süd nach West gerichtet, auf der südlichen Halbkugel die umgekehrte.

Wir schliessen den Abschnitt mit einer Bemerkung über das Gleichgewicht eines Massenpunktes auf einer festen Oberfläche oder Curve.

Die Beschleunigung in der Bahn verschwindet und damit wird ein Verharren im Gleichgewicht möglich, wenn die äusseren Kräfte eine Resultante normal zur Oberfläche oder zur Curve geben.

Daher ist für einen Punkt auf einer festen Oberfläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

die Gleichgewichtsbedingung:

$$X : Y : Z = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z)$$

oder:

$$X : Y : Z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{71}$$

Für eine feste Curve, deren Linienelement ds die Projectionen dx, dy, dz hat, muss gelten:

$$P = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0, \tag{71'}$$

d. h. die Tangentialcomponente P der äusseren Kraft muss verschwinden.

Verschiebt man den Massenpunkt unendlich wenig aus der Position, für welche diese Bedingung erfüllt ist, so gewinnt die Tangentialcomponente einen von Null verschiedenen Werth. Das Gleichgewicht ist stabil oder labil, je nachdem diese Componente den Punkt nach der Gleichgewichtslage zurückführt oder ihn noch weiter davon entfernt; es ist indifferent, wenn dieselbe verschwindet.

§ 10. Gleitende Reibung, Luftwiderstand.

Wir haben uns im vorigen Abschnitt mit den Reactionskräften fester Oberflächen und Curven beschäftigt, welche das Eigenthümliche haben, dass ihre Richtung zwar durch die Gestalt der Oberfläche oder Curve mehr oder weniger vollständig gegeben, ihre Grösse aber abhängig ist von der Masse und der Geschwindigkeit des bewegten Massenpunktes, sowie von der Lage und Grösse der übrigen auf ihn wirkenden Kräfte. Wir können dies auch kürzer so aussprechen: die Grösse dieser Reactionskräfte ändert sich mit ihrer Inanspruchnahme und kann, je nachdem dieselbe wächst, jeden Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

In mancher Hinsicht parallel geht diesen Reactionskräften die *gleitende Reibung*, die bei jeder Bewegung auf einer materiellen Bahn in Wirklichkeit eintritt. Auf Grund der Beobachtungen legen wir ihr folgende Eigenschaften bei:

Die gleitende Reibung ist eine Kraft, deren Richtung jederzeit entgegengesetzt ist der wirklich stattfindenden oder aber nur erstrebten Bewegung, diese Richtung relativ zur Bahn gerechnet. Unter erstrebter Bewegung verstehen wir dabei, wenn in Folge der Reibung Gleichgewicht eintritt, diejenige, die *ohne Wirkung* der Reibung stattfinden würde.

Ihre Grösse ändert sich mit der Inanspruchnahme, kann aber einen gewissen Maximalwerth nicht übersteigen. Dieser Maximalwerth bestimmt sich der absoluten Grösse nach durch das Product des Normaldrucks N, welchen die Bahn seitens des Punktes

erleidet (oder gegen ihn ausübt), in einen von der Substanz des Punktes und der Bahn abhängigen Factor ν, den man den Reibungscoëfficienten für die beiden in Berührung stehenden Substanzen nennt.

Wir können daher allgemein die Grösse P_r der Reibungskraft setzen, indem wir sie positiv parallel der Richtung von $+s$ rechnen:

$$P_r = nN, \tag{72}$$

wobei $-\nu \leqq n \leqq +\nu$ sein, d. h. also der Factor n zwischen dem positiven und negativen Werth des Reibungscoëfficienten liegen muss.

Befindet sich ein Massenpunkt auf einer festen Curve in Ruhe und geben die äusseren Kräfte keine Componenten parallel der Bahn, so ist auch die Reibung gleich Null, denn es fehlt die Tendenz zur Bewegung und daher die Inanspruchnahme der Reibung. Geben die äusseren Kräfte aber eine Tangentialcomponente, so ist die Tendenz zur Bewegung und demgemäss die Widerstand leistende Reibungskraft da und es fragt sich nun, bis zu welchem Grade die letztere in Anspruch genommen ist. Die Bedingung des Gleichgewichts für einen Punkt auf einer festen Bahn ist, dass die Tangentialcomponenten aller wirkenden Kräfte sich zerstören, es muss also, wenn ΣP_h sich auf die äusseren Kräfte bezieht, die Beziehung gelten:

$$\Sigma P_h + P_r = 0.$$

Ist diese Gleichung durch ein P_r zu befriedigen, welches kleiner ist, als der besprochene Grenzwerth, so findet Gleichgewicht statt und

$$P_r = -\Sigma P_h$$

giebt dann sogleich die Grösse an, bis zu welcher die Reibung in Anspruch genommen ist.

Verlangt diese Gleichung aber ein grösseres P_r, als der angegebene Grenzwerth ist, so kann Gleichgewicht nicht bestehen; sowie der Grenzwerth von P_r überschritten wird, beginnt die Bewegung; die Reibung wirkt ihr in voller Stärke dauernd entgegen bis zum Moment der Ruhe, in welchem wieder ein kleinerer Werth eintreten kann.

Dies wird recht deutlich werden an dem einfachen Beispiel der Bewegung und Ruhe auf einer reibenden schiefen Ebene vom Neigungswinkel α gegen die Horizontale.

Wirkt die Schwere allein, so ist, falls wir s abwärts positiv zählen:

$$\Sigma P_h + P_r = mg\,(\sin\alpha + n\cos\alpha);$$

Gleichgewicht kann bestehen bleiben, wenn

$$\operatorname{tg}\alpha = -n$$

auf einen Werth n führt, der zwischen $-\nu$ und $+\nu$ fällt. Man erkennt, dass ganz unabhängig von der Masse des Punktes und der Grösse von g an der Beobachtungsstelle Gleichgewicht stattfinden wird,

so lange der Neigungswinkel α unter einem Grenzwerth ϱ bleibt, den man den Reibungswinkel nennt und der definirt ist durch die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varrho = \nu; \tag{72'}$$

für grössere Neigungswinkel ist Gleichgewicht unmöglich und es tritt Bewegung von selbst, bei kleineren nur in Folge einer Anfangsgeschwindigkeit ein.

Ehe wir diese Bewegung betrachten, wollen wir noch den Fall behandeln, dass ausser der Schwere noch eine andere Kraft K in einer Richtung, die den Winkel β mit der nach unten positiv gerechneten Normale der Bahn einschliesst, ausgeübt wird. Dann ist die Normalcomponente der äusseren Kräfte, falls man das Gewicht des Punktes $mg = G$ setzt:

$$\Sigma N_h = G \cos \alpha + K \cos \beta,$$

dagegen die Tangentialcomponente:

$$\Sigma P_h = G \sin \alpha + K \sin \beta;$$

also wird die Gleichgewichtsbedingung:

$$G \sin \alpha + K \sin \beta + n(G \cos \alpha + K \cos \beta) = 0. \tag{73}$$

Wir wollen sie verwenden zur Beantwortung der Frage: welchen grössten Werth kann K haben ohne den Massenpunkt in Bewegung zu setzen, oder auch, was dasselbe ist, welche kleinste Kraft vermag ihn in Bewegung zu setzen, — sowie der entgegengesetzten: welche kleinste Kraft vermag den Punkt, der sich von selbst bewegen würde, im Gleichgewicht zu halten.

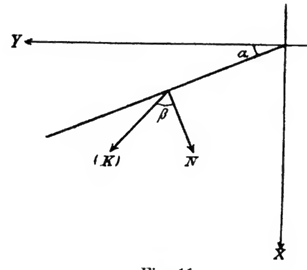


Fig. 11.

Es sind dann die beiden Fälle zu unterscheiden, dass die Bewegung nach unten oder nach oben erzielt werden soll.

I. Im ersteren Falle ist

$$n = -\nu = -\operatorname{tg} \varrho$$

zu setzen, weil der positiven erstrebten Bewegung entgegengewirkt werden soll; man erhält dann:

$$K = -G \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\sin(\beta - \varrho)}.$$

Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle.

a) Die Neigung α ist kleiner als der Reibungswinkel, daher:

$$K = +G \frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\sin(\beta - \varrho)}. \tag{73'}$$

Wir bemerken: ist $\beta = \varrho$, d. h. ist die Kraft K um den Reibungs-

winkel gegen die Normale N geneigt, so wird $K = \infty$; in dieser Richtung ausgeübt kann also keine noch so grosse Kraft den Punkt bewegen. Das hat seinen Grund darin, dass mit der tangentialen Componente von K sich auch die normale und dadurch die Reibung so steigert, dass die Wirkungen sich compensiren.

Wächst β, so nimmt K ab und erhält den kleinsten Werth $K = G \sin(\varrho - \alpha)$ für $\beta = \varrho + \pi/2$, d. h. in einer Richtung, die um den Reibungswinkel gegen die positive Bahnrichtung geneigt oberhalb liegt. In dieser Richtung wirkt also die Verminderung des Reibungswiderstandes und die Vergrösserung der treibenden Kraft am vortheilhaftesten zusammen.

Für $\beta = \varrho + \pi$ wird K abermals gleich unendlich; die Bedeutung dieser Thatsache ist dieselbe wie oben. Zu bemerken ist hierbei aber, dass das Resultat voraussetzt, die Bahn übe auch einem nach oben gerichteten Druck gegenüber ihre Reaction, sei also etwa eine geschlossene Röhre innerhalb deren der Punkt gleitet.

Im andern Falle verliert das Resultat seine Bedeutung, sowie N den Werth 0 passirt, da dann der Massenpunkt die Bahn überhaupt verlässt.

Noch grössere Werthe von β geben nichts Neues, da negative Kräfte identisch sind mit in entgegengesetzter Richtung ausgeübten positiven.

b) Die Neigung α ist grösser als der Reibungswinkel ϱ, also:

$$K = + G \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\sin(\varrho - \beta)}. \qquad (73'')$$

Der Verlauf ist ganz analog; K nimmt einen grössten Werth ∞ an für $\beta = \varrho$, seinen kleinsten $K = G \sin(\alpha - \varrho)$ für $\beta = \varrho - \pi/2$, und steigt wieder bis $K = \infty$, entsprechend $\beta = \varrho - \pi$. In diesem Falle liegt also die Richtung, in welcher mit kleinster Kraft das Gleichgewicht eben noch zu erhalten möglich ist, um den Reibungswinkel gegen die negative Bahnrichtung geneigt, aber nach unten.

II. Wir wollen ferner die Bewegung nach der negativen Seite, d. h. nach oben, erzielt werden lassen; dann ist $n = +\nu = +\operatorname{tg}\varrho$ zu setzen und wir haben:

$$K = - G \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\sin(\beta + \varrho)}. \qquad (73''')$$

Hier macht es keinen Unterschied, ob $\alpha \lesseqgtr \varrho$ ist.

Wir erhalten den grössten Werth $K = \infty$ für $\beta = -\varrho$ und $\beta = -\varrho - \pi$; in diesen Richtungen ausgeübt ergiebt also keine noch so grosse Kraft eine Bewegung aufwärts. Der kleinste Werth $K = G \sin(\alpha + \varrho)$ findet statt für $\beta = -\varrho - \pi/2$, d. h. um den Reibungswinkel gegen die negative Bahnrichtung nach oben geneigt.

Parallel der Bahn nach oben gerichtet ist zum Ueberwinden der Reibung erforderlich eine Kraft:

$$K = G\frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos\varrho},$$

abwärts galt ebenso, falls $\alpha < \varrho$ war:

$$K = G\frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\cos\varrho};$$

ist die Neigung $\alpha = 0$, so werden beide gleich:

$$K = G \operatorname{tg} \varrho = G\nu.$$

Diese Formel giebt die Theorie einer andern Methode zur Bestimmung des Reibungscoëfficienten; ν ist nämlich das Verhältniss der kleinsten Kraft, welche den Massenpunkt auf ebener Bahn in Bewegung zu setzen vermag, zu dem Gewicht desselben.

Wir wenden uns nun vom Falle des Gleichgewichts zu dem der Bewegung auf reibender schiefer Ebene. Die darauf bezügliche Gleichung ist:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha + n\cos\alpha) = \frac{g\sin(\alpha + r)}{\cos r}, \tag{74}$$

worin $n = \pm\nu$, $r = \pm\varrho$, jenachdem $ds/dt = V \gtrless 0$ ist. Es folgt sogleich:

$$V = \frac{ds}{dt} = C_1 + \frac{gt\sin(\alpha + r)}{\cos r}, \quad s = C_2 + C_1 t + \frac{gt^2\sin(\alpha + r)}{2\cos r}. \tag{74'}$$

Nehmen wir zunächst die Bewegung abwärts, also $r = -\varrho$, so erkennen wir, dass, je nachdem $\alpha \lesseqgtr \varrho$, die Bewegung gleichförmig verzögert oder beschleunigt ist. Ist $\alpha \leqq \varrho$, so tritt die Bewegung nur in Folge einer Anfangsgeschwindigkeit V_0 ein und kommt zum Stillstande, wenn $V = 0$ ist, d. h. zur Zeit:

$$T = \frac{V_0\cos\varrho}{g\sin(\varrho - \alpha)} \tag{74''}$$

und in einer Entfernung S vom Ausgangsort:

$$S = \frac{V_0^2\cos\varrho}{2g\sin(\varrho - \alpha)}. \tag{74'''}$$

Für $\alpha = \varrho$ ist die Beschleunigung gleich Null, die Bewegung geht mit der Anfangsgeschwindigkeit V_0 gleichförmig weiter.

Von selbst beginnt die Bewegung nur, falls $\alpha > \varrho$ ist. Wollte man die in diesem Falle beobachtbaren Erscheinungen zur Prüfung der Fallgesetze anwenden, so würde man zwar eine gleichförmige Beschleunigung erhalten, diese aber durch die Reibung im Verhältniss $\sin(\alpha - \varrho)/\sin\alpha\cos\varrho$ verkleinert finden. Aehnliches, wie hier für die gleitende Reibung gefunden ist, gilt für die rollende Reibung einer die schiefe Ebene hinablaufenden Kugel, gilt also auch für die Galilei'schen Fallversuche auf schiefer Ebene.

Während in den obigen Fällen die Geschwindigkeit durch die Reibung vermindert wurde, jene also verzögernd wirkte, kann, wenn die Bahn sich selbst bewegt, auch das Umgekehrte stattfinden.

Denken wir uns z. B. einen horizontalen Kreisring in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um sein Centrum versetzt und einen schweren Punkt hineingelegt, so wird auf diesen die Reibung in der Richtung der Rotation beschleunigend wirken, denn nach dem oben Gesagten wirkt sie der relativen Bewegung entgegen. Die relative Bewegung erkennen wir, wenn wir dem ganzen System eine Rotation mit der Geschwindigkeit $-\omega$ ertheilen, dann ruht der Ring, der Punkt rotirt in negativer Richtung, die Reibung muss also in positiver wirken. Der Druck gegen den Ring setzt sich zusammen aus den beiden Theilen Schwerkraft und Centrifugalkraft und ist, da die eine Componente vertical, die andere horizontal wirkt:

$$N = m\sqrt{g^2 + \frac{V^4}{R^2}};$$

es gilt demgemäss:

$$\frac{dV}{dt} = \nu\sqrt{g^2 + \frac{V^4}{R^2}}. \tag{75}$$

Dies allgemein elliptische Differential vereinfacht sich, wenn von der Schwerkraft abgesehen werden kann; dann gilt:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\nu V^2}{R}, \quad C - \frac{1}{V} = \frac{\nu t}{R}. \tag{75'}$$

Wollte man hier zur Bestimmung der Constanten die Annahme einführen, dass zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit des Punktes gleich Null ist, so erhielte man $C = \infty$, d. h. es würde V immer gleich Null bleiben. Dies ist erklärlich, denn wenn die Geschwindigkeit verschwindet, so fehlt auch die Centrifugalkraft und ist N und damit die Reibung wie auch die Beschleunigung gleich Null; um sonach hier eine Bewegung zu erhalten, muss eine — gleichviel wie kleine — Anfangsgeschwindigkeit V_0 gegeben sein. Dann ist:

$$\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V} = \frac{\nu t}{R}. \tag{75''}$$

Aber diese Gleichung gilt nicht unbegrenzt, sondern nur bis zu dem Zeitmoment, wo die Lineargeschwindigkeit des Punktes V gleich ist der Lineargeschwindigkeit des Ringes $V_1 = R\omega$; ist diese erreicht, so ist der Punkt in relativer Ruhe zum Ringe, die Reibung verschwindet plötzlich und damit die Beschleunigung; die Geschwindigkeit bleibt constant gleich V_1. Die Zeit T, die vergeht, bis der Punkt die Bewegung des Ringes theilt, ist:

$$T = \frac{R}{\nu}\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_1}\right). \tag{75'''}$$

Wie die gleitende Reibung, so ist auch der Luftwiderstand eine Kraft, welche die Eigenthümlichkeit hat, jederzeit der Bewegungsrichtung entgegengesetzt zu sein, sich also erst durch die Bewegung vollständig zu bestimmen; abweichend aber ist, dass sie der Grösse nach mit derjenigen der Geschwindigkeit variirt. Das strenge Gesetz, welches diese Abhängigkeit ausdrückt, ist noch nicht gefunden, es ist nicht unmöglich, dass sogar seine Form, nicht nur seine Constanten, von der Gestalt des bewegten Körpers abhängt; wir wollen dafür kurz schreiben:

$$(K) = F(V).$$

Um mit einem solchen unbekannten Gesetz rechnen zu können, setzt man hier, wie in vielen anderen Fällen, kleine Werthe der Unabhängigen voraus, denkt sich dann die unbekannte Function nach Potenzen derselben entwickelt, etwa in der Form:

$$(K) = F_0 + VF_1 + V^2F_2 + \cdots,$$

und beschränkt sich auf die niedrigsten Glieder der Reihe. Die Beobachtung hat in jedem einzelnen Falle zu entscheiden, wie weit man hierbei zu gehen hat, um eine bestimmte verlangte Genauigkeit der Uebereinstimmung zu erhalten.

Wir wollen uns auf die ersten beiden Glieder beschränken, d. h. die Geschwindigkeit so klein denken, dass schon das dritte Glied vernachlässigt werden kann; es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass der Factor des zweiten Gliedes, also $(dF/dV)_{V=0}$, von Null verschieden, der des dritten und der höheren nicht unendlich gross ist — singuläre Fälle, die nicht wohl in Betracht kommen. Wir führen ferner ein, dass für verschwindende Geschwindigkeit auch kein Widerstand stattfindet, eine Thatsache, die sich leicht dadurch beweist, dass ein einfaches Pendel immer dieselbe Ruhelange annimmt, von welcher Seite es auch dieselbe erreiche.

Dadurch bestimmt sich das erste Glied, nämlich $F(0)$, zu Null, und wir erhalten für den Luftwiderstand eine lineäre Function der Geschwindigkeit, geschrieben:

$$(K) = f.V,$$

worin f, die Constante des Gesetzes, für ein und denselben Massenpunkt unveränderlich, aber von einem zum andern wechselnd gedacht ist.

Die Componenten der Kraft erhalten wir daraus nach dem Vorstehenden durch Multiplication mit den negativen Richtungscosinus des Bahnelementes dx/ds, dy/ds, dz/ds; dabei bedenken wir, dass $V = ds/dt$ die Gesammtgeschwindigkeit und $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, $dz/dt = w$ die Geschwindigkeitscomponenten sind. Wirkt ausser dem

Luftwiderstande noch parallel der $-Z$-Axe die Schwere, so erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
m\frac{du}{dt} &= -fu, \\
m\frac{dv}{dt} &= -fv, \\
m\frac{dw}{dt} &= -mg - fw.
\end{aligned} \tag{76}
$$

Dieselben sind einfachster Art und integriren sich nach dem Schema (42).

Bezeichnet man mit u_0, v_0, w_0 die Werthe der Geschwindigkeiten für $t = 0$, so erhält man:

$$
u = u_0 e^{-ft/m}, \quad v = v_0 e^{-ft/m}, \quad w + \frac{gm}{f} = \left(w_0 + \frac{gm}{f}\right) e^{-ft/m}, \tag{76'}
$$

und hieraus, wenn man noch die Anfangswerthe der Coordinaten gleich x_0, y_0, z_0 setzt:

$$
\begin{aligned}
x = x_0 + \frac{mu_0}{f}\left(1 - e^{-ft/m}\right), \quad y = y_0 + \frac{mv_0}{f}\left(1 - e^{-ft/m}\right), \\
z = z_0 - \frac{gmt}{f} + \frac{m}{f}\left(w_0 + \frac{gm}{f}\right)\left(1 - e^{-ft/m}\right).
\end{aligned} \tag{76''}
$$

Aus den ersten beiden Formeln folgt $(x - x_0):(y - y_0) = u_0 : v_0$, d. h. der Punkt bleibt bei seiner Bewegung stets in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gelegten verticalen Ebene. Wählen wir dieselbe zur XZ-Ebene, d. h. setzen $v_0 = 0$, und legen wir den Coordinatenanfang in den Ausgangspunkt, d. h. setzen

$$
x_0 = y_0 = z_0 = 0,
$$

so bleibt auch v und y stets gleich Null, und wir haben nur:

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 e^{-ft/m}, \\
w &= -\frac{gm}{f} + \left(w_0 + \frac{gm}{f}\right) e^{-ft/m}, \\
x &= \frac{mu_0}{f}\left(1 - e^{-ft/m}\right), \\
z &= -\frac{gmt}{f} + \frac{m}{f}\left(w_0 + \frac{gm}{f}\right)\left(1 - e^{-ft/m}\right).
\end{aligned} \tag{76'''}
$$

Mit wachsender Zeit nähert sich die horizontale Geschwindigkeit der Grenze Null, die verticale der Grenze $-gm/f$; die ganze Bewegung verwandelt sich in einen verticalen gleichförmigen Fall. Für kugelförmige homogene Massen ist dabei f als nahezu dem Querschnitt proportional anzusehen, die Masse ist gleich dem Volumen multiplicirt mit einem Factor, der die Masse in der Volumeneinheit darstellt und die Dichtigkeit der Substanz genannt wird; wir gehen auf diese Grösse später ausführlicher ein. Das Verhältniss f/m wird also indirect pro-

portional mit Radius und mit Dichtigkeit. Daraus folgt, dass kleinere Kugeln langsamer fallen als grössere derselben Substanz, und die Geschwindigkeit mit verschwindendem Radius auch verschwindet. Daher werden die sehr kleinen Wassertröpfchen, welche den Nebel bilden, trotz der Wirkung der Schwere von der Luft scheinbar getragen.

Die Betrachtung der Exponentialgrössen zeigt ferner, dass diese definitiven Geschwindigkeiten Null und $-gm/f$ um so schneller bis auf denselben Bruchtheil erreicht werden, je kleiner Radius und Dichte ist.

Die grösste horizontale Entfernung, die in Folge der Anfangsgeschwindigkeit überhaupt zu erreichen ist, bestimmt sich $x_\infty = mu_0/f$; sie nimmt also mit wachsendem Widerstand ab, und ist — Kugeln gleicher Dichte vorausgesetzt — für die kleinsten auch am kleinsten.

Die Gleichung der Bahn ergiebt sich durch Elimination der Zeit in der Form:

$$z = \frac{x}{u_0}\left(w_0 + \frac{mg}{f}\right) + \frac{m^2 g}{f^2} l\left(1 - \frac{xf}{mu_0}\right).$$

§ 11. Lebendige Kraft, Arbeit, Potential, Energie.

Wir gehen aus von der Gleichung (29[I]), welche lautete

$$m\frac{dV}{dt} = P$$

und aussagte, dass die Componente der Beschleunigung eines Massenpunktes nach der Bahnrichtung multiplicirt mit seiner Masse gleich ist der Componente der ausgeübten Kräfte parallel der Bahn, und multipliciren sie mit der Identität

$$V dt = ds;$$

das Resultat können wir schreiben:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = P ds. \tag{77}$$

Hierin nennt man das Product $mV^2/2$ „die lebendige Kraft Ψ des Massenpunktes", das Product Pds „die von den wirkenden Kräften an dem Massenpunkt während dt geleistete Arbeit dA" und bezeichnet die Formel

$$d\Psi = dA \tag{77'}$$

als „die Gleichung der lebendigen Kraft für einen Massenpunkt". Sie lässt sich in die Worte fassen: der Zuwachs der lebendigen Kraft während dt ist gleich der in der gleichen Zeit an dem Massenpunkt geleisteten Arbeit.

Hierbei ist zu bemerken, dass die Arbeit dA im Allgemeinen sich nicht in Form eines Differentiales, d. h. der während dt stattfindenden

Aenderung einer Function von t darstellt; es ist demgemäss zur Unterscheidung von dem Differentialzeichen d der Buchstabe $đ$ gewählt worden, der nur andeuten soll, dass die bezügliche Grösse ein unendlich kleiner, während dt aufgewandter Betrag ist.

Für die Arbeit $đA$ können wir noch andere Formen erhalten; zunächst finden wir, indem wir P als die Projection der Gesammtkraft K auf die Richtung s der Bahn ausdrücken:

$$đA = K \cos(K, s)\, ds; \tag{78}$$

hierin können wir $ds.\cos(K, s)$ als die Projection des während dt zurückgelegten Wegelementes auf die Richtung der Kraft zusammenfassen in die Bezeichnung dk und haben so:

$$đA = K\, dk. \tag{78'}$$

Setzen wir ferner für $\cos(K, s)$ seinen Werth, ausgedrückt durch die Cosinus der Winkel von K und s gegen die Coordinatenaxen, nämlich:

$$\cos(K, s) = \cos(K, x)\cos(s, x) + \cos(K, y)\cos(s, y) + \cos(K, z)\cos(s, z),$$

und führen weiter die Werthe ein:

$$\cos(K, x) = X/K, \quad \cos(K, y) = Y/K, \quad \cos(K, z) = Z/K,$$
$$\cos(s, x) = dx/ds, \quad \cos(s, y) = dy/ds, \quad \cos(s, z) = dz/ds,$$

so erhalten wir auch:

$$đA = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz. \tag{78''}$$

Endlich können wir X, Y, Z noch durch die Componenten der Einzelkräfte K_h ausdrücken und schreiben:

$$đA = \sum (X_h\, dx + Y_h\, dy + Z_h\, dz). \tag{78'''}$$

Nun ist aber jeder der Ausdrücke $X dx$, $Y dy$, $Z dz$ von derselben Form wie $K dk$ in (78'); jene stellen also die Arbeiten der drei Gesammtcomponenten dar und man kann die letzten Gleichungen dahin deuten, dass die gesammte Arbeit gleich der Summe der Arbeiten der einzelnen zu einander normalen Componenten ist. Die letzte Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$đA = \sum đA_h, \tag{78''''}$$

und sagt dann das noch allgemeinere, auch direct aus (78) folgende Resultat aus, dass die gesammte Arbeit gleich ist der Summe derjenigen Einzelarbeiten, welche die, gleich viel wie gegen einander gelegenen, Einzelkräfte in der gleichen Zeit leisten. Ihr entspricht die Gestalt der Gleichung der lebendigen Kraft:

$$d\Psi = \sum đA_h. \tag{79}$$

Wendet man dieselbe auf ein endliches Zeitintervall an, indem man sie von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem andern t_2 integrirt, und be-

zeichnet die denselben entsprechenden Werthe der lebendigen Kraft mit Ψ_1 und Ψ_2, so findet sich:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} \sum d\,A_h. \tag{79'}$$

Den Sinn dieser Gleichung darzulegen, wenden wir sie auf den Fall an, dass sich ein Massenpunkt unter der Wirkung der Schwerkraft und derjenigen einer der Bewegung entgegengesetzten Widerstandskraft (des Luftwiderstandes z. B.) bewegt, welche einer Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Die Arbeit der Schwerkraft bei einer Verschiebung ds, deren Projection auf die nach oben positiv gerechnete Verticale gleich dh ist, wird nach Formel (78') gleich $-mgdh$, diejenige der Widerstandskraft gleich $-fV^i ds$ und wir haben demgemäss nach (79'):

$$\Psi_2 - \Psi_1 = -mg \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} dh - f \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} V^i ds.$$

Um die Grenzen der Integrale in Beziehung zu den Integrationsvariabeln zu setzen, wollen wir die zur Zeit t_1 resp. t_2 erreichten Höhen über einem fest angenommenen Niveau, z. B. über der Erdoberfläche, mit h_1 resp. h_2 bezeichnen und benutzen, dass $V = ds/dt$ ist; dann können wir schreiben:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = -mg \int\limits_{h_1}^{h_2} dh - f \int\limits_{t_1}^{t_2} V^{i+1} dt.$$

Die hier rechts neben einander stehenden beiden Arbeiten haben einen sehr verschiedenen Charakter.

Wir bemerken, dass die Integration des ersten Gliedes sich ausführen lässt, ohne dass wir die Bewegungsgesetze des Massenpunktes entwickelt haben; ihr Resultat, nämlich

$$-mg(h_2 - h_1)$$

ist ausser von dem Gewicht des Massenpunktes nur abhängig von seiner Höhe über der Erdoberfläche zu Anfang und Ende der Periode $(t_2 - t_1)$, und zwar nicht von ihrem absoluten Werthe, sondern nur von ihrer Differenz, aber weder von der Zeit $(t_2 - t_1)$ selbst, noch von der Bahn, welche während dieser Zeit durchlaufend ist, noch von der Geschwindigkeit, welche während dieser Zeit stattgefunden hat. Kurz gesagt ist der Werth nur von den Orten am Anfang und am Ende der Periode $(t_2 - t_1)$, aber nicht von den Zuständen in Zwischenzeiten abhängig.

Dem gegenüber ist das zweite Integral erst ausführbar, wenn das Bewegungsproblem gelöst ist und wir die Geschwindigkeit des Punktes als Function der Zeit kennen; sein Werth bestimmt sich also nicht nur durch Anfangs- und Endort, sondern auch durch die Zwischenzustände,

oder, anders ausgedrückt, durch alle die Umstände, welche auf den ganzen Verlauf der Bewegung Einfluss haben, wie die übrigen wirkenden Kräfte, die Gestalt eventueller fester Bahnen, die Anfangsgeschwindigkeiten u. dergl.

Dies tritt am deutlichsten an einem durchgeführten Beispiel hervor.

Im vorigen Abschnitt ist die Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung der Schwere und einer Widerstandskraft $(K) = f.V$ vollständig bestimmt; setzen wir also in unseren letzten Formeln $i = 1$, so können wir die beiderseitigen Resultate sogleich combiniren.

Die Arbeit des Luftwiderstandes schreibt sich dann:

$$-f\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[u_0^2+v_0^2+\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)^2\right]e^{-2ft/m}-\frac{2gm}{f}\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)e^{-ft/m}+\left(\frac{gm}{f}\right)^2\right\}dt$$

$$=m\left[\frac{1}{2}\left(u_0^2+v_0^2+\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)^2\right)e^{-2ft/m}-\frac{2gm}{f}\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)e^{-ft/m}-\frac{g^2m}{f}\,t\right]_{t_1}^{t_2};$$

und diese Formel lässt alles das vorhin allgemein Gesagte deutlich am vorliegenden speciellen Falle erkennen.

Fügt man hinzu die Arbeit der Schwere:

$$-mg(h_2-h_1)=+m\left[\frac{gm}{f}\left(w_0+\frac{mg}{f}\right)e^{-ft/m}+\frac{g^2mt}{f}\right]_{t_1}^{t_2};$$

so ergiebt sich für die Summe der einfachere Werth:

$$\Psi_2-\Psi_1=\left[\frac{m}{2}\left(u_0^2+v_0^2+\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)^2\right)e^{-2ft/m}-\frac{gm^2}{f}\left(w_0+\frac{gm}{f}\right)e^{-ft/m}\right]_{t_1}^{t_2},$$

eine Gleichung, die man in Rücksicht auf den Werth von Ψ leicht verificirt.

Gemäss der vorstehenden Erörterung unterscheiden wir die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte in zwei Gattungen oder Classen, jenachdem ihre während eines Zeitelementes geleistete Arbeit die Form eines Differentiales nach der Zeit besitzt oder nicht. Für die ersteren ist die während endlicher Zeit geleistete Arbeit nur abhängig von den Zuständen am Anfang und am Ende, für die letzteren auch von den durchlaufenen Zwischenzuständen.

Um die charakteristischen Merkmale beider Arten von Kräften zu finden, gehen wir aus von der Definition (78″):

$$dA = X dx + Y dy + Z dz$$

und fragen nach der nothwendigen Bedingung dafür, dass die rechte Seite ein vollständiges Differential nach der Zeit ist.

Wir sehen zunächst von der Annahme ab, dass die von uns betrachteten Kräfte nur die Zeit, die Coordinaten und die Geschwindigkeiten enthalten sollen und untersuchen demgemäss die allgemeinste Variation einer Function ψ, die t, x, y, z, u, v, w und auch die Differentialquotienten von u, v, w enthält, welche letztere wir durch die oberen Indices bezeichnen wollen gemäss dem Schema

$$\frac{du}{dt} = u', \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = u'' \text{ u. s. f.}$$

Wir bezeichnen, um keine Verwechselung mit den Differentiationen hervorzurufen, die Variationen zunächst durch das Zeichen δ.

Dann schreibt sich:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial u}\delta u + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial u'}\delta u' + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial u''}\delta u'' + \ldots \tag{80}$$

Wir benutzen nun, dass nach der Bedeutung von u

$$\frac{\delta(x + dx) - \delta x}{dt} = \delta u = \frac{d\,\delta x}{dt}$$

gilt, da ja die Differenz der Variationen der X-Coordinaten des Massenpunktes in zwei um dt entfernten Momenten durch die Zeit dt dividirt identisch mit der Variation der Geschwindigkeit ist, und haben demgemäss folgende identische Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial u}\delta u &= \frac{d}{dt}\left(\delta x\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) - \delta x\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u},\\
\frac{\partial\psi}{\partial u'}\delta u' &= \frac{d}{dt}\left(\delta u\frac{\partial\psi}{\partial u'}\right) - \delta u\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u'}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\delta u\frac{\partial\psi}{\partial u'}\right) - \frac{d}{dt}\left(\delta x\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u'}\right) + \delta x\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial u'},\\
\frac{\partial\psi}{\partial u''}\delta u'' &= \frac{d}{dt}\left(\delta u'\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) - \delta u'\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u''}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\delta u'\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) - \frac{d}{dt}\left(\delta u\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) + \delta u\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial u''}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\delta u'\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) - \frac{d}{dt}\left(\delta u\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) + \frac{d}{dt}\left(\delta x\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial u''}\right) - \delta x\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\psi}{\partial u''},
\end{aligned}$$

. . . .

Hiernach kann man aus (80) bilden:

$$\begin{aligned}
&\delta x\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial u'} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\psi}{\partial u''} \pm \cdots\right] + \cdots\\
&= \delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\delta t - \frac{d}{dt}\left[\delta x\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial u''} \mp \cdots\right) + \cdots\right.\\
&\qquad + \delta u\left(\frac{\partial\psi}{\partial u'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u''} \pm \cdots\right) + \cdots\\
&\qquad \left. + \delta u'\left(\frac{\partial\psi}{\partial u''} \mp \cdots\right) + \cdots\right].
\end{aligned} \tag{80'}$$

Die auf die y- und z-Coordinaten sich beziehenden Glieder sind hierin nur angedeutet. Man erkennt Folgendes.

Sind unter den Variationen δ die während der Zeit dt in Folge der wirklichen Bewegungen eintretenden Veränderungen verstanden, ist also:

$$\delta x = u\,dt, \qquad \delta u = u'\,dt, \qquad \delta u' = u''\,dt\ldots$$

und daher auch $\delta\psi = (d\psi/dt)\,dt$, so hat in (80') unter der einzigen Bedingung, dass ψ die Zeit t nicht enthält, die rechte Seite stets die Form eines Differentiales nach der Zeit und giebt bei Integration von t_1 bis t_2 einen Werth, der nur von den Zuständen in t_1 und t_2, nicht aber von zwischenliegenden abhängt.

Deutet man die Factoren von δx, δy, δz als Ausdrücke für die Kraftcomponenten und vertauscht ψ mit $-\Phi$, so gelangt man zu folgendem Resultate:

Existirt eine Function Φ der Coordinaten des Massenpunktes und beliebiger ihrer Ableitungen (das Potential im weiteren Sinne des Wortes), durch welche sich die auf jenen wirkenden Kraftcomponenten in folgender Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned}
X &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u'} + \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\Phi}{\partial u''} \mp \cdots,\\
Y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v'} + \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\Phi}{\partial v''} \mp \cdots,\\
Z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial w} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\Phi}{\partial w'} + \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\Phi}{\partial w''} \mp \cdots,
\end{aligned} \tag{80''}$$

so besitzt jederzeit die von ihnen bei der Bewegung des Massenpunktes während der Zeit dt geleistete Arbeit die Form eines vollständigen Differentiales nach der Zeit, und zwar des Differentiales von dem Ausdruck:

$$\begin{aligned}
-\Phi &+ u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial u'} \pm \cdots\right) + \cdots\\
&+ u'\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial u''} \pm \cdots\right) + \cdots\\
&+ u''\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u''} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial u'''} \pm \cdots\right) + \cdots\\
&+ \cdots.
\end{aligned} \tag{80'''}$$

Die Differenz der Werthe dieser Function für einen beliebigen Anfangs- und Endzustand giebt demgemäss direct den Werth der Arbeit an, die von jenen Kräften zu leisten ist, um den Massenpunkt von dem einen zum andern überzuführen.

Unterliegen, wie wir im Uebrigen stets vorausgesetzt haben und wieder annehmen wollen, die Kräfte der Beschränkung, dass sie nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen abhängen, so muss nach (80″) Φ die sämmtlichen Ableitungen der Coordinaten lineär enthalten und zwar die ersten in Functionen von $x, y, z,$ die höheren in Constanten multiplicirt; die letzteren würden demgemäss auf die Werthe der Kräfte gar keine Wirkungen äussern. Man kann deshalb als den allgemeinsten mit unserer Annahme verträglichen Werth des Potentiales den Ausdruck bilden:

$$\Phi = \varphi_0 + u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3,$$

worin die φ_h nur die Coordinaten enthalten; daraus folgt dann:

$$X = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + v\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right),$$

$$Y = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + w\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right).$$

$$Z = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + u\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right).$$

Wir bemerken, dass, wenn wir aus diesen Werthen die Arbeit dA berechnen, wegen $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ in dem Resultat Alles, was von den in u, v, w multiplicirten Gliedern herrührt, hinwegfällt. Indem wir diese Theile und die allein übrig bleibenden für sich betrachten, können wir folgenden Satz aussprechen:

Kraftcomponenten, welche nur von den Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, ergeben die während eines Zeitelementes dt geleistete Arbeit in Form eines Differentiales nur in den beiden Fällen, dass sie

a) ein Potential Φ besitzen, welches eine Function der Coordinaten allein ist (das Potential im engeren Sinne) und durch dasselbe gegeben sind gemäss den Beziehungen:

$$X = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{81}$$

b) den Werth der Arbeit zu Null machen, wozu nothwendig und hinreichend ist, dass die Richtung ihrer Resultante normal zu derjenigen der Verschiebung steht.

Damit ein Potential existire, ist erforderlich die Erfüllung der Bedingungen, welche sich aus den vorstehenden Gleichungen durch Elimination von Φ ergeben, nämlich:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \tag{81′}$$

damit die Resultante normal zur Bewegungsrichtung stehe, ist erforderlich, dass gelte:

$$Xu + Yv + Zw = 0. \tag{81''}$$

Wir machen auf eine wichtige Eigenschaft dieser beiden Arten von Kräften aufmerksam.

Wenden wir nämlich die Formel (79):

$$d\Psi = \sum_h dA_h = dA$$

auf einen Massenpunkt an, der ausschliesslich unter der Wirkung von Kräften der besprochenen Art steht, so lautet sie:

$$d\Psi = -\sum_h d\Phi_h = -d\Phi, \tag{82}$$

wo nun Φ_h das Potential der Einzelkraft, Φ das Gesammtpotential bezeichnet; die Kräfte, welche der Gleichung (81'') genügen, kommen natürlich darin gar nicht vor.

Diese Formel sagt aus, dass lebendige Kraft und Potential zwei physikalische Grössen sind, die unter der gemachten Voraussetzung während der Bewegung auf gegenseitige Kosten wachsen und abnehmen. Sie giebt Anlass zu der Vorstellung, dass für einen, wie gesagt, bewegten Massenpunkt die lebendige Kraft und das Potential je einen gewissen Vorrath unter sich gleichartiger und in einander verwandelbarer physikalischer Grössen repräsentiren und dass die ganze Bewegung darin besteht, dass aus dem einen Vorrath von dem Besitz in der einen Gestalt (z. B. von Potential) entnommen und dem andern in der andern Gestalt (als lebendige Kraft) zugeführt wird.

Weil nun lebendige Kraft und Potential gegenseitig in einander verwandelbar sind, so liegt es nahe, die beiden Vorräthe als Theile eines einzigen aufzufassen, nämlich ihre Summe

$$\Psi + \Phi = E \tag{82'}$$

als eine neue physikalische Grösse einzuführen. Man nennt sie die Energie des Massenpunktes unter der Wirkung der gegebenen Kräfte und bezeichnet die beiden Theile Ψ und Φ als Bewegungs- und Kraft- oder kinetische und potentielle Energie. Es gilt nach (82) dann die Gleichung:

$$dE = 0; \tag{82''}$$

sie sagt aus, dass für einen, wie angenommen, bewegten Massenpunkt die Energie ihre Grösse unverändert beibehält. Hieraus folgt unter anderem, dass die lebendige Kraft denselben Werth wieder annimmt, wenn das gleiche von dem Potential gilt, z. B. jederzeit bei Wiedererreichung desselben Ortes.

Die Kräfte, unter deren alleiniger Wirkung ein Massenpunkt eine Bewegung annimmt, für welche diese Gleichung gilt, nennen wir conservative Kräfte; es sind dies also nach dem Früheren, so lange wir eine Abhängigkeit von dem zweiten und höheren Differentialquotienten der Coordinaten ausschliessen, nur diejenigen Kräfte, für welche ein Potential existirt, und diejenigen, welche normal zur Bewegungsrichtung wirken.

Die letzteren haben geringere Bedeutung — von ihnen kommen fast nur die Einwirkungen fester Bahnen in Betracht; die ersteren aber sind von der allergrössten Wichtigkeit. Wir wenden uns jetzt ihrer Betrachtung zu.

Das Potential Φ ist nach dem Früheren eine Function der Coordinaten allein, welche definirt ist durch die Beziehungen:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Die Grösse der resultirenden Kraft bestimmt sich durch

$$K^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2, \tag{83}$$

wofür wir kurz setzen wollen $= \Theta^2(\Phi)$; ihre Richtung durch

$$\begin{aligned} \cos(k, x) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big/ \Theta(\Phi), \\ \cos(k, y) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big/ \Theta(\Phi), \\ \cos(k, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big/ \Theta(\Phi). \end{aligned} \tag{83'}$$

Die Kraftcomponente S nach einer beliebigen Richtung s ist gegeben durch

$$S = K\cos(K, s) = X\cos(s, x) + Y\cos(s, y) + Z\cos(s, z);$$

bezeichnet man die Projectionen der auf der Richtung von s aufgetragenen unendlich kleinen Länge ds mit dx, dy, dz, so ergiebt sich:

$$S = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

und nach Einsetzen der Werthe von X, Y, Z:

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \tag{83''}$$

wenn man unter diesem Symbol die Aenderung von Φ beim Fortschreiten längs der Richtung s, bezogen auf die Längeneinheit, versteht.

Man kann demnach das Potential auch definiren als diejenige Function des Ortes, deren negativer Differential-

quotient nach einer beliebigen Richtung die Kraftcomponente nach dieser Richtung angiebt.

Da das Potential Φ nur die Coordinaten enthält, so stellt, unter C eine Constante verstanden, die Gleichung

$$\Phi = C$$

eine Oberfläche dar, nämlich den Inbegriff aller Punkte, in denen das Potential denselben Werth C annimmt; man nennt sie eine *Potentialfläche*. Da das Potential nur durch die gegebenen Werthe seiner partiellen Differentialquotienten definirt ist, so ist es auch nur bis auf eine additive Constante bestimmt, über die man ein für alle Male willkürlich verfügt denkt; ist dies geschehen, dann hat die Formel $\Phi = C$ einen vollständig klaren Sinn.

Lässt man C von $-\infty$ bis $+\infty$ alle möglichen Werthe annehmen, so wird man ein System von unendlich vielen Potentialflächen erhalten, welche den ganzen Raum erfüllen, sodass, wenn Φ eine eindeutige Function ist, durch jeden Punkt eine und nur eine hindurchgeht. Dieses System von Flächen bietet Hülfsmittel, um das Gesetz der Kraftvertheilung anschaulich darzustellen.

Zunächst giebt es die *Richtung* der wirkenden Kraft für jede Stelle an; denn construirt man an einer beliebigen Stelle x, y, z die Normale n auf der hindurchgehenden Potentialfläche von grösseren zu kleineren Potentialwerthen hin positiv gerechnet, so ist deren Richtung bestimmt durch:

$$\cos(n, x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big/ \Theta(\Phi),$$

$$\cos(n, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big/ \Theta(\Phi),$$

$$\cos(n, z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big/ \Theta(\Phi);$$

vergleicht man dies aber mit der Gleichung (83′), so erkennt man den Satz:

An jeder Stelle fällt die resultirende Kraft der Richtung nach zusammen mit der von grösseren zu kleineren Potentialwerthen gerichteten Normale auf der hindurchgehenden Potentialfläche.

Die senkrechten Trajectorien des Systems von Potentialflächen, welche hiernach an jeder Stelle durch die Richtung ihrer Tangente die Richtung der ebenda wirkenden Kraft angeben, heissen demgemäss *Kraftlinien*. Ihre Differentialgleichungen sind:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Ferner geben die Potentialflächen auch die Grösse der Kraft; denn nach dem eben Gefundenen können wir den Werth der resultirenden Kraft schreiben:

$$K = -\frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

die Normale n, wie gesagt, gerechnet; die Kraft ist also indirect proportional mit der Länge dn, um welche auf der Richtung der Normalen fortzuschreiten ist, um eine gegebene unendlich kleine Aenderung des Potentiales zu erhalten. Oder, anders ausgesprochen:

Construirt man das ganze unendliche System der Potentialflächen für Werthe der Constanten, die sich um denselben unendlich kleinen Betrag δC unterscheiden, so giebt an jeder Stelle die Länge des Normalenelementes zwischen den beiden benachbarten Potentialflächen durch seinen reciproken Werth das Maass für die Grösse der ebenda wirkenden Kraft.

Punkte, in welchen $\partial \Phi / \partial x$, $\partial \Phi / \partial y$, $\partial \Phi / \partial z$ verschwinden, sind Stellen grösster oder kleinster Potentialwerthe; in ihnen verschwinden nach der Definition des Potentiales zugleich die Kraftcomponenten, jene Punkte sind also Gleichgewichtslagen für einen nur unter der Wirkung des Potentiales stehenden Massenpunkt. Bedenkt man, dass die resultirende Kraft immer von grösseren zu kleineren Potentialwerthen gerichtet ist, und dass ein Gleichgewichtszustand stabil oder labil ist, je nachdem der Massenpunkt bei einer unendlich kleinen Verschiebung durch die entstehende Kraft zurück- oder hinweggeführt wird, so erkennt man die Gültigkeit des Satzes:

Für einen nur unter der Wirkung eines Potentiales stehenden Massenpunkt sind die Orte stabilen oder labilen Gleichgewichtes durch die Punkte kleinster oder grösster Potentialwerthe gegeben.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass Arbeit, lebendige Kraft, Potential und Energie dieselben Dimensionen besitzen; es ist nämlich:

$$[A] = [\Psi] = [\Phi] = [E] = [ml^2t^{-2}].$$

§ 12. Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung eines ruhenden Attractionscentrums.

Unter einer Centralkraft versteht man im Allgemeinen eine Kraft, die von einem bestimmten Punkt, dem Attractionscentrum, ausgeht; sie wird meist hervorgebracht durch eine in demselben befindliche Masse, verschwindet nämlich, wenn man letztere beseitigt, und wechselt, wenn man sie verschiebt oder verändert. Specieller aber und ge-

wöhnlicher versteht man darunter eine Kraft, die in der Richtung der Verbindungslinie des Massenpunktes mit dem Attractionscentrum wirkt, und deren Grösse nur eine Function ihrer Entfernung ist. Die Verhältnisse der Bewegung eines Massenpunktes werden besonders einfach, wenn nur ein Attractionscentrum vorhanden ist und dasselbe seinen Ort nicht ändert — der Fall, auf welchen wir uns nach der Ueberschrift zunächst beschränken —; es lässt sich nachweisen, dass in diesem Falle stets ein Potential für die wirkende Kraft existirt, und das Problem erscheint daher als ein einfaches Beispiel zu den allgemeinen Entwickelungen des vorigen Abschnittes.

Liegt der Coordinatenanfang in dem ruhenden Attractionscentrum und befindet sich der Massenpunkt an der Stelle x, y, z, so ist die Entfernung r der beiden gegeben durch:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Da die Kraft in der Richtung von r liegen soll, so folgt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = -K\frac{x}{r}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y = -K\frac{y}{r}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z = -K\frac{z}{r}; \quad (84)$$

dabei ist dem K, das ursprünglich als absolute Grösse betrachtet wird, das positive oder negative Vorzeichen zu geben, wenn man mit einer Formel die beiden Fälle umfassen will, dass die Wirkung in einer Anziehung oder einer Abstossung besteht.

Wir bemerken nun, dass

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

also

$$X = -K\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad Y = -K\frac{\partial r}{\partial y}, \qquad Z = -K\frac{\partial r}{\partial z}$$

ist; K als Function von r allein lässt sich auch schreiben:

$$K = \frac{d}{dr}\int K\,dr = +\frac{d\Phi}{dr}, \qquad (84')$$

und daher ist:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

D. h. eine Kraft, welche überall nach einem festen Punkt hin gerichtet und nur eine Function der Entfernung r von demselben ist, besitzt stets ein Potential Φ; sein Werth ist

$$\Phi = \int K\,dr + C. \qquad (84'')$$

Nach dem im vorigen Paragraphen Erörterten ist daher für Centralkräfte der betrachteten Art eine integrable Combination der Bewegungsgleichungen ganz allgemein angebbar, nämlich die Formel $dE = d(\Psi + \Phi) = 0$, welche durch Integration liefert:

$$E = \Psi + \Phi = c_1. \qquad (84''')$$

Es ist nun eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Kräfte, dass auch die übrigen zur vollständigen Lösung des Bewegungsproblems erforderlichen integrabeln Combinationen für dieselben ganz allgemein aufzustellen sind.

Die eine erhalten wir durch die Anwendung des Satzes, dass die Kraft stets in der Osculationsebene der Bahn liegt; denn aus ihm folgt ohne alle Rechnung durch die einfache Anschauung, dass der bewegte Massenpunkt stets in der Ebene bleiben muss, welche Attractionscentrum, Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes enthält. Man braucht, um dies einzusehen, nur von Zeitelement zu Zeitelement fortzuschreiten und zu bedenken, dass die Ebene durch zwei benachbarte Bahnelemente stets das Attractionscentrum enthalten muss. Die Gleichung der Bahnebene ist als ein zweites Integral unserer Gleichungen anzusehen.

Lassen wir die XY-Ebene mit der Ebene der Bahn zusammenfallen, so ist jetzt nur noch eine integrable Combination der Bewegungsgleichungen aufzusuchen. Diese letzteren lauten:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\frac{x}{r}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -K\frac{y}{r}, \quad \text{wo nun } r^2 = x^2 + y^2 \text{ ist;}$$

multiplicirt man sie resp. mit y und x und subtrahirt, so erhält man:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (85)$$

und diese Formel hat die Gestalt eines Differentialquotienten nach der Zeit, denn sie ist identisch mit:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0. \qquad (85')$$

Fig. 12.

Letztere Gleichung hat eine einfache Bedeutung; x, y und $x + dx$, $y + dy$ sind die Orte des Massenpunktes zur Zeit t und $t + dt$; $(x\,dy - y\,dx)/2$ ist die in der Figur 12 schraffirte Fläche, die vom Radiusvector nach dem Attractionscentrum in der Zeit dt bestrichen wird; durch dt dividirt, ist sie die Flächen-

geschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher die von der Bahn, einem festen und dem mit dem Massenpunkt fortrückenden Radiusvector begrenzte Fläche mit der Zeit wächst. Nennen wir diese Flächengeschwindigkeit Ω, so ist die obige Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0; \quad \text{sie giebt integrirt} \quad \Omega = c_2 \tag{85''}$$

und sagt aus, dass bei den betrachteten Centralbewegungen die Flächenbeschleunigung gleich Null, die Flächengeschwindigkeit also constant ist; man bezeichnet diese Gleichung als den Flächensatz. In anderer Fassung lässt er sich so geben:

Bei Centralbewegungen der vorausgesetzten Art bestreicht für einen und denselben bewegten Massenpunkt der Radiusvector nach dem Attractionscentrum in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Hieraus fliesst eine einfache und anschauliche Folgerung. Ist ds in der Figur 12 der während dt zurückgelegte Weg, l das Loth vom Attractionscentrum auf die Richtung von ds, so ist nach dem Satz $l\,ds/dt$ für alle Stellen derselben Bahn eine Constante. Da nun $ds/dt = V$, d. h. gleich der Geschwindigkeit ist, so ergiebt sich der Satz:

Bei jeder Centralbewegung der betrachteten Art ist längs derselben Bahn die Geschwindigkeit indirect proportional der Länge des Lothes vom Attractionscentrum auf die Tangente der Bahncurve in der betrachteten Stelle.

Wir sind also zu dem Resultat gekommen, dass für die Bewegung eines Punktes unter der Wirkung einer nach einem festen Centrum gerichteten, nur von der Entfernung abhängigen Kraft die ersten Integrale durch die Gleichung der lebendigen Kraft oder der Energie und den Flächensatz gegeben sind und lauten:

$$\Psi + \Phi = c_1, \qquad \Omega = c_2.$$

Um zu den zweiten Integralen fortzuschreiten, führen wir Polarcoordinaten r und φ mit dem Attractionscentrum als Pol, gemäss Figur 12, ein und haben dann:

$$\Psi = m\frac{V^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right),$$

$$\Omega = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \Phi = \int K\,dr;$$

in der letzten Gleichung ist die willkürliche Constante C gleich Null gesetzt, da sie sich nach (84″) doch nur mit der Integrationsconstante c_1 verbindet.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir für die beiden ersten Integrale die Form:

$$\begin{aligned} m\frac{(r^2 d\varphi^2 + dr^2)}{2\,dt^2} + \int K\,dr &= c_1, \\ \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} &= c_2. \end{aligned} \tag{85‴}$$

Nach der letzteren Gleichung lässt sich dt durch r und $d\varphi$ ausdrücken und dieser Werth in die erste einsetzen; man erhält dadurch:

$$2mc_2^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right) + \int K\,dr = c_1. \tag{86}$$

Diese Formel zeigt, dass stets, wenn $dr/d\varphi$, d. h. die Bahn eines Massenpunktes in Bezug auf das Attractionscentrum gegeben ist, das Potential der Centralkraft $\Phi = \int K dr$ und daraus auch die Centralkraft $K = d\Phi/dr$ berechnet werden kann. Es ist bemerkenswerth, dass hierzu eine Kenntniss der Geschwindigkeitsverhältnisse, welche sonst zur Bestimmung der Kraft nöthig ist, nicht erfordert wird.

Aufgelöst nach $d\varphi$ giebt die letzte Gleichung:

$$\frac{\pm\,dr}{r^2\sqrt{\dfrac{c_1 - \int K dr}{2mc_2^2} - \dfrac{1}{r^2}}} = d\varphi. \tag{86′}$$

Das Vorzeichen bestimmt sich durch den Anfangszustand und wechselt, wenn die Wurzelgrösse durch Null hindurchgeht. Die erhaltene Formel ist von der Zeit frei, giebt also die Gleichung der Bahn und ist stets, sei es in geschlossener Form, sei es durch eine Reihe, integrabel, wenn die Kraft K gegeben ist.

Den Ort in der Bahn bestimmt eine Gleichung, die aus der vorstehenden folgt, wenn man darin $d\varphi$ durch dt ausdrückt; laut der Beziehung $r^2 d\varphi = 2c_2 dt$ erhält man:

$$\frac{\pm\,dr}{\sqrt{\dfrac{c_1 - \int K dr}{2mc_2^2} - \dfrac{1}{r^2}}} = 2c_2\,dt. \tag{86″}$$

Auch diese Formel ist in direct integrabler Form erhalten, das Bewegungsproblem also allgemein vollständig gelöst bis auf die Ausrechnung, welche die Kenntniss des Gesetzes der Kraft K verlangt.

Wir wollen dieselbe durchführen für eine anziehende Kraft K,

welche indirect proportional wirkt mit dem Quadrat der Entfernung. Aus dem Werthe

$$K = + \frac{k}{r^2}$$

folgt unter Vernachlässigung der additiven Constanten das Potential

$$\Phi = + \int K dr = + k \int \frac{dr}{r^2} = - \frac{k}{r},$$

und die ersten Integralgleichungen lauten:

$$m \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{2dt^2} - \frac{k}{r} = c_1, \quad \frac{r^2 d\varphi}{2dt} = c_2. \tag{87}$$

Wir bestimmen die Constanten, indem wir zur Zeit $t = 0$ den Radiusvector gleich r_0, die Anfangsgeschwindigkeit gleich V_0 und ihre Richtung normal zu r_0 annehmen; es ist dann $(dr/dt)_{t=0} = 0$ und $V_0 = r_0 \omega_0$, falls ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $(d\varphi/dt)_{t=0}$ bezeichnet. Wir haben demgemäss:

$$\frac{m}{2} r_0^2 \omega_0^2 - \frac{k}{r_0} = c_1, \quad \frac{r_0^2 \omega_0}{2} = c_2$$

und falls wir dies einsetzen in (86'):

$$\frac{\pm dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2k}{m r_0^4 \omega_0^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}} = d\varphi. \tag{87'}$$

Setzt man $1/r = \varrho$, $1/r_0 = \varrho_0$, so giebt dies auch:

$$\frac{\mp d\varrho}{\sqrt{(\varrho_0 - \varrho)\left(\varrho + \varrho_0 - \frac{2k\varrho_0^4}{m\omega_0^2}\right)}} = d\varphi.$$

Die Formel zeigt, dass $d\varphi/d\varrho$ ausser für $\varrho = \varrho_0$ auch noch verschwindet für

$$\varrho = \frac{2k\varrho_0^4}{m\omega_0^2} - \varrho_0 = \varrho_1,$$

und ϱ immer zwischen ϱ_0 und ϱ_1 liegen muss.

Wir können demgemäss schreiben:

$$\frac{\mp d\varrho}{\sqrt{(\varrho_0 - \varrho)(\varrho - \varrho_1)}} = d\varphi$$

und erhalten hieraus leicht:

$$\arccos\left(\frac{\varrho - \frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2}}{\frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2}}\right) = c \pm \varphi,$$

also $$\varrho - \frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2} = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2} \cos(c \pm \varphi).$$

Ist für $\varphi = 0$ $\varrho = \varrho_0$, so wird $c = 0$ und wir haben nach Wiedereinführen von r:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi$$

oder

$$r = \frac{\frac{2 r_0 r_1}{r_0 + r_1}}{1 + \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}\cos\varphi}. \tag{87''}$$

Hierin ist
$$\frac{1}{r_1} = \frac{2k}{m r_0^4 \omega_0^2} - \frac{1}{r_0}.$$

Die Bahncurve ist also ein Kegelschnitt bezogen auf einen Brennpunkt als Pol, denn ihre Gleichung stimmt mit der hierfür gültigen

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

überein, in welcher p der Parameter $= 2r_0 r_1/(r_1 + r_0)$, e die numerische Excentricität $= (r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)$ ist. Die Halbaxen a und b parallel und normal zur Richtung $\varphi = 0$ haben, da $p = b^2/a$, $e = \varepsilon/a = \sqrt{(a^2 - b^2)}/a$ ist, die Grössen:

$$a = \frac{r_0 + r_1}{2}, \qquad b = \sqrt{r_1 r_0}.$$

Die Bahn ist für den Fall der Anziehung, d. h. für $k > 0$, eine Hyperbel, wenn $\infty > e > +1$ ist, eine Parabel, wenn $e = \pm 1$, eine Ellipse, wenn $+1 > e > -1$, ein Kreis, wenn $e = 0$, abermals eine Hyperbel, wenn $-1 > e > -\infty$. Setzt man den Werth von r_1 in e ein und bildet:

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} = \frac{m r_0 \omega_0^2 - \frac{k}{r_0^2}}{\frac{k}{r_0^2}}, \tag{88}$$

so erkennt man, dass dasselbe sich durch die Grösse der Centralkraft k/r_0^2 und der Centrifugalkraft $m r_0 \omega_0^2$ für den Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt. Die Halbaxen drücken sich in denselben Grössen so aus:

$$a = r_0 \frac{\frac{k}{r_0^2}}{\frac{2k}{r_0^2} - m\omega_0^2 r_0}, \qquad b^2 = r_0^2 \frac{m\omega_0^2 r_0}{\frac{2k}{r_0^2} - m\omega_0^2 r_0}. \tag{88'}$$

Die Bahn ist ein Kreis, wenn beide gleich sind, eine Parabel, wenn die Centrifugalkraft das Doppelte der Attraction ist, eine Hyperbel oder Ellipse, wenn sie mehr oder weniger als das Doppelte beträgt. Für den Fall der Abstossung, d. h. für $k < 0$, erhält man stets Hyperbeln.

Den Ort in der Bahn können wir bei der Einfachheit des gefundenen Resultates leicht bestimmen, ohne auf die Gleichung (86″) zurückzugehen.

Aus $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ und $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r_0^2\omega_0$

bestimmt sich sogleich:

$$\frac{p^2\, d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = r_0^2\omega_0\, dt. \tag{89}$$

Die Rechnung wird besonders einfach, wenn man statt des Winkels φ (der wahren Anomalie) nach der Figur 13 den Winkel u (die excentrische Anomalie), statt e (der numerischen) ε (die lineäre Excentricität) einführt.

Es ist nach der Kegelschnittsgleichung:

$$r = p - er\cos\varphi,$$

zugleich auch $p = b^2/a$, $e = \varepsilon/a$, $r\cos\varphi = a\cos u - \varepsilon$; daraus folgt aber:

$$r = a - \varepsilon\cos u,$$

also auch

$$\frac{p}{1 + e\cos\varphi} = a - \varepsilon\cos u.$$

Fig. 13.

Dies giebt differentiirt:

$$\frac{p e \sin\varphi\, d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = \varepsilon\sin u\, du;$$

nach der Figur ist aber $r\sin\varphi = b\sin u$, also wird:

$$\frac{p^2\, d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = r\, b\, du$$

und daher unsere Gleichung (89) zu

$$b\, du\,(a - \varepsilon\cos u) = r_0^2\omega_0\, dt.$$

Die Integration ergiebt:

$$b\,(au - \varepsilon\sin u) = r_0^2\omega_0 t + C.$$

Während eines ganzen Umganges wächst u um 2π, die Umlaufszeit findet sich daher:

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0^2\omega_0}, \tag{89'}$$

oder, da nach (88′) $b^2 = am\omega_0^2 r_0^4/k$ ist, auch:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{k}}. \tag{89''}$$

7*

Für denselben Massenpunkt verhalten sich demnach bei verschiedenen Anfangszuständen die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der grossen Axen. Dasselbe gilt bei verschiedenen Massenpunkten, wenn die Attraction, die von dem Coordinatenanfang ausgehend angenommen ist, ihren Massen proportional wirkt, also k den Factor m enthält.

Wir wenden uns jetzt wieder zu einer allgemeinen Untersuchung und stellen uns die Aufgabe, zu entscheiden, welche von allen Attractionsgesetzen, deren Potential durch eine rationale Function der Entfernung gegeben ist, unter allen Umständen Bewegungen in geschlossenen Bahnen verursachen, d. h. welche bei beliebigem Anfangszustand den Massenpunkt stets nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um das Attractionscentrum in die frühere Bahn zurückleiten. Nach dieser Fassung der Aufgabe erscheint eine Hyperbel, obgleich in's Unendliche verlaufend, als geschlossene Curve, die Epicycloide, obgleich ganz im Endlichen liegend, als im Allgemeinen nicht geschlossen. Besitzt die Bahncurve mehrere Zweige, so verlangt unsere Aufgabe, dass jeder von ihnen geschlossen sei. Die Differentialgleichung der Bahncurve haben wir in der Form aufgestellt (86):

$$2mc_2^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right)+\int K\,dr = c_1$$

und bringen sie, indem wir den Werth des Potentiales wieder mit Φ bezeichnen und die Constante $2mc_2^2$ in c' abkürzen, in die einfachere Gestalt:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{c'}\left(r^2(c_1-\Phi)-c'\right). \tag{90}$$

Φ ist hierin eine rationale Function des Radiusvectors r allein. Auf der linken Seite steht das Quadrat der Tangente des Winkels zwischen dem Linienelement ds und dem Element des Kreisbogens vom Radius r oder der Cotangente des Winkels χ zwischen ds und dr. Dieser Winkel ist nach der Formel (90) ausschliesslich von r abhängig und bei einer und derselben Bahn kann niemals in derselben Entfernung vom Attractionscentrum der Winkel der Bahn mit dem Radins verschieden sein.

Hieraus folgt auch, dass der vom Massenpunkt durchlaufene Zweig der Bahn für alle Attractionsgesetze, welche im Endlichen nirgends verschwinden, nur ein Maximum (r_1) und ein Minimum (r_0) des Radius besitzen kann; denn gäbe es noch ein drittes (r_2), so müsste,



um dieses zu erreichen, eine der Entfernungen r_0 oder r_1 unter einem andern Winkel als $\chi = \pi/2$ passirt werden, oder es müsste in derselben ein Wendepunkt liegen. Ersteres ist mit der obigen Gleichung nicht verträglich, letzteres widerspricht dem Gesetz für die Normalcomponente der wirkenden Kraft (29^{II}):

$$N = \frac{mV^2}{\varrho},$$

welche für unendlichen Krümmungsradius verschwindet.

Es ist daher längs des durchlaufenen Zweiges der Bahn nur ein Maximum und ein Minimum für r möglich, die allerdings bei einem Umlauf öfter erreicht werden können. Da die Richtung der Bahn gegen die des Radiusvector nur von der Länge des Letzteren abhängt, so folgt daraus, dass die ganze Bahn aus der Aneinanderreihung congruenter, zwischen dem grössten und dem kleinsten Radiusvector verlaufender Stücke besteht; ist die Bahn geschlossen, so muss nach einer endlichen Anzahl von dergleichen ein schon früher durchlaufenes sich wieder anschliessen, d. h. es muss der Winkel $\bar{\varphi}$ zwischen der Richtung des grössten und kleinsten Radiusvectors ein rationaler Bruchtheil von π sein.

Die Längen des grössten und kleinsten Radiusvectors r_0 und r_1 sind nach dem Obigen reelle Wurzeln der Gleichung:

$$r^2 (c_1 - \Phi) - c' = 0. \tag{90'}$$

Hierbei liegen zwei Möglichkeiten vor, insofern die Wurzeln $+ r_0$ und $+ r_1$ oder $\pm r_0$ und $\pm r_1$ sein können; im ersteren Falle genügt $- r_0$, $- r_1$ der Gleichung nicht und hieraus ist zu schliessen, dass die Bahncurve keinen Mittelpunkt besitzt, oder wenigstens das Attractionscentrum denselben nicht einnimmt. Genügt hingegen $\pm r_0$, $\pm r_1$, so hat die Curve ihren Mittelpunkt im Attractionscentrum.

Nehmen wir zunächst den letzten Fall vor, so kann man Gleichung (90) schreiben:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2(c_1 - \Phi)}{c'} - 1 = \frac{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)\,P}{r_1^2 r_0^2}, \tag{90''}$$

wo P nun eine rationale Function von r ist, die für $r_0 \lesseqgtr r \lesseqgtr r_1$ nicht verschwinden kann und ihrer Dimension nach eine reine Zahl sein muss. Hieraus folgt:

$$\frac{r_0 r_1\, dr}{r\sqrt{P(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} = \pm\, d\varphi.$$

Integrirt man dies zwischen r_0 und r_1, so erhält man rechts den Winkel $\bar{\varphi}$, der zwischen der Richtung des kleinsten und grössten Radiusvectors liegt. Dieser Winkel kann nicht von r_0 und r_1 abhängig sein, wenn die Bahn eine geschlossene ist; denn er müsste sich dann bei stetiger Aenderung der r_0 und r_1 selbst stetig ändern und könnte sonach nicht immer ein rationaler Theil von π sein.

Die nothwendige Bedingung für die Existenz stets geschlossener Bahnen ist also, dass:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{r_0 r_1\, dr}{r\sqrt{P(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} = \pm \bar{\varphi}$$

unabhängig von r_0 und r_1 ist. Wir schaffen diese Grössen aus den Integrationsgrenzen fort, indem wir setzen:

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2}\varrho^2}}, \qquad \text{also} \qquad dr = \frac{r_0\left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2}\right)\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2}\varrho^2}^{\,3}};$$

Hierdurch wird unser Integral:

$$\int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{P(1-\varrho^2)}} = \pm \bar{\varphi}.$$

Damit dieser Werth von r_0 und r_1 frei sei, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die rationale Function P von r_0 und r_1 frei ist.

Die Bedingung hierfür ist, dass $\partial P/\partial r_0$ und $\partial P/\partial r_1$ verschwindet für jeden Werth von r oder ϱ. Nun kann P schon von Anfang an diese Grössen enthalten, ausserdem sind sie durch die Substitution hineingekommen; demgemäss muss gelten:

$$\frac{\partial P}{\partial r_0} + \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_0} = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial r_1} + \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_1} = 0.$$

Nun bemerke man, dass

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{r}{r_0}\frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 - r_0^2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{r r_1}{r_0^2}\frac{r^2 - r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \qquad \text{ist},$$

so erkennt man, dass für eine rationale Function P die obigen Bedingungen für beliebige Werthe r unmöglich zu erfüllen sind, da das erste Glied in Bezug auf r von einem andern Grade (nämlich mindestens um zwei niedriger) wird, als das zweite; es muss also P in Bezug auf r constant und da aus $\partial P/\partial r = 0$ auch $\partial P/\partial r_0$ und $\partial P/\partial r_1 = 0$ folgt, auch von allem Anfang frei von r_0 und r_1 sein.

In der That folgt letzteres auch direct aus (90), denn ist P constant, so muss es hiernach gleich Eins sein; zugleich findet sich das Potential Φ als vom zweiten Grade in Bezug auf r.

Wir erhalten sonach das erste Resultat:

Geschlossene Bahncurven mit einem Mittelpunkt im Attractionscentrum giebt stets unter allen Potentialen, welche durch rationale Functionen von r dargestellt sind, nur dasjenige von der Form $\Phi = \pm c r^2$, welchem eine Kraft entspricht, die proportional mit der Entfernung wirkt; der Winkel zwischen dem grössten und dem kleinsten Radiusvector der Bahn ist gegeben durch:

$$\bar{\varphi} = \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Wir wenden uns nun zu dem andern Falle, dass die Gleichung (90′) nur die beiden Wurzeln $+r_0$ und $+r_1$ besitzt, und schreiben demgemäss die Formel (90):

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2(c_1 - \Phi)}{c'} - 1 = \frac{(r-r_0)(r_1-r)P}{r_0 r_1},$$

wo abermals P eine rationale Function von r ist, die für $r_0 \lesseqgtr r \lesseqgtr r_1$ weder Null noch unendlich wird und ihrer Dimension nach eine reine Zahl ist.

Es folgt:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{r_0 r_1}\, dr}{r\sqrt{P(r-r_0)(r_1-r_0)}} = \pm \bar{\varphi}$$

als der Winkel zwischen dem grössten und kleinsten Radiusvector, welcher von r_0 und r_1 unabhängig sein soll.

Setzt man hierin, um r_0 und r_1 aus den Grenzen fortzuschaffen,

$$r = \frac{2 r_0 r_1}{(r_0 + r_1) + \varrho(r_0 - r_1)}, \qquad \text{also} \qquad dr = \frac{-2 r_0 r_1 (r_0 - r_1)\, d\varrho}{\left((r_0 + r_1) + \varrho(r_0 - r_1)\right)^2},$$

so resultirt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\varrho}{\sqrt{P(1-\varrho^2)}} = \pm \bar{\varphi}.$$

Damit $\bar{\varphi}$ von r_0 und r_1 unabhängig sei, muss dasselbe von P gelten und es ist daher hier dieselbe Betrachtung wie im vorigen Falle anzustellen, die auch auf dasselbe Resultat führt: P muss constant gleich Eins sein; Φ folgt daraus vom minus ersten Grade.

So ergiebt sich der zweite Satz:

Geschlossene Bahncurven, die nicht den geometrischen Mittelpunkt im Attractionscentrum haben, giebt stets unter allen Potentialen, welche durch rationale Functionen von r dargestellt sind, nur dasjenige von der Form $\Phi = \pm c/r$, welchem eine Kraft entspricht, die indirect proportional mit dem Quadrat der Entfernung wirkt; der Winkel zwischen dem grössten und kleinsten Radiusvector der Bahn ist gegeben durch:

$$\bar{\varphi} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} = \pi .$$

§ 13. Die allgemeine Gravitation und ihr Zusammenhang mit der Schwerkraft.

Kepler hat aus den Beobachtungen für die Bewegung der Planeten um die Sonne die folgenden drei nach ihm benannten Gesetze abgeleitet:

1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die von den Radienvectoren nach der Sonne bestrichenen Flächen verhalten sich bei jedem einzelnen Planeten wie die dazu aufgewandten Zeiten.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedner Planeten verhalten sich wie die Cuben der grossen Axen ihrer Bahnellipsen.

Vergleichen wir mit diesen empirischen Gesetzen die im vorigen Abschnitt erhaltenen theoretischen Resultate und identificiren wir dabei „Sonne“ mit „Attractionscentrum“, so erkennen wir Folgendes:

Das zweite Kepler'sche Gesetz drückt eine allgemeine Eigenschaft aller Bewegungen aus, welche unter der Wirkung von Centralkräften stattfinden, die in der Richtung der Verbindungslinie wirken und deren Grösse nur eine Function der Entfernung ist. (Vergl. p. 95).

Das erste Kepler'sche Gesetz wird unter derselben Voraussetzung von der Bewegung erfüllt, wenn die Kraft anziehend indirect proportional mit dem Quadrat der Entfernung wirkt (vergl. p. 98).

Das dritte Kepler'sche Gesetz ist gültig, wenn die Kraft überdies die angezogene Masse als Factor enthält. (Vergl. p. 100.)

Es erscheint hiernach als sehr plausibel, dass die Ursache der

Planetenbewegung eine von der Sonne ausgehende Attraction ist, welche direct proportional mit der angezogenen Masse und indirect proportional mit dem Quadrat der Entfernung wirkt. Indess ist dieser Schluss kein zwingender, und die grosse Wichtigkeit der Frage lässt einen strengen Beweis erwünscht erscheinen. Ein solcher wird ermöglicht durch die merkwürdige Eigenschaft der Keppler'schen Gesetze, die Kraft, welche die Planetenbewegung erhält, so vollständig zu characterisiren, dass man aus ihnen die mathematische Form derselben mit voller Strenge ableiten kann. Setzt man nämlich voraus, dass man die Planeten und die Sonne als materielle Punkte betrachten oder aber ihre gesammten Massen in ihren resp. Mittelpunkten vereinigt denken darf — Annahmen, über welche in einem spätern Abschnitte zu reden sein wird — ferner, dass man die Sonne als stillstehend ansehen kann — was im nächsten Abschnitt erörtert werden wird, so folgt aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz, dass die Planeten während ihrer Bewegung eine Kraft erfahren, die immer nach der Sonne hin gerichtet ist, aus dem ersten, dass sie anziehend wirkt und indirect proportional mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt, aus dem dritten, dass sie den Massen der Planeten proportional ist.

Den Ausdruck für das zweite Kepler'sche Gesetz haben wir schon in Gleichung (85) erkannt, welche lautete:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

vorausgesetzt, dass die XY- zur Bahnebene gewählt ist und die Radienvectoren nach den Coordinatenanfang gezogen sind, in dem wir uns, gemäss dem Kepler'schen Gesetz, die Sonne denken müssen.

Vergleicht man hiermit die für eine ebene Bewegung geltenden allgemeinen Differentialgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

so erkennt man, dass für Kräfte, welche das obige Gesetz befolgen, die Beziehung gelten muss:

$$X:Y = x:y;$$

diese sagt aus: die Richtung der Kraft liegt überall in dem Radiusvector nach dem Coordinatenanfang, d. h. nach der Sonne.

Man wird daher die Sonne als Sitz oder Ursache der Kraft, d. h. als Attractionscentrum, betrachten dürfen.

Demgemäss drückt sich nun aus:

$$X = -K \cdot \frac{x}{r}, \qquad Y = -K \cdot \frac{y}{r},$$

und haben wir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -K \frac{x}{r}, \qquad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -K \frac{y}{r}.$$

Ein negativer Werth von K entspricht hierbei der Abstossung, ein positiver der Anziehung.

Nach (85‴) gilt ferner die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form:

$$\frac{m}{2} \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}\left(r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = -K \frac{dr}{dt},$$

während gleichzeitig der Ausdruck des zweiten Kepler'schen Gesetzes in Polarcoordinaten ist:

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = c_2.$$

Durch Combination beider Gleichungen folgt:

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{4 c_2^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = -K \frac{dr}{dt},$$

oder wenn man die Differentiation ausführt und beiderseitig mit $m\,dr/dt$ dividirt:

$$-\frac{4 c_2^2}{r^3} + \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{K}{m}. \tag{91}$$

Bis hierher ist nichts als der zweite Kepler'sche Satz benutzt worden. Nach dem ersten ist die Bahngleichung von der Form:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\varphi}$$

oder, falls man $r \cos\varphi = x$ setzt, d. h. die X-Axe mit der grossen Axe der Ellipse zusammenfallend denkt, von der anderen:

$$r = p - ex = \frac{b^2 - x\varepsilon}{a}.$$

Es folgt also:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -e \frac{d^2 x}{dt^2} = +K \frac{ex}{mr} = +K \frac{p - r}{mr},$$

und durch Einsetzen dieses Werthes in (91):

$$K = +\frac{4 m c_2^2}{p r^2}. \tag{91'}$$

Dies Resultat zeigt, dass die Kraft für einen und denselben Planeten — denn nur für diesen ist m, c_2 und p constant — mit der Entfernung von der Sonne an Grösse wechselt, nämlich dem Quadrat derselben indirect proportional und stets positiv, also eine Anziehung ist.

Das dritte Kepler'sche Gesetz anzuwenden, folgern wir aus der Constanz der Flächengeschwindigkeit ($\Omega = c_2$), dass die ganze umlaufene Fläche F mit der Umlaufszeit T in dem Zusammenhang steht:

$$F = c_2 T.$$

Nun ist aber $F = \pi ab$, also

$$c_2 = \frac{\pi ab}{T}, \quad \text{ferner} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

und hiernach

$$K = +\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2} m. \tag{91''}$$

Dies gilt für einen Planeten, für einen andern hingegen, indem die für ihn abweichenden Grössen durch den unteren Index ausgezeichnet werden:

$$K_1 = +\frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2 r_1^2} m_1.$$

Es soll aber nach dem dritten Kepler'schen Gesetz für zwei Planeten die Beziehung $a^3/T^2 = a_1^3/T_1^2$ bestehen, daraus folgt, dass gilt:

$$K : K_1 = \frac{m}{r^2} : \frac{m_1}{r_1^2},$$

d. h. dass die auf verschiedene Planeten ausgeübten Kräfte bei gleichen Entfernungen ihren Massen proportional sind.

Wir können sonach für einen beliebigen Planeten mit aller Strenge den Werth der Kraft schreiben:

$$K = +\frac{m}{r^2} f',$$

wo f' ein für alle Planeten gemeinschaftlicher Factor ist.

Bis hierher ist nichts anderes als die drei Kepler'schen Gesetze angewandt; die weiteren Folgerungen benutzen noch andere Hülfsmittel. Die Proportionalität der auf die Planeten ausgeübten Kraft mit deren Masse erklären wir uns durch die Annahme, dass die Wirkung direct auf die einzelnen Massenelemente stattfindet, gleiche Massen in gleichen Entfernungen gleiche Wirkungen erfahren und das, was wir beobachten, die Summe aller Einzelwirkungen ist. Diese Annahme führt zu weiteren Folgerungen.

Es gilt nämlich für Centralkräfte der im nächsten Abschnitt zu beweisende Satz, dass mit derselben Stärke, mit der ein Massenpunkt

m_1 einen zweiten m_2 anzieht, auch der erstere von letzterem angezogen wird. K ist hiernach auch die Kraft, mit welcher die Sonne von jenem Planeten angezogen wird. Da nun die Kraft auf die einzelnen Massenelemente ausgeübt gedacht wird und daher mit der angezogenen Masse proportional sein soll, so muss f' den Factor M, d. i. die Masse der Sonne, enthalten und sich schreiben lassen:

$$K = + f \frac{Mm}{r^2}, \tag{91'''}$$

also die im Sonnensystem wirkende Kraft dem Product aus angezogener und anziehender Masse proportional sein.

Die so gefundene Formel mit demselben Werth der Constanten f übertragen wir nun nicht nur auf die Wirkung zwischen zwei Planeten, sondern auch auf die zwischen verschiedenen Fixsternen, endlich auch auf die zwischen zwei beliebigen Massen, indem wir alle Materie als in dieser Hinsicht von gleicher Art annehmen. Das hierin enthaltene Attractionsgesetz führt den Namen des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Diese Uebertragungen sind aber hypothetisch und bedürfen streng genommen des Nachweises durch die Beobachtung, der aber nur bis zu einem gewissen Grade zu erbringen ist. Die Schwierigkeit liegt darin, dass die gegenseitige Attraction von Körpern, deren Grösse sie dem Experiment zugänglich macht, eine so kleine ist, dass unsere Beobachtungsmittel zu ihrem Nachweis und ihrer Messung nur nothdürftig ausreichen.

Die eigentliche classische Prüfung der Richtigkeit unserer Hypothese, dass die Gravitation eine gemeinsame Eigenschaft aller Massen, der ganzen Weltkörper, ebenso wie der kleinsten Bruchstücke ist, liefert die Vergleichung derjenigen Kraft, welche die Erde auf beliebige Körper an ihrer Oberfläche ausübt und welche wir als Schwerkraft bezeichnen, mit derjenigen, welcher der Mond unterliegt und die seine Bahn um die Erde bestimmt.

In einem späteren Abschnitt wird bewiesen werden, dass die Attraction einer in concentrischen Schichten homogenen Kugel — als welche wir die Erde angenähert betrachten können — auf ausserhalb, gleichviel wie nahe der Oberfläche liegende Massenpunkte dieselbe ist, als wenn die ganze Erdmasse im Centrum vereinigt wäre. Nehmen wir diesen Satz voraus, so können wir die Wirkung, welche die Erde auf einen beliebigen Körper an ihrer Oberfläche — der jedenfalls gegenüber dem Erdradius als materieller Punkt anzusehen ist — ausübt, ebenso nach dem Newton'schen Gesetz ausdrücken, wie die auf den Mond stattfindende, und untersuchen, ob beide auf denselben Werth des Factors f führen.

Sei r, m Entfernung und Masse des Körpers an der Erdoberfläche, r_1, m_1 das Entsprechende für den Mond, M die Masse, R der Radius der Erde, dann ist:

$$K = f\,\frac{Mm}{r^2}, \qquad K_1 = f\,\frac{Mm_1}{r_1^2};$$

die Beschleunigungen erhalten wir daraus durch Division mit den angezogenen Massen, nämlich, da wir r mit R vertauschen können:

$$B = f\,\frac{M}{R^2}, \qquad B_1 = f\,\frac{M}{r_1^2}.$$

Soll also die eine wie die andere Kraft auf dieselbe Constante f führen, so muss gelten:

$$B : B_1 = r_1^2 : R^2.$$

Nun ist aber die Beschleunigung B in Folge der Anziehung der Erde an der Erdoberfläche identisch mit der früher durch den Buchstaben g_0 bezeichneten Grösse, nämlich dem durch Fallversuche bestimmten Werthe, der befreit ist von der Wirkung der Centrifugalkraft, zugleich nahezu der Werth, wie er an den Polen direct beobachtet werden würde — eine uns bekannte Constante, in (cm, sec.) gegeben, im Mittel etwa gleich 982. B_1, die Beschleunigung des Mondes, berechnet sich, wenn man die Mondbahn als kreisförmig und entsprechend die Mondgeschwindigkeit als constant ansieht, sehr einfach nach dem zweiten Satz auf p. 23 gleich dem Werthe der Centrifugalbeschleunigung:

$$B_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} r_1.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$g_0 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r_1^3}{R^2}$$

als die Bedingung dafür, dass der fallende Körper an der Erdoberfläche und der Mond in seiner Bahn unter der Wirkung derselben Kraft stehen.

Für die Berechnung der rechten Seite benutzen wir, dass R/r_1 die in der Astronomie direct beobachtete sogenannte Horizontalparallaxe des Mondes ist, nämlich der Winkel, den die beiden Radienvectoren vom Beobachter und vom Erdcentrum miteinander bilden, wenn der Mond für den Beobachter im Horizont steht; ihr Werth ist $p = 57' 20'' = 0{,}01667$; wir fügen hinzu den mittleren Werth des Erdradius mit 6370 km, die Umlaufszeit des Mondes mit 27,32 Tagen. Mit diesen Werthen berechnet findet sich die rechte Seite gleich 975 cm, ein Werth, der dem beobachteten 982 so nahe liegt, dass man die Bestätigung als eine vollkommene ansehen kann.

Die Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes für die zwischen den verschiedenen Weltkörpern ausgeübten Wirkungen ist durch die modernen Mittel der experimentellen Astronomie in allen Anwendungen auf das Vollkommenste bestätigt worden. Als einer der glänzendsten Beweise hierfür gilt mit Recht die Entdeckung des Neptun, des von der Sonne entferntesten Planeten, den wir gegenwärtig kennen.

Unregelmässigkeiten im Gang des bisher als äusserster der Planeten bekannten Uranus, welche in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts beobachtet worden waren, liessen sich durch Störungen seitens der der Sonne näheren Planeten nicht erklären und verschiedene Astronomen fassten die Ansicht, dass ihre Ursache die Anziehung eines noch weiter von der Sonne entfernten bisher unbekannten Planeten sein möchte; so zuerst (1838) Bessel, der seinen Schüler Flemming mit der theoretischen Bearbeitung der Frage beauftragte; indessen starb jener über den Vorarbeiten. Um 1843 und 1845 beschäftigten sich Adams in Cambridge und Leverrier in Paris mit der Aufgabe und beide gelangten hinsichtlich des Ortes und der Bahn des unbekannten Planeten zu nahe gleichen Resultaten. Von Leverrier aufgefordert, untersuchte im September 1846 Galle in Berlin die Umgegend des durch die Theorie vorhergesagten augenblicklichen Ortes des Planeten und fand jenen in der That kaum um einen Grad von der durch Leverrier berechneten Stelle entfernt.

§ 14. Zwei freie Massenpunkte unter der Wirkung gegenseitiger Anziehung oder Abstossung. Massenmittelpunkt. Stoss zweier Massenpunkte.

Wir beginnen mit der Definition des Massenmittelpunktes.

Der geometrische Mittelpunkt des Abstandes zweier Punkte mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 hat bekanntlich Coordinaten ξ, η, ζ, die gegeben sind durch

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad \zeta = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Diese Formeln erweiternd, können wir für beliebig viele (n) Punkte als Mittelpunkt denjenigen bezeichnen, dessen Coordinaten sind:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}, \qquad \zeta = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}.$$

Hierbei sind alle Punkte als vollkommen gleichartig behandelt; ist aber der eine als durch Zusammenrücken von m_1, der andere von m_2 u. s. f. gleichen Punkten entstanden, wie z. B. wenn der eine

die Masse m_1, der andere die Masse m_2 besitzt, so werden die gleichen Coordinaten in diesen Formeln mit den Factoren $m_1, m_2 \ldots$ auftreten, und die obige Definition wird werden zu

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_i x_i}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i} \quad \text{u. s. f.}$$

oder, kürzer geschrieben, zu

$$\xi = \frac{\sum m_h x_h}{\sum m_h}, \qquad \eta = \frac{\sum m_h y_h}{\sum m_h}, \qquad \zeta = \frac{\sum m_h z_h}{\sum m_h}. \tag{92}$$

Den so definirten Punkt nennen wir den Mittelpunkt des Massensystems $m_1, m_2 \ldots m_i$, oder kurz seinen Massenmittelpunkt. Derselbe ist keineswegs selbst ein Massenpunkt, sondern nichts als ein geometrischer Ort, aber seine Einführung ist geeignet, manche der weiter abzuleitenden Resultate anschaulich auszusprechen.

Hier bemerken wir vorbereitend nur dieses. Gehören die Massenpunkte einem bewegten System an, so wird auch der Massenmittelpunkt nicht ruhen; wir erhalten seine Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten durch die aus den vorstehenden durch Differentiation folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt}\sum m_h = \sum m_h \frac{dx_h}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}\sum m_h = \sum m_h \frac{dy_h}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}\sum m_h = \sum m_h \frac{dz_h}{dt}, \\
&\frac{d^2\xi}{dt^2}\sum m_h = \sum m_h \frac{d^2x_h}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\sum m_h = \sum m_h \frac{d^2y_h}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}\sum m_h = \sum m_h \frac{d^2z_h}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{92'}$$

Nunmehr wenden wir uns dem in der Ueberschrift genannten Problem zu, dessen Wichtigkeit durch die Ueberlegung erhellt, dass wir ein absolut festes Attractionscentrum in der Natur nirgends haben, beispielsweise alle im Sonnensystem nach dem Newton'schen Gesetz wirkenden Massen in Bewegung sind, und es eine willkürliche nur eben zur Vereinfachung der Rechnung eingeführte Fiction war, wenn wir oben die Sonne als ein ruhendes Attractionscentrum behandelt haben. Wie wir sehen werden, sind die dadurch früher gefundenen (Kepler'schen) Gesetze der Planetenbewegung nur eine erste, allerdings sehr bedeutende Annäherung an die Wirklichkeit; die neuen Betrachtungen liefern uns eine zweite Annäherung und damit ein Urtheil über die Grenzen der Gültigkeit jener ersten. Eine dritte Annäherung würde sich durch Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehung der Planeten ergeben.

Ziehen zwei Massenpunkte m_1 und m_2 sich gegenseitig parallel ihrer Verbindungslinie an oder stossen sie sich ebenso ab, so gilt der Satz, dass die auf beide ausgeübten Kräfte gleich und entgegengesetzt

gerichtet sein müssen. Derselbe beweist sich, indem man die beiden freien Massenpunkte durch eine starre Linie verbunden denkt und das hierdurch erhaltene starre System betrachtet. Wenn dann die Kraft, welche m_1 von m_2 erfährt, von derjenigen verschieden wäre, welche m_2 von m_1 erleidet, so würden sich diese auf das starre System wirkenden Kräfte, wie im nächsten Theil ausführlicher erörtert werden wird, zu einer parallel der Verbindungslinie wirkenden endlichen Resultirenden zusammensetzen, welche das starre System in einer gleichförmig beschleunigten Bewegung forttreiben müsste. Da aber nach dem an die Spitze dieser ganzen Entwickelung gestellten Trägheitsprincip eine Masse ihren Bewegungszustand nicht ohne äussere Ursache verändert, so können die auf m_1 und m_2 wirkenden Kräfte keine endliche Resultirende haben, sondern müssen entgegengesetzt gleich sein. Man nennt diesen Satz das Princip der Gleichheit von Wirkung (actio) und Gegenwirkung (reactio).

Eine der vorstehenden analoge Betrachtung ergiebt, dass zwei Massenpunkte nicht Kräfte auf einander ausüben können, deren Richtung eine andere als die der Verbindungslinie ist, falls nicht noch ausserdem drehende Wirkungen von dem einen direct auf den anderen stattfinden. Denn sonst würde das wie vorstehend hergestellte System von selbst in immer beschleunigte Rotation gerathen. Hiervon werden wir später noch einmal zu sprechen haben.

Die beiden Massenpunkte m_1 und m_2 mögen die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 haben, dann ist die Länge r_{12} ihrer Verbindungslinie, die wir weiter als eine stets positive Grösse betrachten, gegeben durch:

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Die Cosinus ihrer Richtungswinkel gegen die Coordinatenaxen sind:

$$\pm \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \qquad \pm \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \qquad \pm \frac{z_2 - z_1}{r_{12}},$$

positiv oder negativ gerechnet, jenachdem man r_{12} die Richtung von m_1 nach m_2 oder umgekehrt beilegt.

Da die Kräfte in der Richtung der Verbindungslinie liegen und entgegengesetzt gleich sind, so werden sich die Bewegungsgleichungen folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= + K \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= - K \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= + K \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= - K \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= + K \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}, & m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= - K \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}. \end{aligned} \qquad (93)$$

Ein positiver Werth von K entspricht darin einer Anziehung, ein negativer einer Abstossung.

Es handelt sich darum, die integrabeln Combinationen aus diesen Gleichungen zu bilden.

Addirt man die je zwei in einer Zeile stehenden Formeln, so erhält man:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \tag{93'}$$

Nach (92′) sagen diese Gleichungen aus, dass die Bewegung des Massenmittelpunktes ohne Beschleunigung, d. h. mit constanter Geschwindigkeit in gerader Linie stattfindet. Dieses Resultat trägt den Namen des Satzes von der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes. Durch Integration folgt aus (93′):

$$\begin{aligned} \xi (m_1 + m_2) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 = \alpha t + \alpha', \\ \eta (m_1 + m_2) &= m_1 y_1 + m_2 y_2 = \beta t + \beta', \\ \zeta (m_1 + m_2) &= m_1 z_1 + m_2 z_2 = \gamma t + \gamma'. \end{aligned} \tag{93''}$$

Hierin stellen α, β, γ die Anfangsgeschwindigkeiten des Massenmittelpunktes dar; dieselben sind gleich Null, wenn für die Anfangsgeschwindigkeiten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 der beiden Massenpunkte die Gleichungen gelten:

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2, \qquad m_1 b_1 = -m_2 b_2, \qquad m_1 c_1 = -m_2 c_2.$$

Aus ihnen folgt, dass, um den Massenmittelpunkt dauernd ruhen zu lassen, die Anfangsgeschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 von entgegengesetzter Richtung und den bezüglichen Massen umgekehrt proportional sein müssen.

Einen zweiten allgemeinen Integralsatz erhalten wir, wenn wir die zweiten Gleichungen (93) resp. mit $-z_1$, $-z_2$, die ersten mit $+y_1$, $+y_2$ multipliciren und alle vier addiren. Es resultirt so:

$$m_1 \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) + m_2 \left(y_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - z_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \right) = 0. \tag{94}$$

Die beiden in m_1 und m_2 multiplicirten Ausdrücke sind gemäss dem zu Gleichung (85′) Gesagten das Doppelte der „Flächenbeschleunigungen“ für die Projection der Bewegung auf die YZ-Ebene. Bezeichnet man die bezüglichen Flächengeschwindigkeiten mit Ω_1^x und Ω_2^x, so erhält man:

$$2\, d (m_1 \Omega_1^x + m_2 \Omega_2^x) = 0,$$

also nach ausgeführter Integration:

$$m_1 \Omega_1^x + m_2 \Omega_2^x = A,$$

analog auch:

$$m_1 \Omega_1^y + m_2 \Omega_2^y = B, \tag{94'}$$

und

$$m_1 \Omega_1^z + m_2 \Omega_2^z = C.$$

Die drei Integrationsconstanten A, B, C bestimmen sich durch den Anfangszustand.

Diese drei Gleichungen, welche aussagen, dass für unser System die Summen der Producte aus der Masse und der auf die Coordinatenebenen projicirten Flächengeschwindigkeit constante Werthe haben, sprechen den Satz von der Erhaltung der Flächengeschwindigkeit für zwei freie Massenpunkte aus. Setzt man die Gleichung (93') für die Bewegung des Massenmittelpunktes voraus, so sind die Gleichungen (94') nicht von einander unabhängig. Geht man nämlich auf ihre erste Form

$$m_1 \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) = - m_2 \left(y_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - z_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \right) \quad \text{u. s. f.}$$

zurück und multiplicirt diese Gleichungen mit den aus (93') folgenden Beziehungen:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad \text{u. s. f.}$$

und addirt die Resultate, so erhält man auf beiden Seiten identisch Null.

Diesen beiden allgemeinen Sätzen ordnet sich ein dritter zu, den man erhält, wenn man die sechs Formeln (93) mit den Factoren $(dx_1/dt)\,dt = dx_1$, $(dy_1/dt)\,dt = dy_1$, u. s. f. zusammenfasst. Man erhält so:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2} \right) dt = \\ &- \frac{K}{r_{12}} \left[(x_2 - x_1)\, d(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\, d(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)\, d(z_2 - z_1) \right]. \end{aligned} \tag{95}$$

Da $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ ist, so ist die vollständige Aenderung dr_{12}, welche r_{12} in Folge der Bewegung von m_1 und m_2 während dt erleidet, gegeben durch:

$$r_{12} dr_{12} = (x_2 - x_1)\, d(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\, d(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)\, d(z_2 - z_1),$$

und wir können die obige Gleichung auch schreiben:

$$d\left(m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2} \right) = - K dr_{12}. \tag{95'}$$

Hierin ist, wie die linke, so auch die rechte Seite ein vollständiges Differential; bezeichnen wir dasselbe mit $-d\Phi$, so ist Φ als das

Potential der Wechselwirkung zwischen m_1 und m_2 zu bezeichnen und es gelten die Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
-X_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, & -Y_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, & -Z_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \\
-X_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, & -Y_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, & -Z_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial z_2},
\end{aligned}
\tag{95''}
$$

d. h. die auf beide Massenpunkte ausgeübten Kräfte sind durch die negativen partiellen Differentialquotienten des Potentiales nach den resp. Coordinaten gegeben.

Führt man für die lebendigen Kräfte die frühere Bezeichnung Ψ_1, Ψ_2 ein und setzt die gesammte lebendige Kraft des Systems

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi,$$

so nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$d\Psi = -d\Phi,$$

oder unter Einführung der Energie E als Summe von lebendiger Kraft und Potential:

$$dE = d(\Psi + \Phi) = 0, \tag{95'''}$$

d. h.

$$E = \text{Const.}$$

Diese Gleichung, welche eine allgemeinere Form der in § 12 abgeleiteten Formel (84'') darstellt, nennt man den Satz von der Erhaltung der Energie für zwei freie Massenpunkte. Bezüglich ihrer Bedeutung kann auf das zu Gleichung (82) Gesagte verwiesen werden.

Die im Vorstehenden entwickelten drei allgemeinen Sätze repräsentiren die sechs Combinationen der Bewegungsgleichungen, welche die erste Integration gestatten. Von ihnen wäre also auszugehen, um das Problem der Bewegung beider Punkte methodisch zu lösen.

Wir wollen indess einen andern Weg einschlagen, der das vorliegende Problem auf dasjenige der Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung eines festen Attractionscentrums zurückführt.

Dividiren wir das erste Tripel Gleichungen (93) durch m_1, das zweite durch m_2 und subtrahiren von den je in einer Reihe stehenden die erste von der zweiten, dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} &= -K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \\
\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dt^2} &= -K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \\
\frac{d^2(z_2 - z_1)}{dt^2} &= -K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}.
\end{aligned}
\tag{96}
$$

Diese Gleichungen haben eine einfache Bedeutung; da $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ die relativen Coordinaten des Massenpunktes m_2 in Bezug auf m_1 sind, so stellen die Gleichungen die relative Bewegung von m_2 gegen m_1 dar, d. h. das Gesetz, welches ausdrückt, wie sich m_2 für einen mit m_1 bewegten Beobachter zu verhalten scheint.

Vergleichen wir diese Formeln mit (84) in § 12, so erkennen wir: die relative Bewegung von m_2 gegen m_1 findet ebenso statt, als wenn m_1 ruhte und die auf m_2 wirkende Kraft im Verhältniss $(m_1 + m_2)/m_1$ vergrössert wäre.

Vertauscht man auf beiden Seiten dieser Gleichungen das Vorzeichen, so erhält man den analogen Satz für die Bewegung von m_1 relativ zu m_2.

Diese scheinbare Vergrösserung der wirkenden Kraft spricht sich besonders einfach aus, wenn, wie bei dem Newton'schen Gesetz, die Kraft K mit den sich anziehenden Massen proportional ist, z. B.:

$$K = m_1 m_2 F(r_{12}).$$

Dann findet die Bewegung von m_2 relativ zu m_1 so statt, als wenn in letzterem Punkte die Masse $m_1 + m_2$ concentrirt wäre; im Uebrigen gelten alle für ein ruhendes Attractionscentrum gefundenen Resultate.

Für die Umlaufszeit können wir hiernach zum Beispiel im Falle der Newton'schen Gravitation den Werth sogleich hinschreiben. Ist wieder:

$$K = \frac{f m_1 m_2}{r^2} = \frac{k}{r^2},$$

so gilt nach (89''):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{f(m_1 + m_2)}}. \tag{96'}$$

Ist m_1 etwa die Masse der Sonne und sind m_2, m_2', m_2'' die Massen der angezogenen Planeten, so erkennt man, dass für die relativen Umlaufszeiten der letzteren gegen die Sonne die Beziehungen stattfinden:

$$T^2 : T'^2 : T''^2 : \ldots = \frac{a^3}{m_1 + m_2} : \frac{a'^3}{m_1 + m_2'} : \frac{a''^3}{m_1 + m_2''} : \cdots, \tag{96''}$$

eine Formel, die nur insoweit in Kepler's drittes Gesetz übergeht, als die Planetenmassen neben der Sonnenmasse zu vernachlässigen sind.

Ist sonach das Problem der relativen Bewegungen auf früher schon Erledigtes zurückgeführt, so ist dadurch für die absolute doch noch nichts gewonnen; um deren Gesetze zu übersehen, führen wir ein neues Coordinatensystem ein, dessen Axen den absolut festen parallel sind und dessen Anfangspunkt sich mit dem Massenmittelpunkt des Systems, also gleichförmig in gerader Linie, fortbewegt. Es ist dann

$$x_1 = \xi + \xi_1, \quad y_1 = \eta + \eta_1, \quad z_1 = \zeta + \zeta_1,$$
$$x_2 = \xi + \xi_2, \quad y_2 = \eta + \eta_2, \quad z_2 = \zeta + \zeta_2,$$

wobei ξ, η, ζ die oben benutzte Bedeutung haben; daraus folgt:

$$\xi_1 = \frac{m_2(x_1 - x_2)}{m_1 + m_2}, \qquad \xi_2 = \frac{m_1(x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} \quad \text{u. s. f.}$$

und demgemäss werden auch die Radienvectoren vom Massenmittelpunkt nach den Massenpunkten m_1 und m_2

$$\varrho_1 = \frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2}, \qquad \varrho_2 = \frac{m_1 r_{12}}{m_1 + m_2}.$$

Führt man diese Werthe in das System (96) ein, so ergiebt sich:

$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\frac{\xi_1}{\varrho_1} K\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\varrho_1\right), \quad m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -\frac{\xi_2}{\varrho_2} K\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\varrho_2\right) \quad (97)$$

u. s. f., worin die zu K gefügte Klammer bezeichnet, dass in dieser Function r_{12} resp. durch

$$\frac{m_1 + m_2}{m_2}\varrho_1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{m_1 + m_2}{m_1}\varrho_2$$

ersetzt ist.

Vergleicht man die so erhaltenen Formeln mit den für ein ruhendes Attractionscentrum erhaltenen (84), so erkennt man, dass die Bewegung relativ zum Massenmittelpunkt ebenso stattfindet, als wenn sich in demselben ein ruhendes Attractionscentrum befände, welches nach demselben Gesetz wirkt, wie der in Wahrheit die Wirkung ausübende Massenpunkt, mit dem einzigen Unterschied, dass in diesem Gesetz die Entfernung ϱ_1 resp. ϱ_2 mit einem constanten Factor multiplicirt auftritt.

Für die analytische Behandlung kommt natürlich dieser Factor gar nicht in Betracht und man kann daher, bis auf die nöthige Veränderung der Constanten, alle für ruhende Centra erhaltenen Gesetze hier anwenden. Damit ist aber die absolute Bewegung beider Massenpunkte vollständig und anschaulich bestimmt, denn man hat nur das ganze in Bezug auf den Massenmittelpunkt bewegte System gleichförmig in gerader Linie zu verschieben, um die allgemeinste absolute Bewegung zu erhalten.

Findet beispielsweise die Attraction nach dem Newton'schen Gesetz statt, so ist:

$$K(r_{12}) = \frac{f m_1 m_2}{r_{12}^2}, \qquad K\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\varrho_1\right) = \frac{f m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{\varrho_1^2},$$

$$K\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\varrho_2\right) = \frac{f m_1^3 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{\varrho_2^2};$$

die Bewegung in Bezug auf den Massenmittelpunkt ist also dieselbe, als ob derselbe ruhte und die anziehende Masse $m_2^3/(m_1 + m_2)^2$, resp. $m_1^3/(m_1 + m_2)^2$, enthielte.

In diesem Sinne weichen auch die Resultate von den Kepler'schen Gesetzen der Planetenbewegung ab.

Beide Massenpunkte bewegen sich also relativ zum Massenmittelpunkt in Kegelschnitten, in deren Brennpunkt jener steht. Da ihre Verbindungslinie immer durch den Coordinatenanfang ξ, η, ζ hindurchgeht und von diesem im Verhältniss $\varrho_1 : \varrho_2 = m_2 : m_1$ getheilt wird, so ergiebt sich, dass relativ zum Massenmittelpunkt beide Bahnen in einer Ebene liegen, die entsprechenden Axen in dieselbe Richtung fallen und ihrer Grösse nach den bezüglichen Massen indirect proportional sind.

Die Umlaufsdauern sind für elliptische Bahnen resp.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3 (m_1 + m_2)^2}{f m_2^3}}, \qquad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3 (m_1 + m_2)^2}{f m_1^3}}; \qquad (97')$$

sie sind gleich, da $a_1 m_1 = a_2 m_2$ ist.

Auf die Wirkung von Centralkräften zwischen Massenpunkten lässt sich auch jene besondere Art der bedingten Bewegung zurückführen, auf welche schon oben p. 55 hingewiesen worden ist, nämlich der Fall, dass das Gesetz der Entfernung des bewegten Punktes von einem andern gegeben ist, der seinerseits sich in bestimmter Weise bewegt, z. B. ruht, oder aber seinerseits ebenfalls frei ist.

Bei allen derartigen Aufgaben ist die Wirkung der Verbindung beider Massenpunkte zurückzuführen auf Reactionskräfte, welche dieselbe auf beide Punkte ausübt und deren Richtung in die Verbindungslinie fällt, deren Grösse aber nicht direct gegeben ist, sondern sich durch die neue Bedingung, welche zu den sechs Bewegungsgleichungen hinzutritt, bestimmt.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Bewegung zweier Massenpunkte, die durch eine starre gewichtslose Linie verbunden sind, z. B. zweier Bleikugeln, die an einem sehr leichten Stab befestigt sind. Für die Behandlung ist von den Gleichungen (97) auszugehen und in denselben K als Unbekannte anzusehen, die zu bestimmen die Bedingung:

$$r_{12} = \text{Const.}$$

zu den Bewegungsgleichungen hinzutritt.

Das Resultat ist nach dem Vorstehenden sogleich zu übersehen.

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich gleichförmig in gerader Linie; für die Bewegung relativ zu demselben gilt der Flächensatz und da die Entfernung beider Massenpunkte unveränderlich ist, so müssen sie mit constanter Geschwindigkeit Kreisbahnen in derselben Ebene durch den Massenmittelpunkt beschreiben. Die Aufstellung ausführlicher Formeln ist nicht nöthig.

Auf Centralkräfte lässt sich ferner der Vorgang zurückführen, den man kurz als den Zusammenstoss zweier Massenpunkte bezeichnet. Wir betrachten dazu zwei Massenpunkte, die eine gegenseitige Einwirkung nur dann äussern, wenn sie einander unendlich nahe kommen. Dieselben werden sich, solange ihre Entfernung eine endliche ist, mit constanten Geschwindigkeiten in geraden Linien bewegen und eine hiervon abweichende Bewegung nur solange einschlagen, als ihre Entfernung unendlich klein ist, oder, wie man kurz sagt, während ihres Zusammenstosses.

Man kann dann, ohne eine andere Annahme zu benutzen als die, dass während der Periode des Stosses eine Centralkraft der oben besprochenen Art wirksam ist, den Zusammenhang bestimmen, in welchem die Bewegung nach dem Stoss mit derjenigen vor demselben steht.

Seien nämlich m_1 und m_2 die Massen der beiden Punkte, u_1^0, v_1^0, w_1^0, V_1^0 und u_2^0, v_2^0, w_2^0, V_2^0 die Componenten und Resultanten ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stoss, u_1, v_1, w_1, V_1 und u_2, v_2, w_2, V_2 diejenigen nach demselben, Ψ_1^0 und Ψ_2^0, Ψ_1 und Ψ_2 die resp. lebendigen Kräfte, so gilt nach (93′) der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, der sich ausdrückt in den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0, \\ m_1 w_1 + m_2 w_2 &= m_1 w_1^0 + m_2 w_2^0, \end{aligned} \tag{98}$$

ferner nach (94‴) die Gleichung der Energie:

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \Phi = \Psi_1^0 + \Psi_2^0 + \Phi^0,$$

in welcher Φ^0 und Φ die Potentiale der Wechselwirkung vor und nach dem Stosse sind.

Da der Stoss beginnt, wenn die Wechselwirkung eben anfängt einen von Null verschiedenen Werth zu erhalten und endet, wenn sie verschwindet, so muss $\Phi = \Phi^0$ sein und daher gelten:

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_1^0 + \Psi_2^0, \tag{98′}$$

oder ausführlich nach Multiplication mit 2:

$$\begin{aligned} & m_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + m_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ & = m_1 (u_1^{0^2} + v_1^{0^2} + w_1^{0^2}) + m_2 (u_2^{0^2} + v_2^{0^2} + w_2^{0^2}). \end{aligned} \tag{98″}$$

Diese Formeln beziehen sich auf ein ganz beliebiges Coordinatensystem; sie lassen sich vereinfachen, wenn man dasselbe so legt, dass

$$v_1 = v_1^0, \qquad w_1 = w_1^0$$

ist, d. h. dass V_1^0 und V_1 die gleichen Componenten nach der YZ-Ebene geben. Man erkennt aus (98), dass unter dieser Annahme auch

$$v_2 = v_2^0, \qquad w_2 = w_2^0$$

ist, also V_2^0 und V_2 sich gegen die YZ-Ebene ebenso verhalten.

Ferner gilt:

$$m_1(v_1^2 + w_1^2) + m_2(v_2^2 + w_2^2) = m_1(v_1^{0^2} + w_1^{0^2}) + m_2(v_2^{0^2} + w_2^{0^2})$$

und es folgt durch Subtraction dieser Gleichung von (98''):

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 u_1^{0^2} + m_2 u_2^{0^2},$$

oder

$$m_1(u_1^2 - u_1^{0^2}) = m_2(u_2^{0^2} - u_2^2). \tag{98'''}$$

Dividirt man dies durch die aus (98) folgende Beziehung

$$m_1(u_1 - u_1^0) = m_2(u_2^0 - u_2).$$

so folgt:

$$u_1 + u_1^0 = u_2 + u_2^0,$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen berechnet sich:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{2m_2u_2^0 + u_1^0(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{2m_1u_1^0 + u_2^0(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

was mit

$$v_1 = v_1^0, \quad w_1 = w_1^0 \quad \text{und} \quad v_2 = v_2^0, \quad w_2 = w_2^0$$

zusammen Grösse und Richtung der resultirenden Geschwindigkeiten vollständig bestimmt.

Unbekannt ist nur noch die Richtung der eingeführten X-Coordinatenaxe, welche dadurch definirt war, dass V_1 und V_1^0 einerseits, V_2 und V_2^0 andererseits nach der zu ihr normalen YZ-Ebene gleiche Componenten besitzen sollten. Diese zu bestimmen ist eine speciellere Annahme über den Vorgang des Stosses erforderlich, als bisher angewandt war. Denken wir uns z. B. die beiden Massenpunkte als sehr kleine starre Kugeln, die nur während der Berührung auf einander wirken, so ergiebt es sich aus den Symmetrieverhältnissen, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Moment der Berührung jene X-Axe, ihre gemeinsame Tangentenebene jene YZ-Ebene sein muss. In diesem Falle des schiefen Stosses unendlich kleiner Kugeln, ist die Aufgabe also völlig durchgeführt. Aehnlich wird bei zwei beliebig gestalteten Massenpunkten, die sich nur bis auf eine gewisse kleinste Entfernung einander nähern können, ohne sich zu berühren, ihre Verbindungslinie in jener kleinsten Entfernung die X-Richtung sein müssen.

Die resultirenden Gesammtgeschwindigkeiten folgen aus (99):

$$V_1^2 = V_1^{0^2} + \frac{4\,m_2\,(u_2^0 - u_1^0)\,(m_2 u_2^0 + m_1 u_1^0)}{(m_1 + m_2)^2},$$
$$V_2^2 = V_2^{0^2} + \frac{4\,m_1\,(u_1^0 - u_2^0)\,(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0)}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{99'}$$

Für den geraden centralen Stoss sind alle v und w gleich Null und $u = V$ zu setzen und es gilt dann:

$$V_1 = \frac{2\,m_2 V_2^0 + V_1^0\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2},$$
$$V_2 = \frac{2\,m_1 V_1^0 + V_2^0\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \tag{99''}$$

Dies sind die Gesetze des Stosses für zwei Massenpunkte; dass es keineswegs erlaubt ist, sie für endliche Massen anzuwenden, wird sich später zeigen.

§ 15. Bewegung von Punktsystemen; Satz über den Massenmittelpunkt, Flächensatz, Gleichung der Energie.

Seien gegeben n Massenpunkte mit den Massen m_1, $m_2 \ldots m_n$ und den Coordinaten x_1, y_1, z_1, . . . x_n, y_n, z_n. Zwischen ihnen mögen Centralkräfte wirken, welche in den bezüglichen Verbindungslinien liegen und Functionen allein von deren Längen sind. So erfahre der Massenpunkt m_h von einem andern m_k die Kraft K_{hk}, m_k von m_h die Kraft $K_{kh} = K_{hk}$, deren Componenten gegeben sind durch

$$X_{hk} = -X_{kh} = -K_{hk}\frac{x_h - x_k}{r_{hk}}, \qquad Y_{hk} = -Y_{kh} = -K_{hk}\frac{y_h - y_k}{r_{hk}},$$
$$Z_{hk} = -Z_{kh} = -K_{hk}\frac{z_h - z_k}{r_{hk}}, \tag{100}$$

hierin ist K_{hk} eine Function nur der Entfernung r_{hk}, die negativ ist für den Fall der Abstossung, positiv für den der Anziehung; $r_{hk} = r_{kh}$ wird stets positiv gerechnet.

Ausser diesen Wechselwirkungen, die wir innere Kräfte des Systems nennen, seien noch von ausserhalb des Systems liegenden Ursachen Kräfte hervorgebracht; die Summen ihrer auf den Punkt m_h ausgeübten Componenten seien X_h, Y_h, Z_h.

Dann lauten für diesen einen beliebigen Massenpunkt die Bewegungsgleichungen:

$$m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \sum_k X_{hk} + X_h,$$
$$m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} = \sum_k Y_{hk} + Y_h, \tag{100'}$$
$$m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} = \sum_k Z_{hk} + Z_h;$$

die Summen sind über alle auf m_h wirkende Massenpunkte auszudehnen. Analoge Gleichungen gelten für jeden andern Punkt; die Anzahl aller ist gleich $3n$, wie auch die Anzahl der unbekannten Coordinaten.

Sind die Massenpunkte nicht frei beweglich, sondern an Bedingungen gebunden, so treten noch die Kräfte in den Gleichungen auf, welche in Folge jener als wirksam anzunehmen sind.

Die Anzahl der allgemein angebbaren integrabeln Combinationen aus diesen $3n$ Gleichungen ist, für den Fall die äussern Kräfte fehlen oder bestimmte einfache Eigenschaften besitzen, dieselbe, die in dem vorigen speciellen Problem gebildet war und demnach weitaus nicht genügend zur vollständigen Lösung des Bewegungsproblemes, das in der That schon bei drei Massenpunkten bisher nicht streng durchführbar ist. Bei Wirkung äusserer Kräfte liegen die Verhältnisse meist noch ungünstiger.

Alles, was die Analysis bis jetzt vermag, ist die Aufstellung einiger höchst allgemeiner Sätze, die in gewissen einfachen Fällen Hülfsmittel der strengen Lösung sind.

1. Summirt man sämmtliche auf dieselbe Coordinatenaxe bezügliche Gleichungen, so erhält man in Rücksicht auf (92′) und (100):

$$\begin{aligned} \sum_h m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} &= \frac{d^2 \xi}{dt^2} \sum_h m_h = \sum_h X_h, \\ \sum_h m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} &= \frac{d^2 \eta}{dt^2} \sum_h m_h = \sum_h Y_h, \\ \sum_h m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} &= \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \sum_h m_h = \sum_h Z_h. \end{aligned} \tag{101}$$

Diese Gleichungen enthalten den Satz:

Der Massenmittelpunkt eines unter der Wirkung von äussern und innern Kräften stehenden Massensystemes bewegt sich ebenso, als wären in ihm sämmtliche Massen des Systemes zu einem Massenpunkt vereinigt und griffen sämmtliche äussere Kräfte in ihm an.

Da bei seiner Ableitung nur das Prinzip der Gleichheit von Action und Reaction benutzt ist, gilt dieser erste Satz allgemein für jede Art von innern Kräften.

Steht das System nur unter der Wirkung innerer Kräfte, so bewegt sich der Massenmittelpunkt gleichförmig in gerader Linie. Diesen Satz nennt man den Satz von der Erhaltuug der Bewegung des Schwerpunktes. Ein solches System ist das Weltsystem, der angegebene Satz gilt daher auch für dieses.

Wirken keine äussern Kräfte, oder aber sind dieselben vom Ort unabhängig und den Massen proportional, wie die Schwerkraft, so er-

hält man, indem man die Gleichungen (101) mit $m_h / \Sigma m_h$ multiplicirt und von (100′) abzieht und $x_h - \xi = \xi_h$, $y_h - \eta = \eta_h$, $z_h - \zeta = \zeta_h$ setzt, für die Bewegung relativ zum Massenmittelpunkt die Formeln:

$$\begin{aligned} m_h \frac{d^2 \xi_h}{dt^2} &= \sum_k X_{hk}, \\ m_h \frac{d^2 \eta_h}{dt^2} &= \sum_k Y_{hk}, \\ m_h \frac{d^2 \zeta_h}{dt^2} &= \sum_k Z_{hk}. \end{aligned} \tag{101'}$$

In diesem Falle findet die Bewegung ebenso statt, als ruhte der Massenmittelpunkt und wirkten ausschliesslich die innern Kräfte des Systems.

2. Multiplicirt man die dritte Gleichung des Systems (100′) mit y_h, zieht davon die zweite mit z_h multiplicirt ab und bildet hiervon die Summe für alle Massenpunkte, so erhält man in Rücksicht auf (100):

$$\sum_h m_h \left(y_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} - z_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) = \sum_h (y_h Z_h - z_h Y_h),$$

und analog auch:

$$\begin{aligned} \sum_h m_h \left(z_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} - x_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) &= \sum_h (z_h X_h - x_h Z_h), \\ \sum_h m_h \left(x_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} - y_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) &= \sum_h (x_h Y_h - y_h X_h). \end{aligned} \tag{102}$$

Die Summen links beziehen sich auf alle Massen des Systems, eine jede ist multiplicirt mit dem Doppelten ihrer auf eine Coordinatenebene bezogenen Flächenbeschleunigung; die Summen rechts sind zu nehmen über gewisse Aggregate der äusseren Kraftcomponenten X_h, Y_h, Z_h und der Coordinaten x_h, y_h, z_h ihrer Angriffspunkte, die man, aus später zu erörternden Gründen, ihre Drehungsmomente um die Coordinatenaxen nennt und mit L_h, M_h, N_h bezeichnet. Demgemäss schreiben sich die obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2 \sum_h m_h \frac{d \Omega_h^x}{dt} &= \sum_h L_h, \\ 2 \sum_h m_h \frac{d \Omega_h^y}{dt} &= \sum_h M_h, \\ 2 \sum_h m_h \frac{d \Omega_h^z}{dt} &= \sum_h N_h. \end{aligned} \tag{102'}$$

Sie sprechen den folgenden Satz aus:

Für ein äussern und innern Kräften ausgesetztes Punktsystem ist die doppelte Summe der Massen des Systems multi-

plicirt mit ihren betreffenden Flächenbeschleunigungen für eine jede Coordinatenebene gleich der Summe der Drehungsmomente, welche die äussern Kräfte um die Axe normal zu jener Ebene ausüben.

Dieser Satz setzt nur voraus, dass die innern Kräfte dem Gesetz der Gleichheit von Action und Reaction folgen und parallel den resp. Verbindungslinien wirken.

Fehlen die äussern Kräfte, so folgt aus den Gleichungen (102′) durch Integration nach der Zeit:

$$\sum_h m_h \Omega_h^x = A, \qquad \sum_h m_h \Omega_h^y = B, \qquad \sum_h m_h \Omega_h^z = C. \tag{103}$$

Für ein sich selbst überlassenes Punktsystem haben die Summen über die Producte aus Massen und Flächengeschwindigkeiten für jede Coordinatenebene einen von der Zeit unabhängigen Werth.

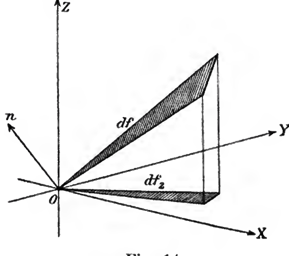


Fig. 14.

Dies ist die allgemeine Form des Flächensatzes.

Für die Aggregate $\Sigma m_h \Omega_h^x$ u.s.f. ist ein eigener Name nicht üblich, ob er gleich für kurzen Ausdruck gewisser Sätze sehr erwünscht wäre. Da das Product mV bei manchen Autoren den Namen „Moment der Bewegung“ trägt, so wollen wir $m\Omega^x$ „das Moment der Flächengeschwindigkeit um die X-Axe“ oder noch kürzer „das Flächenmoment um die X-Axe oder in Bezug auf die YZ-Ebene“ nennen und diesen Namen auch auf ein Punktsystem anwenden. Unser letzter Satz würde unter Anwendung dieser Bezeichnung kurz lauten:

Für ein sich selbst überlassenes System sind die Flächenmomente um die Coordinatenaxen constant.

Bedenkt man, dass die gesammte Flächengeschwindigkeit Ω_h von m_h die unendlich kleine Fläche df ist, welche der Radiusvector nach dem Coordinatenanfang in der Zeit dt bestreicht, dividirt durch dt, Ω_h^x, Ω_h^y, Ω_h^z aber die entsprechenden Verhältnisse sind für die Projectionen df_x, df_y, df_z von df auf die Coordinatenebenen, dass ferner nach Figur 14 $df_x = df . \cos(n,x)$, $df_y = df . \cos(n,y)$, $df_z = df . \cos(n,z)$ ist, falls mit n die Richtung der Normalen auf df bezeichnet wird, so erkennt man, dass:

$$\Omega_h^x = \Omega_h \cos(n_h, x), \quad \Omega_h^y = \Omega_h \cos(n_h, y), \quad \Omega_h^z = \Omega_h \cos(n_h, z) \text{ ist.}$$

Demgemäss kann man die Gleichungen (103) auch schreiben:

$$\sum_h m_h \Omega_h \cos(n_h, x) = A, \qquad \sum_h m_h \Omega_h \cos(n_h, y) = B,$$
$$\sum_h m_h \Omega_h \cos(n_h, z) = C. \tag{103'}$$

Auf eine beliebige Ebene, deren Normale die Richtung d' hat, projicirt man hiernach die gesammten Flächengeschwindigkeiten, wenn man vorstehende Gleichungen mit den Factoren $\cos(d', x)$, $\cos(d', y)$, $\cos(d', z)$ zusammenfasst; den Werth der linken Seite bezeichne man mit D', dann giebt sich:

$$D' = \sum_h m_h \Omega_h \cos(n_h, d) = A \cos(d', x) + B \cos(d', y) + C \cos(d', z). \tag{103''}$$

Dieses Resultat lässt sich noch anders ausdrücken.

Tragen wir A, B, C auf den Coordinatenaxen als Längen auf und bilden wir aus ihnen eine Resultante nach der Regel des Parallelogrammes, dann hat dieselbe die Länge D, gegeben durch:

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

und schliesst Winkel (d, x), (d, y), (d, z) mit den Coordinatenaxen ein, gegeben durch:

$$\cos(d, x) = A/D, \qquad \cos(d, y) = B/D, \qquad \cos(d, z) = C/D.$$

Wie A, B, C, so ist auch D und sind die Winkel (d, x), (d, y), (d, z) von der Zeit unabhängig.

Benutzt man diese Formeln, um A, B, C in (103'') durch D auszudrücken, so erhält man:

$$D' = D \cos(d, d'); \tag{103'''}$$

diese Gleichung zeigt, dass D' seinen absolut grössten Werth D erhält, wenn d' in die Richtung von d fällt oder ihr entgegengesetzt ist, dagegen den Werth Null annimmt, wenn d' normal zu d steht.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Für jedes nur unter der Wirkung innerer Kräfte stehende Punktsystem lässt sich eine Ebene von mit der Zeit unveränderlicher Lage angeben (invariable Ebene von Laplace), in Bezug auf welche das Flächenmoment des Systemes, d. h. die Summe der Producte aus Flächengeschwindigkeit und Masse aller Punkte, seinen grössten Werth besitzt. Trägt man nämlich die Repräsentanten der Flächenmomente um die Coordinatenaxen auf letzteren als Strecken auf und setzt sie zu einer Resultirenden zusammen, so giebt dieselbe nach Grösse den Repräsentanten jenes Maximalwerthes, nach Richtung die Normale auf der invariabeln Ebene.

Wirken entweder keine äussern Kräfte oder sind dieselben unabhängig vom Ort und mit der Masse proportional, so gilt der Satz von der Erhaltung der Flächen auch für ein mit dem Massenmittelpunkt bewegtes Coordinatensystem, wie dies aus den Formeln (101′) hervorgeht.

Wirken äussere Kräfte, die für alle Massenpunkte nach einer festen oder beweglichen Axe hingerichtet sind, so gilt der Flächensatz nur noch für diese eine Axe, wirken Kräfte, die nach einem festen oder beweglichen Centrum hingerichtet sind, so gilt er für jede durch diesen Punkt gehende Axe. Denn Kräfte der angegebenen Art geben keinen Antheil zu dem Drehungsmoment um dergleichen Axen, treten also in den Formeln (102) gar nicht auf.

3. Multiplicirt man die drei Gleichungen (98′) resp. mit

$$\frac{dx_h}{dt}dt = dx_h, \qquad \frac{dy_h}{dt}dt = dy_h, \qquad \frac{dz_h}{dt}dt = dz_h$$

und summirt sie für alle Massenpunkte, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_h \frac{m_h}{2}\frac{dV_h^2}{dt} = \sum_h\sum_k (X_{hk}\,dx_h + Y_{hk}\,dy_h + Z_{hk}\,dz_h) \\ + \sum_h (X_h\,dx_h + Y_h\,dy_h + Z_h\,dz_h).\end{aligned} \tag{104}$$

Hier steht unter der einfachen Summe rechts und links nach (77) und (78″) resp. die von den äussern Kräften während dt an m_h geleistete Arbeit dA_h und der bezügliche Zuwachs der lebendigen Kraft $d\Psi_h$. Für die Doppelsumme erhält man bei Anwendung des p. 113 und 114 eingeschlagenen Weges auf alle Combinationen zweier Massen m_h und m_k den Werth $-\Sigma K_{hk}\,dr_{hk}$; bei Einführung des Potentiales Φ_{hk} ihrer Wechselwirkung gelangt man demnach schliesslich zu

$$\sum_h d\Psi_h = -\sum_{hk} d\Phi_{hk} + \sum_h dA_h. \tag{104′}$$

Hierin ist $\Sigma\Psi_h = \Psi$ die Summe aller lebendigen Kräfte oder die gesammte lebendige Kraft des Systems; $\Sigma\Phi_{hk} = \Phi$ ist die Summe der Potentiale aller einzelnen Wechselwirkungen oder das Potential des Massensystemes auf sich selbst; $\Sigma dA_h = dA$ ist die Summe aller von äussern Kräften während dt geleisteten Arbeiten.

Demnach kann man unter Einführung der Energie $E = \Psi + \Phi$ auch schreiben

$$dE = d(\Psi + \Phi) = dA, \tag{104″}$$

d. h. der Zuwachs der Energie eines unter innern Central- und beliebigen äussern Kräften stehenden Massensystemes während dt ist gleich der an demselben in der gleichen Zeit von den äussern Kräften geleisteten Arbeit.

Diese Formel, welche eine ausserordentliche Erweiterung der in § 11 abgeleiteten Gleichung der lebendigen Kraft (77') für einen einzelnen Massenpunkt bildet, heisst kurz die Gleichung der Energie für ein Punktsystem. Das Wesentliche ihres Inhaltes ist, dass für ein System, welches der gemachten Annahme entspricht, dass seine innern Kräfte ein Potential besitzen, der Betrag von Arbeit, der erforderlich ist, um das System aus einem für jeden Punkt ganz beliebig gegebenen Anfangszustand in einen eben so beliebigen Endzustand überzuführen, nur von diesen beiden Zuständen (d. h. dem Ort und der Geschwindigkeit jedes Punktes) abhängt, aber nicht von den Zwischenzuständen, die bei dem Uebergang zu passiren sind, und dass diese Arbeit sich vollständig durch die Differenz der beiden Werthe einer Function der Orte und Geschwindigkeiten der Massenpunkte für den gegebenen Anfangs- und Endzustand bestimmt.

Wird also das System im Laufe der Veränderungen in einen schon früher dagewesenen Zustand zurückgeführt, so ist seine Energie die gleiche, der ganze Aufwand von Arbeit zwischen diesen beiden gleichen Zuständen ist gleich Null, oder es ist ein ebenso grosser positiver, als negativer Betrag aufgewandt, ebenso viel zugeführt, wie entnommen.

In dem speciellen Fall, dass äussere Kräfte nicht wirken, giebt unsere Gleichung (104') ein Integral:

$$E = \text{Const.},$$

d. h. für ein sich selbst überlassenes System ist die Energie constant, hebt sich also fortwährend die Aenderung von lebendiger Kraft und Potential auf. Diese Gleichung heisst der Satz von der Erhaltung der Energie.

Die Sätze über die Energie sind an die Bedingung geknüpft, dass die innern Kräfte des Systems ein Potential haben. Da man dies früher für einen speciellen Fall der in der Natur vorkommenden Möglichkeiten ansah, so hielt man es für selbstverständlich, dass die Sätze von der Energie sich in der Natur nicht allenthalben bewähren, und hob die Fälle hervor, in welchen sie gelten oder nicht gelten.

Lassen wir zum Beispiel einen Stein — d. h. ein System von Massenpunkten — aus der Ruhe unter der Wirkung der Schwere hinab bis auf eine weiche Unterlage fallen, welche die erlangte Geschwindigkeit aufhebt und betrachten wir den Anfangs- und Endzustand, so findet in beiden anscheinend Ruhe statt, also ist die lebendige Kraft Null; in beiden haben die Theile des Steines die gleiche Anordnung, also dasselbe Potential der Wechselwirkung: die Energien sind also in beiden gleich, ihre Differenz gleich Null. Hingegen ist die Arbeit, welche die Schwere bei dem Uebergang geleistet hat, gleich mgh,

wenn mg das Gewicht, h die Fallhöhe des Steines ist. Die Gleichung der Energie scheint demnach hier nicht zu gelten; ähnlich in zahllosen andern Fällen.

Indessen ist man in neuerer Zeit (seit Mitte des Jahrhunders) allmählich zu der Anschauung gekommen, dass dieser Widerspruch nur die Folge einer unvollständigen Betrachtungsweise ist, dass derselbe aber verschwindet, wenn man wirklich alle lebendigen Kräfte, alle Potentialänderungen, alle von aussen stattfindenden Einwirkungen berücksichtigt. Man ist dazu gekommen, das Wesen der Wärme in einer Bewegung der kleinsten Theilchen der Körper zu sehen, deren lebendige Kraft ein Maass der Temperatur ist, und so deren Entstehen auf mechanischem Wege durch eine Verwandlung sichtbarer, äusserer Bewegung in innere oder Molecularbewegung zu erklären. Man hat sich dann weiter davon überzeugt, dass die geringen Volumenänderungen der Körper, welche eine Erwärmung begleiten, zu sehr bedeutenden Veränderungen des Potentiales eines Körpers auf sich selbst Veranlassung geben. Man hat schliesslich die Vorstellung gefasst, dass die lebendige Kraft der Wärmebewegung ganz directe Vergrösserung oder Verminderung ohne mechanische Leistung erfahren kann vermittelst der Wärmeleitung durch die Oberfläche.

Unter Rücksicht auf diese früher unbeachtet gelassenen Einflüsse hat sich dann die Gleichung der Energie, wo man immer eine experimentelle Prüfung vorgenommen hat, in allen Theilen der Physik vollständig bewährt und gilt gegenwärtig in einigen derselben als ein Grundprincip, das, wie das Trägheitsprincip, nur durch den Vergleich der daraus gezogenen Folgerungen mit der Beobachtung bewiesen wird. Da man nur in wenigen Gebieten den analytischen Ausdruck für die Energie wirklich aufstellen kann, so ist das Wesentliche des Principes die Behauptung, dass es für jedes Massensystem eine Function seiner augenblicklichen Configuration, d. h. Anordnung und Geschwindigkeit, giebt, welche für jeden Zeitmoment um ebenso viel zunimmt, als die dem System von aussen zugeführte Wärmeenergie und mechanische Arbeit beträgt. In dieser Form bildet es eine der Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie.

Für manche Anwendungen ist eine kleine Umformung der Energiegleichung von Vortheil.

Sei in

$$d(\Psi + \Phi) = dA$$

Ψ die lebendige Kraft eines oder mehrerer, aus irgend welchen Gründen gesondert zu betrachtender, Punktsysteme und seien ξ, η, ζ die Schwerpunktscoordinaten eines dieser Systeme. Setzen wir dann für alle Punkte desselben $x_h = \xi + \xi_h$, $y_h = \eta + \eta_h$, $z_h = \zeta + \zeta_h$,

bezeichnen wir also mit ξ_h, η_h, ζ_h die Coordinaten der Masse m_h relativ zum Schwerpunkt, so ist:

$$\frac{m_h}{2}V_h^2 = \frac{m_h}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\xi_h}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{d\eta_h}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{d\zeta_h}{dt}\right) + \left(\frac{d\xi_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_h}{dt}\right)^2\right].$$

Summiren wir dies über alle Massen, für welche ξ, η, ζ der Massenmittelpunkt ist, so verschwindet das doppelte Product und es bleibt für die lebendige Kraft Ψ' des einen Systemes der Werth:

$$\Psi' = \frac{\omega'^2}{2}\sum m_h + \sum m_h \frac{\omega_h^2}{2},$$

worin nun ω' die Geschwindigkeit seines Massenmittelpunktes, ω_h die relative Geschwindigkeit von m_h in Bezug auf den Massenmittelpunkt bezeichnet.

Es erscheint also die lebendige Kraft in zwei Theile zerlegt, deren erster, die äussere lebendige Kraft, diejenige ist, welche das System haben würde, wenn alle Punkte die Geschwindigkeit ω des Massenmittelpunktes besässen, oder wenn alle Massen in demselben vereinigt wären, während der zweite, die innere lebendige Kraft, sich so bestimmt, als besässen alle Punkte nur die Geschwindigkeit ω_h relativ zum Massenmittelpunkt.

Demgemäss kann man auch für eine beliebige Anzahl von Massensystemen, z. B. von festen Körpern, dieselbe Zerlegung vornehmen und setzen:

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_a, \tag{105}$$

wobei Ψ_i und Ψ_a die innern und äussern lebendigen Kräfte bezeichnen.

Aehnliches gilt für das Potential Φ des Systemes auf sich selbst. Denn da dasselbe gleich ist der Summe über alle Einzelpotentiale $\Sigma\Phi_{hk}$, so kann man alle Φ_{hk}, die sich auf Punkte je eines Theiles beziehen, für sich zusammenfassen in Φ_i, in ein inneres Potential, alle, welche Punkte verschiedener Theile betreffen, in Φ_a, in ein äusseres Potential; demgemäss wird dann:

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_a, \tag{105'}$$

und man kann auch die Energie

$$E = \Psi + \Phi = E_i + E_a \tag{105''}$$

setzen, wo nun E_i besteht aus der Summe über die lebendigen Kräfte der innern (Rotations-, Schwingungs-, Molecular-) Bewegung jedes Theiles plus der über die Potentiale jedes Theiles auf sich selbst, E_a aus der Summe der lebendigen Kräfte der äussern Bewegung plus

der der Potentiale für die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Theilen.

Ist das ganze System äussern Kräften nicht ausgesetzt, so wird

$$d(E_i + E_a) = 0 \qquad (105''')$$

sein; in demselben Maasse, wie die äussere Energie abnimmt, muss die innere wachsen und umgekehrt.

Betrachten wir z. B. zwei Massensysteme, etwa feste Körper, die auf einander nur dann merkliche Kräfte ausüben, wenn einzelne Theile einander unendlich nahe gekommen sind, so haben wir einen Vorgang, der mit dem, welchen wir als den Stoss zweier endlicher Körper bezeichnen, sehr nahe übereinstimmt und uns ein Beispiel für oben angestellte allgemeine Betrachtungen giebt.

Sind M_1 und M_2 die gesammten Massen, sind u_1^0, v_1^0, w_1^0 und u_2^0, v_2^0, w_2^0 die Massenmittelpunktsgeschwindigkeiten vor, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die nach dem Stoss, so giebt der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes, angewandt auf diese beiden Zeitpunkte, die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_1 u_1 + M_2 u_2 &= M_1 u_1^0 + M_2 u_2^0, \\ M_1 v_1 + M_2 v_2 &= M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0, \\ M_1 w_1 + M_2 w_2 &= M_1 w_1^0 + M_2 w_2^0. \end{aligned} \qquad (106)$$

Wendet man die Gleichung (105''') auf dieselben beiden Momente an, in denen nach der Annahme die Wechselwirkung zwischen den beiden Massen verschwindend ist, also ihr Potential Φ_a denselben Werth hat, so nimmt sie die Form an:

$$\Psi_a + E_i = \Psi_a^0 + E_i^0, \qquad (106')$$

wo der obere Index ^{0} dem Moment vor dem Stoss entspricht.

Die lebendige Kraft der Massenmittelpunktsbewegung ist also nur dann durch den Stoss nicht geändert, wenn die Summe der innern Energien beider Massen gleich geblieben ist; dies würde z. B. bei absolut starren Körpern stattfinden, die weder einer Deformation noch einer Bewegung ihrer kleinsten Theilchen fähig sind, falls der Stoss für sie keine Aenderung der Rotationsbewegungen zur Folge hat. In diesem speciellen Falle gelten die p. 20 abgeleiteten Gesetze des Zusammenstosses von zwei Massenpunkten auch für die endlichen Massen. Dass jene früheren Formeln überhaupt gefunden werden konnten, hat seinen Grund darin, dass bei einem Massenpunkt die innere Energie als unendlich klein angesehen werden kann. Bei endlichen, deformirbaren und schwingungsfähigen Körpern wird in Folge des Stosses die innere Energie sich ändern und es können demgemäss für sie jene einfachen Stossformeln nicht gelten. Die Aufsuchung der in diesen allgemeinen

Fällen geltenden Gesetze bietet selbst bei geradem Stosse grosse Schwierigkeiten dar.

Nur ein extremer Fall erledigt sich mit grosser Leichtigkeit, nämlich der, dass die Körper **absolut weich** sind, so dass sie nach dem Zusammenstoss mit einander verbunden weitergehen, also $u_1 = u_2 = U$, $v_1 = v_2 = V$, $w_1 = w_2 = W$ ist. Dann folgt aus (106):

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)\,V &= M_1 u_1^0 + M_2 u_2^0, \\ (M_1 + M_2)\,U &= M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0, \\ (M_1 + M_2)\,W &= M_1 w_1^0 + M_2 w_2^0 \end{aligned} \tag{107}$$

und dadurch die vollständige Bestimmung der resultirenden Massenmittelpunktsgeschwindigkeit; die Formel (106') giebt dagegen die beim Stosse eintretende Veränderung der innern Energie:

$$\begin{aligned} E_i - E_i^0 = \Psi_a^0 - \Psi_a = \frac{M_1}{2}(u_1^{0^2} + v_1^{0^2} + w_1^{0^2}) + \frac{M_2}{2}(u_2^{0^2} + v_2^{0^2} + w_2^{0^2}) \\ - \frac{M_1 + M_2}{2}(U^2 + V^2 + W^2). \end{aligned}$$

Setzt man hierin rechts die Werthe von U, V, W aus (107) ein, so erhält man nach leichter Reduction:

$$E_i - E_i^0 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\left[(u_2^0 - u_1^0)^2 + (v_2^0 - v_1^0)^2 + (w_2^0 - w_1^0)^2\right].$$

Der Ausdruck rechts ist eine stets positive Grösse; daraus folgt, dass beim Zusammenstoss zweier absolut weicher Körper die äussere lebendige Kraft stets **ab-**, die innere Energie stets **zunimmt**. Soweit dieser Zuwachs zu einer Vergrösserung der lebendigen Kraft der Molecüle dient, wird er eine Steigerung der Temperatur der Körper zur Folge haben.

Zweiter Theil.

Mechanik starrer Körper.

§ 16. Allgemeinste unendlich kleine Lagenänderung eines starren Systems. Verschiebungen und Drehungen.

Ein Massensystem, z. B. einen Körper, den wir als ein System von unendlich vielen, unendlich nahen Massenpunkten ansehen, nennen wir starr, wenn seine einzelnen Theile durch die innern Kräfte des Systems in ihrer gegenseitigen Lage unveränderlich festgehalten werden. Verbindet man also mit einem starren System ein rechtwinkliges Coordinatensystem A, B, C, dessen Lage bestimmt ist, wenn zwei Massenpunkte gegeben sind, durch welche die X-, einer, durch welchen die Y-Axe gehen soll, so sind die Coordinaten a, b, c aller Massenpunkte in Bezug auf dies System mit der Zeit unveränderlich. Die Lage des starren Körpers ist deshalb vollständig bestimmt, wenn die Lage des Coordinatensystems A, B, C gegen ein im Raum festes X, Y, Z gegeben ist. Diese bestimmt sich durch sechs Unabhängige, die Coordinaten des Anfangspunktes von ABC und drei von den neun Winkeln zwischen den Axenrichtungen. Es handelt sich für uns zunächst darum, aufzusuchen, wie eine unendlich kleine Aenderung der Lage des starren Systems mit den Aenderungen dieser Unabhängigen in Zusammenhang steht.

Zwischen den Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Körpers in Bezug auf das feste und den Coordinaten a, b, c in Bezug auf das mit dem Körper bewegliche System mögen die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= y_0 + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= z_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c, \end{aligned} \tag{1}$$

die umgekehrt liefern:

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 (x - x_0) + \beta_1 (y - y_0) + \gamma_1 (z - z_0), \\ b &= \alpha_2 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0) + \gamma_2 (z - z_0), \\ c &= \alpha_3 (x - x_0) + \beta_3 (y - y_0) + \gamma_3 (z - z_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Hierin sind x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Anfangspunktes p des im Körper festen Systems gegen das absolut feste. Die neun Cosinus $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ der Winkel zwischen den Axen sind verbunden durch die sechs Relationen:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, & 0 &= \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3, \\ 1 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, & 0 &= \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3, \\ 1 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, & 0 &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \end{aligned} \tag{3}$$

welche auch auf die Form zu bringen sind:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, & 0 &= \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, \\ 1 &= \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & 0 &= \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, \\ 1 &= \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, & 0 &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus ihnen fliessen, vorausgesetzt, dass die beiden Coordinatensysteme congruent sind, auch die neun Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Da bei allen Bewegungen die Coordinaten a, b, c der Punkte des Körpers gegen das in ihm feste System ungeändert bleiben sollen, so kann eine Bewegung nur Veränderungen der x_0, y_0, z_0 und $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ hervorrufen.

Wir erhalten demnach für eine beliebige, unendlich kleine Verrückung die Werthe der Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ der Coordinaten x, y, z:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 + a\,\delta\alpha_1 + b\,\delta\alpha_2 + c\,\delta\alpha_3, \\ \delta y &= \delta y_0 + a\,\delta\beta_1 + b\,\delta\beta_2 + c\,\delta\beta_3, \\ \delta z &= \delta z_0 + a\,\delta\gamma_1 + b\,\delta\gamma_2 + c\,\delta\gamma_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Aber die Variationen der $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ sind nicht von einander unabhängig, sondern es gelten für sie die aus (3) durch Variation folgenden sechs Gleichungen:

$$0 = \alpha_1\,\delta\alpha_1 + \alpha_2\,\delta\alpha_2 + \alpha_3\,\delta\alpha_3,$$
$$0 = \beta_1\,\delta\gamma_1 + \beta_2\,\delta\gamma_2 + \beta_3\,\delta\gamma_3 + \gamma_1\,\delta\beta_1 + \gamma_2\,\delta\beta_2 + \gamma_3\,\delta\beta_3 \quad \text{u. s. f.}$$

Um die neun $\delta\alpha_h, \delta\beta_h, \delta\gamma_h$ durch drei unabhängige Grössen auszudrücken, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \beta_1\,\delta\gamma_1 + \beta_2\,\delta\gamma_2 + \beta_3\,\delta\gamma_3, \\ \delta\mu &= \gamma_1\,\delta\alpha_1 + \gamma_2\,\delta\alpha_2 + \gamma_3\,\delta\alpha_3, \\ \delta\nu &= \alpha_1\,\delta\beta_1 + \alpha_2\,\delta\beta_2 + \alpha_3\,\delta\beta_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei ist wohl zu bemerken, dass $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ nicht stets die Form der Variationen von (geometrisch interpretirbaren) Functionen besitzen,

wie δx_0, δy_0, δz_0, sondern zunächst nur unendlich kleine Grössen bezeichnen.

Es gelten dann z. B. zur Bestimmung von $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$ folgende Formeln:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_1\,\delta\alpha_1 + \alpha_2\,\delta\alpha_2 + \alpha_3\,\delta\alpha_3,\\ -\,\delta\nu &= \beta_1\,\delta\alpha_1 + \beta_2\,\delta\alpha_2 + \beta_3\,\delta\alpha_3,\\ +\,\delta\mu &= \gamma_1\,\delta\alpha_1 + \gamma_2\,\delta\alpha_2 + \gamma_3\,\delta\alpha_3;\end{aligned}$$

aus ihnen folgt durch die Factoren α_1, β_1, γ_1 in Rücksicht auf (4):

$$\delta\alpha_1 = \gamma_1\,\delta\mu - \beta_1\,\delta\nu,$$

ebenso durch die Factoren α_2, β_2, γ_2 und α_3, β_3, γ_3:

$$\begin{aligned}\delta\alpha_2 &= \gamma_2\,\delta\mu - \beta_2\,\delta\nu,\\ \delta\alpha_3 &= \gamma_3\,\delta\mu - \beta_3\,\delta\nu.\end{aligned} \tag{8}$$

Diesem System ordnen sich die ebenso erhaltenen folgenden zu:

$$\begin{aligned}\delta\beta_1 &= \alpha_1\,\delta\nu - \gamma_1\,\delta\lambda, & \delta\gamma_1 &= \beta_1\,\delta\lambda - \alpha_1\,\delta\mu,\\ \delta\beta_2 &= \alpha_2\,\delta\nu - \gamma_2\,\delta\lambda, & \delta\gamma_2 &= \beta_2\,\delta\lambda - \alpha_2\,\delta\mu,\\ \delta\beta_3 &= \alpha_3\,\delta\nu - \gamma_3\,\delta\lambda, & \delta\gamma_3 &= \beta_3\,\delta\lambda - \alpha_3\,\delta\mu.\end{aligned} \tag{8'}$$

Setzt man diese Werthe in (6) ein, so ergiebt sich:

$$\delta x = \delta x_0 + a(\gamma_1\,\delta\mu - \beta_1\,\delta\nu) + b(\gamma_2\,\delta\mu - \beta_2\,\delta\nu) + c(\gamma_3\,\delta\mu - \beta_3\,\delta\nu),$$

oder in Rücksicht auf (1):

$$\delta x = \delta x_0 + (z - z_0)\,\delta\mu - (y - y_0)\,\delta\nu,$$

ebenso

$$\begin{aligned}\delta y &= \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta\nu - (z - z_0)\,\delta\lambda,\\ \delta z &= \delta z_0 + (y - y_0)\,\delta\lambda - (x - x_0)\,\delta\mu.\end{aligned} \tag{9}$$

Diese Formeln geben die bei einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung des Körpers eintretenden Coordinatenänderungen irgend eines seiner Punkte; jene erscheinen also als die Summen einzelner mit den δx_0, δy_0, δz_0, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ proportionaler Theile, deren Bedeutung wir leicht erkennen, wenn wir die speciellen Fälle betrachten, die resultiren, falls jene Grössen alle bis auf je eine verschwinden.

Ist nur δx_0 von Null verschieden, so ergiebt sich:

$$\delta x = \delta x_0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0;$$

dies drückt eine allen Punkten gemeinsame Verschiebung parallel der X-Axe um δx_0 aus, denn die Coordinaten x, y, z treten in diesen Formeln nicht auf. Wir benutzen der Bequemlichkeit halber auch weiterhin das Wort „Verschiebung" für diesen speciellen Fall einer parallelen gleichen Bewegung aller Theile und verstehen unter „Ver-

rückung" die allgemeinste Bewegung. Das Analoge wie für δx_0 gilt für die Fälle, dass nur δy_0 oder nur δz_0 nicht verschwindet.

$$\delta x = \delta x_0, \qquad \delta y = \delta y_0, \qquad \delta z = \delta z_0$$

zusammengenommen giebt eine resultirende Verschiebung δs von der Grösse:

$$\delta s = \sqrt{(\delta x_0)^2 + (\delta y_0)^2 + (\delta z_0)^2},$$

in einer Richtung s, für welche:

$$\cos(s, x) = \frac{\delta x_0}{\delta s}, \qquad \cos(s, y) = \frac{\delta y_0}{\delta s}, \qquad \cos(s, z) = \frac{\delta z_0}{\delta s}.$$

Ist nur $\delta\lambda$ von Null verschieden, so erhält man:

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = -(z - z_0)\,\delta\lambda, \qquad \delta z = +(y - y_0)\,\delta\lambda.$$

Dies giebt keinen für alle Punkte gleichen Werth der Coordinatenänderungen, denn δy und δz sind von y und z abhängig. Die Bewegung findet in einer Ebene parallel zur YZ-Ebene statt; sie hat die Grösse

$$\delta s_x = \delta\lambda \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

und eine Richtung, gegeben durch

$$\cos(s_x, y) = \frac{-(z - z_0)}{\sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \qquad \cos(s_x, z) = \frac{+(y - y_0)}{\sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Nun ist

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \varrho_x$$

der senkrechte Abstand des Punktes x, y, z von der Parallelen zur X-Axe durch die Stelle x_0, y_0, z_0; die durch $\delta\lambda$ gegebene Verrückung ist also proportional mit ϱ_x und findet normal zu dessen Richtung statt; sie ist demgemäss eine Drehung des starren Systemes um den Winkel

$$\delta s_x / \varrho_x = \delta\lambda,$$

die Drehungsaxe ist die Gerade $y = y_0$, $z = z_0$.

Wir wollen nun auf der Drehungsaxe eine Richtung positiv, die entgegengesetzte negativ nennen und dann allgemein eine Drehung als positiv bezeichnen, wenn sie sich für einen in der Drehungsaxe mit dem Kopf nach der positiven Seite liegenden Beobachter als von rechts nach links stattfindend darstellt. Dieselbe Drehung stellt sich dann dem nach der negativen Seite der Axe liegenden Beobachter auch negativ gerichtet dar.

Nach dieser Festsetzung ergiebt ein positiver resp. negativer Werth von $\delta\lambda$ eine positive resp. negative Drehung um die Parallele zur positiven X-Axe durch x_0, y_0, z_0.

Es ist für manche Anwendungen vortheilhaft, ausschliesslich mit positiven Drehungen zu operiren und demgemäss für jede gegebene Drehung die positive Richtung der Drehungsaxe passend zu wählen. Dadurch wird der Drehungswinkel um eine beliebige Axe zu einer Vectorgrösse, die man durch eine auf ihrer Axenrichtung aufgetragene Länge repräsentiren kann. —

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen kehren wir zu unserm speciellen Problem zurück.

Wie durch $\delta\lambda$ eine Drehung um eine Parallele zur X-Axe, so ist durch $\delta\mu$ und $\delta\nu$ je eine Drehung um Parallele zur Y- und Z-Axe durch die Stelle x_0, y_0, z_0 gegeben, für die Alles gilt, was in Bezug auf erstere gesagt ist.

Sind alle drei Werthe $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ von Null verschieden, so haben wir:

$$\begin{aligned} \delta x &= (z - z_0)\,\delta\mu - (y - y_0)\,\delta\nu, \\ \delta y &= (x - x_0)\,\delta\nu - (z - z_0)\,\delta\lambda, \\ \delta z &= (y - y_0)\,\delta\lambda - (x - x_0)\,\delta\mu, \end{aligned} \tag{9'}$$

also Verrückungen, die durch successive oder gleichzeitige Hervorbringung von den drei soeben betrachteten Drehungen eintreten würden.

Die Formeln zeigen, dass dabei alle diejenigen Punkte keinerlei Verschiebung erleiden, für welche

$$(x - x_0):(y - y_0):(z - z_0) = \delta\lambda : \delta\mu : \delta\nu$$

ist; die durch sie gegebene Bewegung muss also eine Drehung um eine durch den Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ gehende Axe α sein, deren Richtung mit den Coordinatenaxen Winkel einschliesst, die gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha, x) &= \frac{\delta\lambda}{\sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}}, \\ \cos(\alpha, y) &= \frac{\delta\mu}{\sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}}, \\ \cos(\alpha, z) &= \frac{\delta\nu}{\sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die resultirende Verschiebung $\delta\sigma$ ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned} \delta\sigma^2 &= \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 \\ &= (\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2)\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right) \\ &\quad - \left((x - x_0)\,\delta\lambda + (y - y_0)\,\delta\mu + (z - z_0)\,\delta\nu\right)^2. \end{aligned}$$

Der Drehungswinkel $\delta\tau$ muss sich bestimmen durch Division von $\delta\sigma$ durch den Abstand ε der Stelle xyz von der Drehungsaxe. Nach der Figur 15 ist

$$\varepsilon = \varrho \sin(\varrho, \alpha);$$

benutzt man, dass gilt:

$$\varrho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

$$\cos(\varrho, \alpha) = \frac{(x - x_0)\,\delta\lambda + (y - y_0)\,\delta\mu + (z - z_0)\,\delta\nu}{\varrho\sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}},$$

so erhält man:

$$\varepsilon^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \frac{\left((x - x_0)\,\delta\lambda + (y - y_0)\,\delta\mu + (z - z_0)\,\delta\nu\right)^2}{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}.$$

Hiernach ist also:

$$\delta\sigma^2 = \varepsilon^2(\delta\lambda^2 + \delta\nu^2 + \delta\mu^2)$$

und daher das Quadrat der resultirenden Drehung:

$$\delta\tau^2 = \delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2.$$

Giebt man der Wurzelgrösse das positive Vorzeichen, rechnet also den Drehungswinkel

$$\delta\tau = \sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2} \quad (10')$$

als stets positiv, so ist damit zugleich der Drehungsaxe α eine positive und negative Seite beigelegt, und

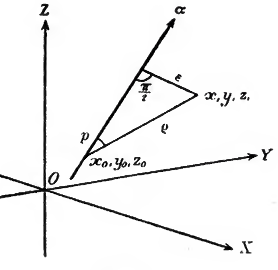


Fig. 15.

man erkennt leicht, dass dann die Formeln (10) unmittelbar die positive Richtung der Axe α bestimmen, nämlich diejenige, um welche die Drehung vom Betrage $\delta\tau$ in positiver Richtung stattfindet. Denn lässt man $\delta\mu$ und $\delta\nu$, oder $\delta\nu$ und $\delta\lambda$, oder $\delta\lambda$ und $\delta\mu$ verschwinden, so wird α derjenigen Richtung der Coordinatenaxen parallel, um welche die durch $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ gegebenen Drehungen in positiver Richtung stattfinden.

Demgemäss können wir den Inhalt der Gleichungen (10) und (10') folgendermassen aussprechen.

Drei successive oder gleichzeitige Drehungen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ um Parallele zu den Coordinatenaxen durch einen beliebigen Punkt p sind jederzeit äquivalent mit einer einzigen Drehung $\delta\tau$ um eine durch denselben Punkt gehende Axe α.

Trägt man auf den Coordinatenaxen Repräsentanten der Partialdrehungen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ auf und setzt dieselben nach

der Regel des Parallelepipedons zu einer Resultirenden zusammen, so ist diese der Repräsentant der resultirenden Drehung $\delta\tau$, ihre Richtung giebt zugleich die positive Richtung der Drehungsaxe α.

Dieser Satz ist sogleich umkehrbar. —

Nach dem im Vorstehenden Entwickelten erscheint die allgemeinste unendlich kleine Verrückung eines starren Systems in den Gleichungen (9) nunmehr zerlegt in drei gemeinsame Verschiebungen aller Punkte des Systems parallel den festen Coordinatenaxen um resp. δx_0, δy_0, δz_0 und in drei Drehungen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ um Parallele zu den Coordinatenaxen durch die völlig willkürliche Stelle x_0, y_0, z_0 — oder aber in eine gemeinsame Verschiebung von der Grösse

$$\delta s = \sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2 + \delta z_0^2}$$

in der Richtung s gegeben durch

$$\cos(s,x) = \frac{\delta x_0}{\delta s}, \qquad \cos(s,y) = \frac{\delta y_0}{\delta s}, \qquad \cos(s,z) = \frac{\delta z_0}{\delta s}$$

und eine Drehung von dem Betrag

$$\delta\tau = \sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}$$

um eine Axe durch die Stelle x_0, y_0, z_0, deren positive Richtung α gegeben ist durch

$$\cos(\alpha,x) = \frac{\delta\lambda}{\delta\tau}, \qquad \cos(\alpha,y) = \frac{\delta\mu}{\delta\tau}, \qquad \cos(\alpha,z) = \frac{\delta\nu}{\delta\tau}.$$

Wir können die Gleichungen (9) aber noch anders deuten.

Setzen wir nämlich in ihnen x, y, z gleich Null, so erhalten wir die Verrückungen $(\delta x)_0$, $(\delta y)_0$, $(\delta z)_0$, welche derjenige Punkt erleidet, der sich ursprünglich im Anfang des Systems X, Y, Z befand, und wir können daher die Formeln (9) schreiben:

$$\begin{aligned} \delta x &= (\delta x)_0 + z\,\delta\mu - y\,\delta\nu, \\ \delta y &= (\delta y)_0 + x\,\delta\nu - z\,\delta\lambda, \\ \delta z &= (\delta z)_0 + y\,\delta\lambda - x\,\delta\mu. \end{aligned} \tag{9''}$$

Die allgemeinste unendlich kleine Verrückung des starren Systems erscheint hiernach zerlegt in eine allen Punkten gemeinsame Verschiebung, gleich der, welche der Punkt $x = y = z = 0$ erleidet, und in drei Drehungen um die festen Coordinatenaxen selbst — oder auch in eine gemeinsame Verschiebung von der Grösse

$$(\delta s)_0 = \sqrt{(\delta x)_0^2 + (\delta y)_0^2 + (\delta z)_0^2}$$

in der Richtung s_0 gegeben durch

$$\cos(s_0, x) = \frac{(\delta x)_0}{(\delta s)_0}, \qquad \cos(s_0, y) = \frac{(\delta y)_0}{(\delta s)_0}, \qquad \cos(s_0, z) = \frac{(\delta z)_0}{(\delta s)_0}$$

und eine Drehung von der Grösse

$$\delta\tau = \sqrt{\delta\lambda^2 + \delta\mu^2 + \delta\nu^2}$$

um eine Axe α durch den festen Coordinatenanfang gegeben durch

$$\cos(\alpha, x) = \frac{\delta\lambda}{\delta\tau}, \qquad \cos(\alpha, y) = \frac{\delta\mu}{\delta\tau}, \qquad \cos(\alpha, z) = \frac{\delta\nu}{\delta\tau}.$$

Zugleich ergiebt die Vergleichung der Formeln (9″) mit (9) den Satz:

Eine Drehung um eine Axe α_0 durch die Stelle x_0, y_0, z_0 lässt sich ersetzen durch eine gleiche Drehung um eine zu α_0 parallele Axe durch den Coordinatenanfang und eine Verschiebung, deren Componenten sind:

$$y_0\,\delta\nu - z_0\,\delta\mu, \qquad z_0\,\delta\lambda - x_0\,\delta\nu, \qquad x_0\,\delta\mu - y_0\,\delta\lambda.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes kann man auch eine Drehung um eine zu α_0 parallele Axe durch einen beliebigen Punkt einführen.

Dies giebt nun auch die Mittel an die Hand, Verschiebungen δs_k parallel beliebigen Richtungen s_k und Drehungen $\delta\tau_h$ um beliebig gelegene Axen α_h durch die Punkte x_h, y_h, z_h zusammenzusetzen.

Die gegebenen Verschiebungen sind an und für sich, als allen Punkten gemeinsam, in den festen Coordinatenanfang übertragbar und geben dort Componentensummen

$$\sum_k \delta x_k = \sum_k \delta s_k \cos(s_k, x), \qquad \sum_k \delta y_k = \sum_k \delta s_k \cos(s_k, y),$$
$$\sum_k \delta z_k = \sum_k \delta s_k \cos(s_k, z).$$

Die Drehungen $\delta\tau_h$ sind parallel den Coordinatenaxen zu zerlegen in die Componenten:

$$\delta\lambda_h = \delta\tau_h \,.\, \cos(\alpha_h, x), \qquad \delta\mu_h = \delta\tau_h \,.\, \cos(\alpha_h, y), \qquad \delta\nu_h = \delta\tau_h \,.\, \cos(\alpha_h, z)$$

und darnach ihre Axen in den Coordinatenanfang zu verlegen. So resultirt:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \Big(\sum_k \delta x_k - \sum_h z_h\,\delta\mu_h + \sum_h y_h\,\delta\nu_h\Big) + z\sum_h \delta\mu_h - y\sum_h \delta\nu_h,\\
\delta y &= \Big(\sum_k \delta y_k - \sum_h x_h\,\delta\nu_h + \sum_h z_h\,\delta\lambda_h\Big) + x\sum_h \delta\nu_h - z\sum_h \delta\lambda_h, \qquad (11)\\
\delta z &= \Big(\sum_k \delta z_k - \sum_h y_h\,\delta\lambda_h + \sum_h x_h\,\delta\mu_h\Big) + y\sum_h \delta\lambda_h - x\sum_h \delta\mu_h,
\end{aligned}$$

und dies giebt nach (9″) eine Verschiebung des zuvor an der Stelle $x = y = z = 0$ gelegenen Punktes mit den Componenten

$$\begin{aligned} (\delta x)_0 &= \sum_k \delta x_k - \sum_h z_h \, \delta \mu_h + \sum_h y_h \, \delta \nu_h, \\ (\delta y)_0 &= \sum_k \delta y_k - \sum_h x_h \, \delta \nu_h + \sum_h z_h \, \delta \lambda_h, \\ (\delta z)_0 &= \sum_k \delta z_k - \sum_h y_h \, \delta \lambda_h + \sum_h x_h \, \delta \mu_h \end{aligned} \tag{11'}$$

und eine Drehung um eine Axe durch den Punkt $x = y = z = 0$ mit den Componenten

$$\delta \lambda = \sum_h \delta \lambda_h, \qquad \delta \mu = \sum_h \delta \mu_h, \qquad \delta \nu = \sum_h \delta \nu_h. \tag{11''}$$

Legt man die Z-Axe in die Drehungsaxe, so ist $\delta \lambda = \delta \mu = 0$ und

$$\begin{aligned} \delta x &= (\delta x)_0 - y \, \delta \nu, \\ \delta y &= (\delta y)_0 + x \, \delta \nu, \\ \delta z &= (\delta z)_0. \end{aligned} \tag{12'}$$

Führt man dann noch ein zu diesem paralleles Coordinatensystem X', Y', Z' ein, so dass

$$x' = x + \frac{(\delta y)_0}{\delta \nu}, \qquad y' = y - \frac{(\delta x)_0}{\delta \nu}, \qquad z' = z$$

ist, so resultirt:

$$\delta x' = - y' \, \delta \nu, \qquad \delta y' = + x' \, \delta \nu, \qquad \delta z' = (\delta z')_0, \tag{12''}$$

d. h. die Verrückung reducirt sich auf eine Drehung um eine bestimmte Axe und auf eine Verschiebung parallel dieser Axe. Eine solche Bewegung nennt man eine Schraubenbewegung. Daher ergiebt sich der Satz:

Beliebige Verschiebungen und Drehungen eines starren Systemes lassen sich jederzeit zusammensetzen zu einer einfachen Schraubenbewegung um eine bestimmte Axe.

Die sie definirenden Grössen folgen aus den vorstehenden Formeln (11) bis (12″). —

Da sich Drehungen um Axen, die durch denselben Punkt gehen, in Componenten zerlegen und zu Resultirenden zusammensetzen lassen, wie Kräfte, die auf denselben Punkt wirken, so lassen sie sich auch durch dieselben Formeln auf ein neues Coordinatensystem transformiren, die für jene gelten.

So werden z. B. die Drehungen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ um die im starren System festen Axen A, B, C durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \alpha_1\,\delta\lambda + \beta_1\,\delta\mu + \gamma_1\,\delta\nu,\\ \delta\beta &= \alpha_2\,\delta\lambda + \beta_2\,\delta\mu + \gamma_2\,\delta\nu,\\ \delta\gamma &= \alpha_3\,\delta\lambda + \beta_3\,\delta\mu + \gamma_3\,\delta\nu,\end{aligned} \tag{13}$$

Formeln, die sich umkehren lassen in:

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \alpha_1\,\delta\alpha + \alpha_2\,\delta\beta + \alpha_3\,\delta\gamma,\\ \delta\mu &= \beta_1\,\delta\alpha + \beta_2\,\delta\beta + \beta_3\,\delta\gamma,\\ \delta\nu &= \gamma_1\,\delta\alpha + \gamma_2\,\delta\beta + \gamma_3\,\delta\gamma.\end{aligned} \tag{13'}$$

Durch die $\delta\alpha_h$, $\delta\beta_h$, $\delta\gamma_h$ drücken sich die $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ ohne alle Rechnung aus, wenn man bedenkt, dass sie zu den Formeln (2) in derselben Beziehung stehen müssen, wie $-\delta\lambda$, $-\delta\mu$, $-\delta\nu$ zu den Formeln (1). Denn eine positive Drehung des Coordinatensystems gegen den Körper kann durch eine negative des Körpers gegen das Coordinatensystem ersetzt werden. Demgemäss muss gelten:

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \alpha_3\,\delta\alpha_2 + \beta_3\,\delta\beta_2 + \gamma_3\,\delta\gamma_2,\\ \delta\beta &= \alpha_1\,\delta\alpha_3 + \beta_1\,\delta\beta_3 + \gamma_1\,\delta\gamma_3,\\ \delta\gamma &= \alpha_2\,\delta\alpha_1 + \beta_2\,\delta\beta_1 + \gamma_2\,\delta\gamma_1.\end{aligned} \tag{13''}$$

Man verificirt dies leicht, indem man die Werthe der $\delta\alpha_h$, $\delta\beta_h$, $\delta\gamma_h$ aus (8) entnimmt und einsetzt; dann ergiebt sich unter Rücksicht auf die Gleichungen (5) sogleich das System (13). Ferner gilt aus demselben Grund:

$$\begin{aligned}&\delta\alpha_1 = \alpha_2\delta\gamma - \alpha_3\delta\beta, \quad \delta\alpha_2 = \alpha_3\delta\alpha - \alpha_1\,\delta\gamma, \quad \delta\alpha_3 = \alpha_1\delta\beta - \alpha_2\delta\alpha,\\ &\delta\beta_1 = \beta_2\delta\gamma - \beta_3\delta\beta, \quad \delta\beta_2 = \beta_3\delta\alpha - \beta_1\,\delta\gamma, \quad \delta\beta_3 = \beta_1\delta\beta - \beta_2\delta\alpha,\\ &\delta\gamma_1 = \gamma_2\delta\gamma - \gamma_3\delta\beta, \quad \delta\gamma_2 = \gamma_3\delta\alpha - \gamma_1\delta\gamma, \quad \delta\gamma_3 = \gamma_1\delta\beta - \gamma_2\delta\alpha.\end{aligned} \tag{13'''}$$

§ 17. Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungsmomenten; Ersetzung beliebiger auf ein starres System wirkender Kräfte durch eine Resultirende und ein Drehungsmoment.

Ist, wie wir im vorigen Abschnitt erörtert haben, die Lage eines starren Systems, z. B. eines starren Körpers, durch sechs Parameter bestimmt, so werden zur Bestimmung seiner Bewegung auch nur sechs Differentialgleichungen mit den zugehörigen Nebenbedingungen erforderlich sein. Wir haben nun in § 15 des ersten Theiles für die Massenpunkte eines unter äussern und innern Kräften stehenden Systemes die Bewegungsgleichungen aufgestellt; dieselben enthalten ausser den äussern Kräften noch die zwischen den einzelnen Punkten

stattfindenden Wechselwirkungen, welche, im Falle das System starr ist, als **Unbekannte** anzusehen sind, indirect bestimmt durch die Festsetzung, dass jeder Punkt vom andern eine constante Entfernung beibehalten soll. Um die Gesetze der Bewegung zu finden, sind hiernach sechs von einander unabhängige Combinationen sämmtlicher Bewegungsgleichungen zu bilden, die von jenen Wechselwirkungen frei sind.

Dergleichen Combinationen haben wir an der citirten Stelle bereits gebildet, nämlich die Gleichungen für die Bewegung des Massenmittelpunktes und die Flächensätze. Auch die Gleichung der Energie ist für ein starres System, in welchem das Potential Φ sich nicht ändern kann, da die Entfernungen r_{hk} constant sind, von den innern Kräften frei, reducirt sich also auf die Gleichung der lebendigen Kraft; da aber nur sechs Unbekannte vorhanden sind, so kann sie für ein starres System nicht von den genannten sechs Gleichungen unabhängig sein. Dies wird späterhin erwiesen werden.

Wir unterwerfen daher der Betrachtung die erstgenannten sechs Gleichungen; bezeichnet m_h die Masse eines Punktes des Systems, sind x_h, y_h, z_h seine Coordinaten und X_h, Y_h, Z_h die in ihm angreifenden äussern Kraftcomponenten, so lauten sie nach den Formeln (101) und (102):

$$\begin{aligned}
&\sum m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \sum X_h,\\
&\sum m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} = \sum Y_h,\\
&\sum m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} = \sum Z_h,\\
&\sum m_h \left(y_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} - z_h \frac{d^2 y_h}{dt^2}\right) = \sum (y_h Z_h - z_h Y_h),\\
&\sum m_h \left(z_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} - x_h \frac{d^2 z_h}{dt^2}\right) = \sum (z_h X_h - x_h Z_h),\\
&\sum m_h \left(x_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} - y_h \frac{d^2 x_h}{dt^2}\right) = \sum (x_h Y_h - y_h X_h).
\end{aligned} \tag{14}$$

Wir richten die Aufmerksamkeit besonders auf die Art und Weise, wie in ihnen die äussern Kräfte X_h, Y_h, Z_h auftreten.

Zwei Arten von Combinationen kommen allein vor, die **Componentensummen parallel den Coordinatenaxen**:

$$\sum X_h = X, \qquad \sum Y_h = Y, \qquad \sum Z_h = Z, \tag{15}$$

und die schon früher so genannten **Drehungsmomente um die Coordinatenaxen**:

$$\sum (y_h Z_h - z_h Y_h) = L, \quad \sum (z_h X_h - x_h Z_h) = M, \quad \sum (x_h Y_h - y_h X_h) = N. \tag{15'}$$

Die ersteren bestimmen nach p. 122 vollständig die Bewegung des Massenmittelpunktes. Da aber eine jede Bewegung nach dem Inhalte des vorigen Abschnittes sich zerlegen lässt in eine Verschiebung des Massenmittelpunktes und eine Drehung um eine durch ihn gelegte Axe — wobei sich Lage der Drehungsaxe und Grösse des Drehungswinkels symmetrisch durch die Componenten der Drehung um drei zu einander normale Axen ausdrücken — so müssen die Drehungsmomente diese Drehungen bestimmen, jene müssen also ein Maass der drehenden Wirkung der ausgeübten Kräfte geben. Hierdurch erklärt sich der für die Functionen L, M, N eingeführte Name der Drehungsmomente.

Ueber die Art und Weise, wie die auf einen Punkt wirkenden Kräfte sich zu Resultirenden zusammensetzen, nach beliebigen Richtungen zerlegen und auf neue Coordinatenrichtungen beziehen lassen, ist schon in § 5 des ersten Theiles ausführlich gesprochen; wir wollen nunmehr ähnliche Untersuchungen für die Drehungsmomente anstellen.

I. Wirke zunächst nur eine Kraft auf den Punkt x, y, z, so ist:

$$yZ - zY = L, \quad zX - xZ = M, \quad xY - yX = N. \qquad (15'')$$

Nennt man den Abstand des Punktes von der X-Axe ϱ_x, so ist $y = \varrho_x \cos(\varrho_x, y)$, $z = \varrho_x \cos(\varrho_x, z)$. Projicirt man die Kraft K auf eine durch x, y, z gehende, zur X-Axe normale Ebene und nennt die Projection K_x, so ist nach Figur 16:

$$Y = K_x \cos(K_x, y), \quad Z = K_x \cos(K_x, z),$$

Fig. 16.

und daher wird

$$L = \varrho_x K_x \sin(K_x, \varrho_x);$$

$\varrho_x \sin(K_x, \varrho_x)$ ist aber die Länge des Lothes v_x vom Anfangspunkt auf K_x, demgemäss wird:

$$L = \pm v_x K_x, \qquad \text{ebenso} \qquad M = \pm v_y K_y, \qquad N = \pm v_z K_z. \qquad (16)$$

Hierin ist, um die Drehungsmomente in dem Sinne ihrer Definitionen (15′) positiv zu erhalten, das positive Vorzeichen zu wählen, wenn v_h, von 0 aus positiv gerechnet, durch eine Drehung um 90° in positivem Sinne mit K_h parallel wird.

Die Längen v nennt man die Hebelarme der Kraft K in Bezug auf die Coordinatenaxen X, Y, Z; da nun die Lage der Coordinaten-

axen ganz willkürlich ist, so kann man die folgende allgemeine Definition aussprechen:

Das Drehungsmoment einer Kraft in Bezug auf eine beliebige Axe ist das Product aus der Componente der Kraft nach der Ebene normal zu jener Axe in den auf dieselbe bezüglichen Hebelarm.

Das Drehungsmoment ändert sich nicht, wenn die Lage und Grösse der Kraft variirt wird, so lange nur dieses Product denselben Werth behält.

Dasselbe behält z. B. seinen Werth, wenn man die Kraft in ihrer Richtung beliebig verschiebt, sodass ihr Angriffspunkt wechselt. Da hierbei die Kraftrichtung ungeändert bleibt, so behalten auch die Componenten ihre Werthe und man kann daher den Satz aussprechen:

Die Wirkung einer Kraft auf ein starres System ändert sich nicht, wenn man sie längs ihrer Richtung innerhalb des Systems beliebig verschiebt.

Demgemäss hat nun der für eine Kraft gegebene Angriffspunkt nur insofern Bedeutung, als er die Gerade festlegt, in welcher die Kraft liegt. —

Wir untersuchen jetzt, wie sich das Drehungsmoment einer Kraft um eine beliebige Axe d_1 durch den Coordinatenanfang durch diejenigen um die Coordinatenaxen ausdrücken lässt.

Sei die Richtung d_1 in die A-Axe eines neuen Coordinatensystems gelegt, dessen Lage durch die Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ b &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ c &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z; \end{aligned} \tag{17}$$

dann gelten für die Kraftcomponenten die analogen Formeln:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ B &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, \\ C &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z. \end{aligned} \tag{17'}$$

Das Drehungsmoment D_1 um die d_1- resp. A-Axe, welches nach der Definition sich schreibt:

$$D_1 = bC - cB,$$

wird durch Einsetzen dieser Werthe:

$$\begin{aligned} D_1 = (yZ - zY)(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + (zX - xZ)(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) \\ + (xY - yX)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \end{aligned}$$

und in Rücksicht auf (5) und (15′) auch:

$$D_1 = L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1, \tag{18}$$

wo nun $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus der Winkel zwischen der Axe d_1 und X, Y, Z sind.

Dies Resultat lässt sich noch anders ausdrücken.

Trägt man auf den X, Y, Z-Axen mit L, M, N proportionale Längen ab und setzt dieselbe zu einer Resultirenden zusammen, so wird deren Grösse D gegeben durch

$$D^2 = L^2 + M^2 + N^2, \tag{19}$$

ihre Richtung d durch

$$\cos(d, x) = \frac{L}{D}, \qquad \cos(d, y) = \frac{M}{D}, \qquad \cos(d, z) = \frac{N}{D}. \tag{19'}$$

Versteht man hierbei unter D eine stets positive Grösse, so geben diese Gleichungen diejenige Richtung für d als positiv, auf welche vom Coordinatenanfang hinweg die construirte Resultante fällt.

Setzt man dies in (18) ein, so folgt

$$D_1 = D \cos(d, d_1). \tag{20}$$

Diese Formel zeigt, dass D der specielle Werth des Drehungsmomentes D_1 für den Fall ist, dass die Axe d_1 in die Richtung von d fällt; das Moment wirkt in positivem Sinne um die durch (19') gegebene Richtung.

Ferner ergiebt sich, dass D das grösste Drehungsmoment ist, welches die gegebene Kraft um eine durch den Coordinatenanfang gehende Axe überhaupt ausüben kann; man nennt dasselbe ihr Hauptdrehungsmoment, und die Axe, um welche dieser Maximalwerth eintritt, die Hauptdrehungsaxe der Kraft durch den Coordinatenanfang.

Ihr Moment D_1 um jede andere durch diesen Punkt gehende Axe d_1 bestimmt sich aus dem Hauptmoment D, wie die Componente einer Kraft nach deren Richtung aus der parallel mit d liegenden Resultante, durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels zwischen den beiden Axenrichtungen; für Axen normal zur Hauptaxe ist das Moment gleich Null.

Das Hauptdrehungsmoment D kann man als die Resultante aus den Momenten um die Coordinatenaxen betrachten; denn letztere sind durch ersteres vollständig ersetzbar, ebenso wie die Kraftcomponenten X, Y, Z, welche in L, M, N auftreten, durch die Resultante K ersetzbar sind, von welcher D abhängt.

Man sieht diese Thatsache noch besser ein, wenn man überlegt, dass die Lage des Coordinatensystems auf die Wirkung einer Kraft ohne Einfluss ist. Dreht man sonach das Coordinatensystem um den Anfangspunkt, so sind die Momente von K um die neuen Axen äquivalent

denen um die alten. Fällt aber eine Coordinatenrichtung in die Hauptdrehungsaxe d, so ist um sie das Moment gleich D, um die beiden andern gleich Null; also ist auch D äquivalent mit L, M, N.

Die Richtung der Hauptdrehungsaxe bestimmt sich anschaulicher als durch (19′) mit Hülfe der Formeln, die man aus jenen in Rücksicht auf (15″) durch die Factoren x, y, z und X, Y, Z leicht erhält. Es resultirt so nämlich:

$$\begin{aligned} x \cos(d, x) + y \cos(d, y) + z \cos(d, z) &= 0, \\ X \cos(d, x) + Y \cos(d, y) + Z \cos(d, z) &= 0, \end{aligned} \tag{20'}$$

und dies zeigt, dass die Hauptdrehungsaxe durch den Coordinatenanfang normal steht zur Ebene durch die Richtung der Kraft und die Verbindungslinie ihres Angriffspunktes mit dem Coordinatenanfang.

Die soeben gefundenen Resultate lassen sich, da der Coordinatenanfang ganz beliebig ist, in den folgenden Satz zusammenfassen:

Wirkt auf ein starres System eine Kraft K in einem Punkte p, so hat ihr Drehungsmoment um eine durch einen beliebigen Punkt q gehende Drehungsaxe dann den grössten Werth (Hauptdrehungsmoment D), wenn diese Axe senkrecht steht, sowohl auf der Richtung von K, als der Richtung der Geraden $\overline{pq}$ (Hauptdrehungsaxe d).

Den Repräsentanten des Drehungsmomentes um jede andere durch q gehende Axe d_1 erhält man, indem man den Repräsentanten des Hauptmomentes D auf die positive Seite der Hauptaxe d aufträgt und auf die gegebene Axe d_1 projicirt. Das bezügliche Moment D_1 wirkt dann positiv um diejenige Richtung der Axe d_1, auf welche die Projection fällt.

Zerlegt man nach der Methode des Parallelogramms den Repräsentanten des Hauptdrehungsmomentes nach beliebigen Richtungen, so erhält man dadurch die Repräsentanten von Drehungsmomenten, welche zusammen dem Hauptdrehungsmoment äquivalent sind und als seine Componenten bezeichnet werden können.

II. Wirken auf das starre System mehrere Kräfte K_h mit den Angriffspunkten x_h, y_h, z_h, so treten in den Bewegungsgleichungen (14) an Stelle der Momente der einen Kraft die Summen der Momente aller Kräfte um die Coordinatenaxen.

Dies zeigt, dass beliebige Kräfte um dieselbe Axe ein resultirendes Drehungsmoment liefern, welches gleich ist der Summe der Einzelmomente um jene Axe.

Momente um dieselbe Axe summiren sich also ebenso wie Kraftcomponenten parallel derselben Richtung.

Es ist nützlich zu zeigen, wie dieses Resultat auch ohne Rücksicht auf die Bewegungsgleichungen direct aus dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte folgt, unter Benutzung der oben erhaltenen Regel, dass Kräfte, die auf ein starres System wirken, innerhalb desselben längs ihrer Richtung beliebig verlegt werden können.

Um den obigen Satz für die Momente um die X-Axe zu erweisen, kann man nach jener Regel zunächst alle Kräfte K_h parallel mit sich so verlegen, dass ihre Angriffspunkte in dieselbe Ebene normal zur X-Axe, etwa die YZ-Ebene, fallen. Sollten hierbei zunächst einige ausserhalb des starren Systems zu liegen kommen, so kann man dies dadurch vermeiden, dass man in ihrem ursprünglichen Angriffspunkt x_h, y_h, z_h zwei entgegengesetzte Hülfskräfte $+X_h'$, $-X_h'$ anbringt, die weder auf die Bewegung, noch insbesondere auf das Moment um die X-Axe Einfluss üben, die Resultante je aus dem betreffenden K_h und X_h' bildet und diese verlegt. Durch geeignete Wahl der X_h' lässt sich dann immer der Angriffspunkt y_h', z_h' auf der YZ-Ebene in's Innere des Systemes bringen.

Dort mögen nun von allen Kräften die Componenten nach der Y- und Z-Axe gebildet werden; es ist dann das Drehungsmoment von K_h

$$y_h' Z_h - z_h' Y_h = L_h$$

von derselben Grösse wie in der ursprünglichen Position.

Aber die Resultirenden aus Y_h und Z_h, d. h. die Componenten der gegebenen Kräfte nach der YZ-Ebene liegen jetzt sämmtlich in derselben Ebene und können daher successive paarweise nach dem Parallelogramm zusammengesetzt werden, indem man sie nach dem Schnittpunkt ihrer Richtungen verlegt.

Dass dieser Schnittpunkt nicht ausserhalb des starren Systemes fällt, kann man jederzeit erreichen durch Zufügung von in der YZ-Ebene angenommenen Hülfskräften, die paarweise gleich und entgegengesetzt gerichtet durch die X-Axe hindurchgehen, also weder auf die Bewegung noch insbesondere auf das Moment um die X-Axe wirken.

Wir betrachten nur zwei Kräfte mit den Componenten Y_1, Z_1 und Y_2, Z_2, die in den Punkten y_1', z_1' und y_2', z_2' angreifen, und zeigen, dass die Summe ihrer Momente um die X-Axe gleich dem Momente ihrer Resultirenden ist. Da man diese Resultante mit einer dritten Kraft combiniren und ebenso weiter fortschreiten kann, so ist dadurch der gewünschte Beweis ganz allgemein geliefert.

Die Coordinaten y, z des Schnittpunktes der beiden Kraftrichtungen sind gegeben durch die beiden Beziehungen:

$$(y - y_1') Z_1 = (z - z_1') Y_1,$$
$$(y - y_2') Z_2 = (z - z_2') Y_2;$$

addirt man dieselben und berücksichtigt, dass

$$Y_1 + Y_2 = Y, \qquad Z_1 + Z_2 = Z$$

die Componenten der Resultirenden sind, so erhält man:

$$yZ - zY = (y_1'Z_1 - z_1'Y_1) + (y_2'Z_2 - z_2'Y_2),$$

und damit das gesuchte Resultat: das Moment der resultirenden Kraft ist gleich der Summe der Momente ihrer Componenten um dieselbe Axe.

Nunmehr können wir auch Drehungsmomente um beliebige durch denselben Punkt gehende Axen zu Resultanten zusammensetzen; denn da bezüglich der Zusammensetzung solcher um parallele und um zu einander normale Axen die Anwendbarkeit der für die Kräfte gültigen Regeln erwiesen ist, folgt sogleich der allgemeine Satz:

Wirken auf ein starres System beliebige Kräfte K_h in den Punkten p_h und bestimmt man bezüglich eines Punktes q ihre Hauptdrehungsaxen d_h und ihre Hauptmomente D_h und trägt Repräsentanten der letzteren auf den ersteren in positiver Richtung auf, so kann man dieselben bezüglich der Zerlegung der Momente in Componenten, sowie ihrer Zusammensetzung zu Resultirenden genau so behandeln, wie die Repräsentanten von im Punkte q angreifenden Kräften.

Es gelten demgemäss auch für die Momente F, G, H um ein Axensystem A, B, C die (17′) entsprechenden Formeln:

$$\begin{aligned} F &= \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N, \\ G &= \alpha_2 L + \beta_2 M + \gamma_2 N, \\ H &= \alpha_3 L + \beta_3 M + \gamma_3 N; \end{aligned} \tag{21}$$

ebenso die daraus durch Auflösung nach L, M, N folgenden.

III. Da die hervorgehobene Analogie sich nur auf Kräfte, die in einem Punkte angreifen, und Momente um Axen, die durch einen Punkt gehen, erstreckt, so bietet sich von selbst die Frage, wie sich Kräfte verhalten., die auf verschiedene Punkte wirken, und Momente um Axen, die sich nicht schneiden.

Bezüglich der ersteren sagen, wie schon in § 15 entwickelt ist, die ersten drei Gleichungen (14) aus, dass die fortschreitende Bewegung des Systemes, gemessen durch die Bewegung des Massenmittelpunktes, ebenso stattfindet, als griffe in ihm eine einzige Kraft K mit den Componenten

$$X = \sum X_h, \qquad Y = \sum Y_h, \qquad Z = \sum Z_h \tag{22}$$

an; in dieser einen Hinsicht sind also jederzeit beliebige auf das starre System wirkende Kräfte mit einer (im Massenmittelpunkt angreifenden) nach den gewöhnlichen Regeln bestimmten Resultirenden äquivalent.

Wir untersuchen nun, unter welchen Umständen auch hinsichtlich der Drehungen ein beliebiges System von Kräften K_h durch eine einzige K zu ersetzen ist.

Die Bedingung hierfür ist, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY = \sum (y_h Z_h - z_h Y_h), \\ M &= zX - xZ = \sum (z_h X_h - x_h Z_h), \\ N &= xY - yX = \sum (x_h Y_h - y_h X_h) \end{aligned} \tag{22'}$$

durch ein System von Coordinaten x, y, z zu erfüllen sind, wenn für X, Y, Z die Werthe aus (22) entnommen werden.

Die Coordinaten x, y, z resp. x_h, y_h, z_h bestimmen hierin wieder den Angriffspunkt von K resp. K_h, genauer einen Punkt, durch welchen die Richtung der bezüglichen Kraft hindurchgeht.

Man erkennt, dass, obgleich die Werthe von x, y, z willkürlich sind, diese Gleichungen nicht durch jedes beliebige System von Kräften X, Y, Z befriedigt werden; denn multiplicirt man sie einzeln mit den entsprechenden Formeln (22) und addirt, so erhält man eine Bedingung zwischen den gegebenen Grössen X, Y, Z, L, M, N, welche erfüllt sein muss, damit die eine Kraft K die gegebenen K_h vollständig ersetze. Sie lautet

$$XL + YM + ZN = 0 \tag{22''}$$

und spricht, wenn man sie durch KD dividirt, den Satz aus:

Eine beliebige Anzahl auf ein starres System wirkender Kräfte K_h ist nur dann durch eine einzige (resultirende) Kraft K zu ersetzen, wenn deren nach dem Gesetz des Parallelogramms aus den K_h bestimmte Richtung normal ist zu der Hauptdrehungsaxe des Systemes K_h durch den Coordinatenanfang.

Die Grösse der Resultirenden K folgt in diesem Falle aus

$$K^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

ihre Lage ist bestimmt durch die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} xL + yM + zN = 0, \\ x(YN - ZM) + y(ZL - XN) + z(XM - YL) = D^2, \end{aligned} \tag{23}$$

deren Gleichungen aus dem System (22') durch die Factoren x, y, z und L, M, N folgen. Legt man durch den Coordinatenanfang eine Ebene normal zu K, deren Gleichung ist

$$xX + yY + zZ = 0, \tag{23'}$$

so kann man die Coordinaten x', y', z' des Schnittpunktes der Resultante K mit derselben leicht erhalten, wenn man die drei Gleichungen (23) und (23') resp. mit D, mit DK und mit K dividirt und beachtet, dass die dadurch in ihnen erhaltenen Factoren von x, y, z die Cosinus der Richtungswinkel dreier zu einander normaler Richtungen sind, nämlich der Richtungen der Hauptdrehungsaxe, der resultirenden Kraft, welche nach Annahme der Gültigkeit von (22'') auf einander senkrecht stehen, und des Lothes auf beiden. Es folgt demgemäss:

$$x' = \frac{(YN - ZM)}{K^2}, \quad y' = \frac{(ZL - XN)}{K^2}, \quad z' = \frac{(XM - YL)}{K^2}. \qquad (23'')$$

Wählt man die X-Coordinatenaxe parallel der Richtung von K, so wird $\sum X_h = K$, $\sum Y_h = \sum Z_h = 0$ und die Bedingung (22'') zu

$$L = \sum (y_h Z_h - z_h Y_h) = 0; \qquad (24)$$

die Coordinaten des Schnittpunktes von K mit der YZ-Ebene sind hier:

$$y' = -\frac{N}{K}, \qquad z' = +\frac{M}{K}. \qquad (24')$$

Ein einfacher specieller Fall, in welchem die Bedingung (22'') erfüllt ist, ist der, dass sich die Richtungen sämmtlicher Kräfte K_h in einem Punkte schneiden; dann kann man nach dem Satz auf p. 144 alle Kräfte nach dem Schnittpunkt hin verlegen und sie dort nach der Regel des Parallelogramms zusammensetzen. Dass in diesem Falle unseren Bedingungen wirklich genügt wird, ersieht man am einfachsten aus den Ausgangsgleichungen (22'). Bezeichnet man nämlich die Coordinaten des Schnittpunktes aller Kräfte mit x, y, z, so sind deren Eigenschaften ausgesprochen in der Beziehung:

$$(x_h - x) : (y_h - y) : (z_h - z) = X_h : Y_h : Z_h,$$

welche für alle h gilt. Durch sie sind aber die genannten Gleichungen identisch erfüllt.

Noch specieller ist der Fall, dass alle Kräfte unter einander parallel sind. Legt man die X-Axe ihnen parallel, so erhält man:

$$X = \sum X_h, \qquad y' = \frac{\sum y_h X_h}{\sum X_h}, \qquad z' = \frac{\sum z_h X_h}{\sum X_h}. \qquad (24'')$$

IV. Ist die Bedingung (22'') nicht erfüllt, so genügt also auch nicht eine einzige Kraft, um das System der K_h in jeder Hinsicht zu ersetzen, sondern es ist noch ein weiteres Element hinzuzufügen, z. B. eine zweite Kraft K' oder ein Drehungsmoment D'. Da aber nur

eine Bedingung unerfüllt blieb, so können jene Grössen noch bis auf ein Bestimmungsstück willkürlich gewählt werden.

Wir wollen versuchen die gegebenen Kräfte K_h durch eine Resultirende K und durch ein Moment D' um eine Axe parallel zu K durch den Coordinatenanfang zu ersetzen.

Ist die Axe von D' parallel zu K, so sind seine Componenten:

$$L' = \frac{D'X}{K}, \qquad M' = \frac{D'Y}{K}, \qquad N' = \frac{D'Z}{K},$$

und es lauten die zu erfüllenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY + D'\frac{X}{K}, \\ M &= zX - xZ + D'\frac{Y}{K}, \\ N &= xY - yX + D'\frac{Z}{K}. \end{aligned} \tag{25}$$

Durch die Factoren X, Y, Z erhält man den Werth von D' gemäss

$$D' = \frac{LX + MY + NZ}{K}; \tag{25'}$$

dabei ist wegen der Werthe von L', M', N' auch

$$D' = \frac{L'X + M'Y + N'Z}{K}. \tag{25''}$$

Obige Gleichung lässt sich also schreiben:

$$0 = \frac{X(L - L') + Y(M - M') + Z(N - N')}{K} \tag{25'''}$$

und drückt den Satz aus, dass $L - L'$, $M - M'$, $N - N'$ die Componenten eines Drehungsmomentes sind, dessen Axe normal zu K steht.

Für die Lage der Resultirenden erhält man zwei Formeln aus (25) durch die Factoren x, y, z und L, M, N, nämlich:

$$\begin{gathered} x(L - L') + y(M - M') + z(N - N') = 0, \\ x(YN - ZM) + y(ZL - XN) + z(XM - YL) = D^2 - D'^2. \end{gathered} \tag{26}$$

Die Resultirende fällt in die Schnittlinie der beiden hierdurch definirten Ebenen.

Fügt man hinzu die Gleichung der zu K normalen Ebene durch den Coordinatenanfang

$$xX + yY + zZ = 0, \tag{26'}$$

so kann man genau wie oben die Coordinaten x', y', z' des Schnittpunktes von K mit der letzteren Ebene bestimmen. Man erhält:

$$x' = (YN - ZM)\frac{(D^2 - D'^2)}{K^2 D^2}, \qquad y' = (ZL - XN)\frac{(D^2 - D'^2)}{K^2 D^2}, \qquad z' = (XM - YL)\frac{(D^2 - D'^2)}{K^2 D^2}. \tag{26''}$$

Um die Aufgabe noch weiter zu führen, fügen wir hier eine Betrachtung ein über die Beziehungen, die zwischen Drehungsmomenten eines und desselben Kräftesystemes um parallele Axen bestehen.

Ist D das Drehungsmoment um eine durch die Cosinus α, β, γ ihrer Richtungswinkel gegebene Axe d durch den Coordinatenanfang und Δ dasjenige um eine parallele Axe δ durch die Stelle ξ, η, ζ, dann gilt:

$$D = \alpha L + \beta M + \gamma N,$$
$$\Delta = \alpha \Lambda + \beta \mathfrak{M} + \gamma \mathfrak{N},$$

worin L, M, N, Λ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die bezüglichen Componenten um die Coordinatenaxen, resp. um dazu Parallele durch den Punkt ξ, η, ζ sind.

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum \big((y_h - \eta) Z_h - (z_h - \zeta) Y_h\big) = L - (\eta Z - \zeta Y), \\ \mathfrak{M} &= \sum \big((z_h - \zeta) X_h - (x_h - \xi) Z_h\big) = M - (\zeta X - \xi Z), \\ \mathfrak{N} &= \sum \big((x_h - \xi) Y_h - (y_h - \eta) X_h\big) = N - (\xi Y - \eta X), \end{aligned} \tag{27}$$

und daher gilt:

$$\Delta = D - \big(\alpha(\eta Z - \zeta Y) + \beta(\zeta X - \xi Z) + \gamma(\xi Y - \eta X)\big), \tag{27'}$$

worin das zweite Glied das Drehungsmoment der nach der Stelle ξ, η, ζ verlegt gedachten Kraft K um die Axe d darstellt.

Die Betrachtung dieses Resultates lässt die Gültigkeit der folgenden Sätze erkennen:

a) Verschwinden die Componentensummen der wirkenden Kräfte, so sind ihre Drehungsmomente um alle einander parallelen Axen gleich.

Hieraus folgt, dass man in diesem Falle die Repräsentanten von Drehungsmomenten um beliebige Axen parallel mit sich im starren System verlegen und sie demnach auch stets zu einem resultirenden Moment zusammensetzen kann. Diese speciellen Drehungsmomente mit verschwindenden Componentensummen nennt man Kräftepaare oder Koppelkräfte.

b) Um alle Drehungsaxen, welche der Richtung der resultirenden Kraft parallel sind (d. h. für welche $\alpha:\beta:\gamma = X:Y:Z$), hat das Moment eines Kraftsystems denselben Werth.

Hiernach kann man dergleichen Drehungsaxen beliebig vertauschen, z. B. eine in die Kraftrichtung fallende und eine ihr parallele durch den Coordinatenanfang. Demgemäss können wir die vorhin abgebrochene Untersuchung nunmehr abschliessen durch den Satz:

Ein jedes auf ein starres System wirkende Kraftsystem lässt sich ersetzen durch eine Resultirende und ein um ihre Richtung als Axe wirkendes Drehungsmoment. Die darauf bezüglichen speciellen Formeln sind (25) und (26).

§ 18. Theorie des Schwerpunktes; Beispiele für seine Berechnung. Starre continuirliche Körper, Dichte und specifisches Gewicht.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass parallel der X-Axe auf ein starres System wirkende Kräfte K_h sich zu einer Resultirenden K zusammensetzen, deren Grösse gegeben ist durch

$$K = \sum K_h,$$

und deren Richtung hindurchgeht durch den Punkt der YZ-Ebene:

$$y = \frac{\sum y_h K_h}{\sum K_h}, \qquad z = \frac{\sum z_h K_h}{\sum K_h}. \tag{28}$$

Hier ist zunächst nur die Gerade bestimmt, in welcher die Resultante liegt; haben aber die auf die einzelnen Punkte des starren Systemes wirkenden Kräfte die Eigenschaft, bei einer Drehung desselben gegen die Kraftrichtung ihre Grösse unverändert beizubehalten, so lässt sich ein Punkt angeben, durch welchen bei jeder Lage des Systemes die Resultirende hindurchgeht, den man also in einem besondern Sinne ihren Angriffspunkt nennen kann. Man erhält die Coordinaten dieses Punktes, indem man ausdrückt, dass die obigen Relationen für jede Lage eines Coordinatensystemes A, B, C, das wir mit dem Körper fest verbunden denken wollen, gegen die Richtung der Kräfte bestehen sollen.

Dazu ersetzen wir nach System (1) y, z, y_h, z_h durch a, b, c, a_h, b_h, c_h, schreiben also:

$$\beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c = \frac{\sum (\beta_1 a_h + \beta_2 b_h + \beta_3 c_h) K_h}{\sum K_h},$$

$$\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c = \frac{\sum (\gamma_1 a_h + \gamma_2 b_h + \gamma_3 c_h) K_h}{\sum K_h},$$

und erhalten, indem wir diese Gleichungen für beliebige $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ gelten lassen:

$$a = \frac{\sum a_h K_h}{\sum K_h}, \qquad b = \frac{\sum b_h K_h}{\sum K_h}, \qquad c = \frac{\sum c_h K_h}{\sum K_h}. \tag{28'}$$

Den hierdurch im starren System gegebenen Punkt nennen wir den Kräftemittelpunkt der K_h.

Unter allen Kräften, welche die vorausgesetzte Eigenschaft haben, ihre Grösse bei einer Drehung des starren Systems für jede Stelle desselben unverändert zu bewahren, ist die wichtigste die Schwerkraft. Sie ist überdies der im Punkte a_h, b_h, c_h vorhandenen Masse proportional und demgemäss werden für sie die letzten Gleichungen:

$$a = \frac{\sum a_h m_h}{\sum m_h}, \qquad b = \frac{\sum b_h m_h}{\sum m_h}, \qquad c = \frac{\sum c_h m_h}{\sum m_h}. \tag{28''}$$

Vergleicht man diese Werthe mit den in Formel (92) des ersten Theiles gegebenen Definitionen der Coordinaten des Massenmittelpunktes, so erkennt man:

Der Kräftemittelpunkt der Schwere liegt im Massenmittelpunkt des Systemes, auf welches sie wirkt. Wegen dieser Eigenschaft führt der Massenmittelpunkt auch den Namen des Schwerpunktes.

Die Wirkung der Schwere auf ein starres System ist also bei jeder Lage und in jeder Hinsicht dieselbe, als griffe dessen ganzes Gewicht im Schwerpunkte an. Hieraus erhellt, dass die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes ein Problem von vielfältiger Bedeutung ist. Wir wollen uns demselben nunmehr zuwenden, und zwar speciell für gewisse starre Körper.

Unter einem Körper verstehen wir eine Quantität Materie, die einen Raum anscheinend continuirlich erfüllt, und nennen denselben starr, wenn jedes seiner Theilchen von jedem andern eine constante Entfernung bewahrt. Wir können einen Körper in ein Punktsystem verwandeln, indem wir ihn auf irgend eine Weise in Volumenelemente zerlegt denken und jedes einzelne als einen Massenpunkt betrachten. Ist an der Stelle x, y, z ein Volumenelement dk, welches die Masse dm enthält, so nennt man das Verhältniss

$$\frac{dm}{dk} = \varepsilon$$

die Dichtigkeit an der Stelle x, y, z. Die Dichtigkeit ist also diejenige Masse, welche in der Volumeneinheit vorhanden sein würde, wenn dieselbe durchaus ebenso erfüllt wäre, wie das Volumenelement dk an der Stelle x, y, z, dividirt durch die Volumeneinheit.

Die Dimension einer Dichtigkeit ist daher

$$[\varepsilon] = [ml^{-3}].$$

Nach der Definition unserer Massen- und Längeneinheit ist die Dichte des destillirten Wassers bei 4° C. gleich 1.

Wir bemerken, dass in der Natur ausschliesslich solche Körper vorkommen, bei welchen die Dichtigkeit eine endliche ist. Massenpunkte in dem Sinne des Wortes, dass eine endliche Quantität Materie in einen unendlich kleinen Raum zusammengedrängt ist, existiren nicht.

Nach der vorstehenden Definition bestimmt sich die Masse eines Körpers durch das Integral

$$M = \int \varepsilon\, dk, \tag{29}$$

in welchem die Dichtigkeit ε als Function des Ortes gegeben zu denken ist.

Sein Gewicht ist

$$G = g \int \varepsilon\, dk; \tag{29'}$$

man fasst hierin $g.\varepsilon$ mitunter als eine Grösse auf, die man als das specifische Gewicht an der Stelle x, y, z bezeichnet. Specifisches Gewicht ist also das Gewicht der Volumeneinheit, wenn dieselbe durchaus ebenso mit Masse erfüllt ist, wie das betrachtete Volumenelement, dividirt durch die Volumeneinheit; seine Dimension ist:

$$[\gamma] = [m l^{-2} t^{-2}].$$

Das specifische Gewicht des Wassers ist also in unsern Einheiten ca. 981.

Es ist vielfach gebräuchlich, die Begriffe Dichtigkeit („specifische Masse") und specifisches Gewicht zu vermischen und beide als unbenannte Zahlen anzusehen, aber dieser Gebrauch ist gefährlich und leicht Veranlassung zu Fehlern. Wir wollen festhalten, dass der Zusatz „specifisch" in der ganzen Physik übereinstimmend die Beziehung einer in Bezug auf eine gegebene Raumgrösse, Fläche, Masse etc. definirten physikalischen Grösse Π auf die Einheit des Raumes, der Fläche, der Masse etc. andeutet. Jene durch das Beiwort „specifisch" ausgezeichnete Grösse hat daher stets eine Dimension gleich der von Π, dividirt durch einen Raum, eine Fläche, eine Masse etc.

Wir wenden uns nun zu den Eigenschaften des Schwerpunktes eines Körpers und definiren ihn in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem X, Y, Z durch:

$$\xi = \frac{\int x\, dm}{\int dm}, \qquad \eta = \frac{\int y\, dm}{\int dm}, \qquad \zeta = \frac{\int z\, dm}{\int dm}. \tag{30}$$

Ist der Körper homogen, so fällt die Dichte im Zähler und Nenner dieser Werthe heraus und es bleibt:

$$\xi = \frac{\int x\, dk}{\int dk}, \qquad \eta = \frac{\int y\, dk}{\int dk}, \qquad \zeta = \frac{\int z\, dk}{\int dk}. \tag{30'}$$

In diesem Falle sagt man: der Schwerpunkt eines homogenen Körpers fällt mit dem seines Volumens zusammen.

Besteht der Körper aus mehreren Theilen, die durch verschiedene Dichte oder durch ihre Form sich zu gesonderter Betrachtung empfehlen, so kann man die Integrationen theilen und, indem man ein Massenelement des $k$ten Theiles mit dm_k bezeichnet, auch schreiben:

$$\xi = \frac{\sum \int x_k\, dm_k}{\sum \int dm_k}, \qquad \eta = \frac{\sum \int y_k\, dm_k}{\sum \int dm_k}, \qquad \zeta = \frac{\sum \int z_k\, dm_k}{\sum \int dm_k}.$$

Nun ist $\int x_k\, dm_k = \xi_k M_k$, falls man mit M_k die Masse des $k$ten Theiles, mit ξ_k, η_k, ζ_k ihre Schwerpunktscoordinaten bezeichnet, daher kann man setzen:

$$\xi = \frac{\sum \xi_k M_k}{\sum M_k}, \qquad \eta = \frac{\sum \eta_k M_k}{\sum M_k}, \qquad \zeta = \frac{\sum \zeta_k M_k}{\sum M_k}; \tag{31}$$

d. h. für einen zusammengesetzten Körper kann man die Schwerpunktscoordinaten bestimmen, indem man die Masse M_k jedes einzelnen Theiles in dessen Schwerpunkt zu einem Massenpunkt concentrirt denkt.

Anwendungen hiervon bringen die drei ersten Beispiele.

1. Schwerpunkt eines Systemes von homogenen Geraden, die in ihren Endpunkten beliebig verbunden sind.

Unter einer materiellen Geraden versteht man einen cylindrischen Körper von gegen die Länge verschwindendem Querschnitt. Dass der Schwerpunkt eines solchen bei homogener Dichte im Mittelpunkt seiner Axe liegen muss, ist schon aus Symmetrierücksichten klar. Ist also in einem System von materiellen Geraden eine mit den Endpunkten x_h, y_h, z_h und x_k, y_k, z_k von der Masse m_{hk}, so ist für deren Schwerpunkt:

$$\xi_{hk} = \frac{x_h + x_k}{2}, \qquad \eta_{hk} = \frac{y_h + y_k}{2}, \qquad \zeta_{hk} = \frac{z_h + z_k}{2}.$$

Für das ganze System haben wir dann nach dem letzten Satz:

$$\xi = \frac{\sum_{hk} \xi_{hk}\, m_{hk}}{\sum_{hk} m_{hk}}, \qquad \eta = \frac{\sum_{hk} \eta_{hk}\, m_{hk}}{\sum_{hk} m_{hk}}, \qquad \zeta = \frac{\sum_{hk} \zeta_{hk}\, m_{hk}}{\sum_{hk} m_{hk}}.$$

Wegen der Werthe der $\xi_{hk}, \eta_{hk}, \zeta_{hk}$ lässt sich dies auch so schreiben:

$$\xi = \frac{\sum_h x_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}{\sum_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}, \qquad \eta = \frac{\sum_h y_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}{\sum_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}, \qquad \zeta = \frac{\sum_h z_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}{\sum_h \left(\sum_k \frac{m_{hk}}{2}\right)}; \tag{31'}$$

was aussagt: der Schwerpunkt des Systems materieller Geraden ist derselbe, als wenn in jedem Knotenpunkte die halbe Masse aller der dort zusammenstossenden Geraden vereinigt wäre.

2. Schwerpunkt von homogenen ebenen Polygonen und von aus solchen zusammengesetzten räumlichen Gebilden.

Der Schwerpunkt einer nicht homogenen materiellen Geraden muss nach Symmetrierücksichten auf ihr liegen. Dieser Satz dient zunächst zur Bestimmung des Schwerpunktes für ein homogenes Dreieck, d. h. für eine homogene Platte von gegen ihre Ausdehnung verschwindender Dicke und dreieckiger Begrenzung.

Wir zerlegen sie parallel einer Seite in so feine Streifen, dass jeder derselben als eine homogene materielle Gerade angesehen werden kann. Für jede einzelne liegt der Schwerpunkt in ihrem Mittelpunkt, der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks fällt also zusammen mit demjenigen der materiellen inhomogenen Geraden, die entsteht, wenn man die Massen der erhaltenen Streifen in ihren Mittelpunkten vereinigt, — er muss also auf der Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke liegen. Da aber jede Seite in gleicher Weise zum Ausgang der Construction benutzt werden kann, so muss der gesuchte Schwerpunkt in den Schnittpunkt der drei Mittelpunkts-Transversalen des Dreiecks fallen.

Jedes ebene Polygon von einer endlichen Anzahl Seiten ist in eine endliche Anzahl von Dreiecken zu zerlegen. Seinen Schwerpunkt zu bestimmen, haben wir nur das Punktsystem zu behandeln, welches entsteht, wenn man die Masse eines jeden Dreiecks in seinem Schwerpunkt vereinigt. Dasselbe gilt für eine aus polygonalen, ebenen, homogenen Flächen zusammengesetzte räumliche Figur.

3. Schwerpunkt eines homogenen Polyëders.

Jedes Polyëder mit einer endlichen Anzahl Flächen lässt sich in eine endliche Zahl Tetraëder, jedes Tetraëder in eine unendliche Anzahl materieller Dreiecke zerlegen. Durch eine der vorstehenden ganz analoge Betrachtung erkennt man, dass der Schwerpunkt eines homogenen Tetraëders der Schnittpunkt der vier Transversalen von den Ecken nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Dreiecke ist. Vereinigt man die Masse jedes Tetraëders in dem so bestimmten Schwerpunkt, so erhält man das Punktsystem, dessen Schwerpunkt zugleich derjenige des untersuchten Polyëders ist.

4. Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens.

Als materiellen Kreisbogen bezeichnen wir ein Stück eines Kreisringes von unendlich kleinem Querschnitt q. Nach Symmetrierücksichten

kann der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens nur auf der Halbirungslinie seines Oeffnungswinkels 2Φ liegen. Wählen wir sie zur X-Axe, das Kreiscentrum zum Nullpunkt, so ist nur die ξ-Coordinate zu berechnen.

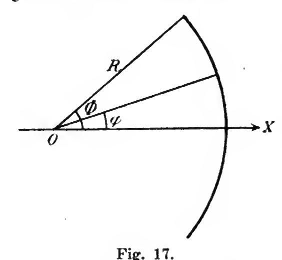


Fig. 17.

Ein Raumelement dk von der Länge ds, parallel dem Bogen gemessen, wird gleich $q\,ds$, ds aber gleich $R\,d\varphi$ sein, wenn φ laut Figur 17 den Ort des Elementes bestimmt. Da zugleich seine x-Coordinate $= R\cos\varphi$ ist, so erhält man

$$\xi = R\,\frac{\int\limits_{-\Phi}^{+\Phi}\cos\varphi\,d\varphi}{\int\limits_{-\Phi}^{+\Phi}d\varphi} = R\,\frac{\sin\Phi}{\Phi}\,.$$

Schreibt man dies Resultat in der Form:

$$\xi : R = 2R\sin\Phi : 2R\Phi,$$

so spricht es den Satz aus:

Der Abstand des Schwerpunktes eines homogenen Kreisbogens vom Kreiscentrum verhält sich zum Kreisradius, wie die Sehne zum Kreisbogen.

5. Schwerpunkt eines homogenen Kugelflächensegmentes.

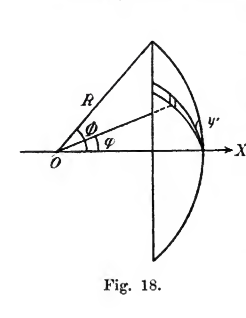


Fig. 18.

Die materielle Kugelfläche betrachten wir als eine Schaale von der constanten unendlich kleinen Dicke ϑ. Wiederum muss nach Symmetrierücksichten der Schwerpunkt auf der Axe des Kreiskegels durch das Kugelcentrum liegen, welcher das betrachtete Segment ausschneidet. Das Volumenelement dk werde durch zwei unendlich nahe dem begrenzenden coaxiale Kreiskegel und zwei unendlich nahe Meridianebenen begrenzt. Dann ist in der Bezeichnung der Figur 18 $dk = \vartheta R^2 \sin\varphi\,d\varphi\,d\psi$, $x = R\cos\varphi$, also:

$$\xi = R\,\frac{\int\limits_0^{\Phi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi}d\psi}{\int\limits_0^{\Phi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi}d\psi} = R\,\frac{\sin^2\Phi}{2(1-\cos\Phi)} = R\cos^2\frac{\Phi}{2}\,.$$

Beachtet man, dass die Höhe des Kugelflächensegmentes gleich $R - R\cos\Phi$ und $\xi = (R + R\cos\Phi)/2$ ist, so erkennt man den Satz:

Der Schwerpunkt eines homogenen Kugelflächensegmentes fällt in die Mitte seiner Höhe.

6. Schwerpunkt eines von einem Kreiskegel begrenzten homogenen Kugelsectors.

Die X-Axe sei abermals die Symmetrieaxe des Körpers.

Wir zerlegen den Sector durch concentrische Kugelflächen vom Radius r in unendlich viele dünne Schaalen von der Dicke dr; dann ist das Volumen einer solchen $dk = 2\pi(1 - \cos\Phi)r^2 dr$, die Schwerpunktscoordinate $\xi' = r\cos^2\Phi/2$. Wendet man nun die Gleichung (31) an, so erhält man sogleich:

$$\xi = \cos^2\frac{\Phi}{2}\frac{\int_0^R r^3 dr}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{3}{4}R\cos^2\frac{\Phi}{2}.$$

Dies giebt den einfachen Satz:

Der Schwerpunkt eines homogenen durch einen Kreiskegel ausgeschnittenen Kugelsectors liegt auf drei Viertel des Abstandes, welchen die Mitte der Höhe des ausgeschnittenen Segmentes der Kugelfläche vom Centrum besitzt.

An diese letzten Resultate schliessen wir noch eine etwas allgemeinere Betrachtung.

Es sei ein Körper von beliebiger Zusammensetzung und der Masse m gegeben, die Coordinaten seines Schwerpunktes seien ξ, η, ζ. Nun denke man sich die ursprüngliche Massenvertheilung bei unveränderter Gestalt geändert, etwa indem man auf gewisse Stellen eine positive Masse μ, auf andere die gleichgrosse negative vertheilt, und so den Körper aus einem homogenen in einen inhomogenen von gleicher Masse verwandelt. Sind dann die Coordinaten des Schwerpunktes σ' der positiven Masse μ gleich ξ', η', ζ', desjenigen σ'' der negativen Masse μ aber ξ'', η'', ζ'', so giebt sich das System der neuen Schwerpunktscoordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 des ganzen Körpers:

$$\xi_1 = \xi + \frac{\mu}{m}(\xi' - \xi''), \qquad \eta_1 = \eta + \frac{\mu}{m}(\eta' - \eta''), \qquad \zeta_1 = \zeta + \frac{\mu}{m}(\zeta' - \zeta'').$$

Dies sagt, dass in Folge der vorgenommenen Veränderung der Schwerpunkt des ganzen Körpers in der Richtung der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte von σ'' nach σ' um den μ/mten Theil ihres Abstandes verschoben ist.

§ 19. Theorie der Trägheitsmomente, Beispiele für deren Berechnung. Die lebendige Kraft eines starren Körpers.

Von den im 16. Abschnitt erhaltenen allgemeinsten Gesetzen der Verschiebung eines starren Körpers machen wir nun eine Anwendung auf den Fall, dass die Bewegungen keine willkürlichen, sondern die in dem Zeitelement dt in Folge der ausgeübten Kräfte wirklich stattfindenden sind. Dividiren wir dann die Gleichungen (9) mit dt und setzen die Geschwindigkeiten der Verschiebungen parallel den Coordinatenaxen

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z', \quad \frac{dx_0}{dt} = x_0', \quad \frac{dy_0}{dt} = y_0', \quad \frac{dz_0}{dt} = z_0', \tag{32'}$$

analog die Drehungsgeschwindigkeiten um die Parallelen zu den X, Y, Z-Coordinatenaxen durch den Anfangspunkt x_0, y_0, z_0 des im Körper festen ABC-Systems

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda', \qquad \frac{d\mu}{dt} = \mu', \qquad \frac{d\nu}{dt} = \nu', \tag{32''}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x' &= x_0' + (z - z_0)\mu' - (y - y_0)\nu', \\ y' &= y_0' + (x - x_0)\nu' - (z - z_0)\lambda', \\ z' &= z_0' + (y - y_0)\lambda' - (x - x_0)\mu'. \end{aligned} \tag{32}$$

Diese Werthe setzen wir nun in die für ein beliebiges Massensystem in § 15 des ersten Theiles erhaltenen Gleichungen (101) und (102) ein, welche wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m_h x_h' &= \sum X_h, \\ \frac{d}{dt}\sum m_h y_h' &= \sum Y_h, \\ \frac{d}{dt}\sum m_h z_h' &= \sum Z_h, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m_h (y_h z_h' - z_h y_h') &= \sum (y_h Z_h - z_h Y_h), \\ \frac{d}{dt}\sum m_h (z_h x_h' - x_h z_h') &= \sum (z_h X_h - x_h Z_h), \\ \frac{d}{dt}\sum m_h (x_h y_h' - y_h x_h') &= \sum (x_h Y_h - y_h X_h). \end{aligned}$$

Dadurch ist dann die Eigenschaft desselben, starr zu sein, analytisch ausgedrückt. Bezeichnen wir die Gesammtmasse

$$\sum m_h = m$$

und nennen die Coordinaten ihres Schwerpunktes ξ, η, ζ, d. h. setzen:

$$\sum m_h x_h = m\xi, \qquad \sum m_h y_h = m\eta, \qquad \sum m_h z_h = m\zeta,$$

so erhalten wir folgendes, noch völlig allgemeine System:

$$m\frac{d}{dt}\left(x_0' + (\zeta - z_0)\mu' - (\eta - y_0)\nu'\right) = \sum X_h,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(y_0' + (\xi - x_0)\nu' - (\zeta - z_0)\lambda'\right) = \sum Y_h,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(z_0' + (\eta - y_0)\lambda' - (\xi - x_0)\mu'\right) = \sum Z_h, \tag{34}$$

$$m\frac{d}{dt}\left((z_0'\eta - y_0'\zeta) - \lambda'(\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0) + x_0(\xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu')\right)$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\lambda'\sum m_h(y_h^2 + z_h^2) - \mu'\sum m_h y_h x_h - \nu'\sum m_h z_h x_h\right) = \sum(y_h Z_h - z_h Y_h),$$

$$m\frac{d}{dt}\left((x_0'\zeta - z_0'\xi) - \mu'(\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0) + y_0(\xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu')\right)$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\mu'\sum m_h(z_h^2 + x_h^2) - \nu'\sum m_h z_h y_h - \lambda'\sum m_h x_h y_h\right) = \sum(z_h X_h - x_h Z_h),$$

$$m\frac{d}{dt}\left((y_0'\xi - x_0'\eta) - \nu'(\xi x_0 + \eta y_0 + \zeta z_0) + z_0(\xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu')\right)$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\nu'\sum m_h(x_h^2 + y_h^2) - \lambda'\sum m_h x_h z_h - \mu'\sum m_h y_h z_h\right) = \sum(x_h Y_h - y_h X_h).$$

Hierin treten uns einige bisher noch nicht behandelte Functionen entgegen, welche auf die allgemeinste Bewegung, und zwar, da sie in λ', μ', ν' multiplicirt sind, speciell auf die Drehungen Einfluss haben, nämlich die sechs Summen:

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum m_h(y_h^2 + z_h^2), & \mathsf{H} &= \sum m_h(z_h^2 + x_h^2), & \mathsf{Z} &= \sum m_h(x_h^2 + y_h^2), \\ \Xi' &= -\sum m_h y_h z_h, & \mathsf{H}' &= -\sum m_h z_h x_h, & \mathsf{Z}' &= -\sum m_h x_h y_h, \end{aligned} \tag{35}$$

ausgedehnt über alle Massen des starren Systemes.

Sie sind neben der ganzen Masse des Systemes und neben den Coordinaten seines Schwerpunktes die einzigen in den Bewegungsgleichungen auftretenden Functionen, welche von der Grösse und Vertheilung der Masse innerhalb des Systemes abhängen; zwei Systeme, für welche sie gleiche Werthe besitzen und welche gleichen Kräften unterliegen, sind demnach auch in Hinsicht auf die Bewegung gleichwerthig.

Wir betrachten zunächst die drei Summen Ξ, H, Z und bemerken, dass, wenn man den senkrechten Abstand des Punktes m_h (x_h, y_h, z_h) von der X, Y, Z-Axe resp. mit r_x, r_y, r_z bezeichnet, ihre Werthe sich schreiben:

$$\Xi = \sum m_h(r_x)^2, \qquad \mathsf{H} = \sum m_h(r_y)^2, \qquad \mathsf{Z} = \sum m_h(r_z)^2. \tag{35'}$$

Man nennt nun die Summe über alle Massen eines Systemes, eine jede multiplicirt mit dem Quadrat ihres Abstandes von einer gegebenen Axe, das Trägheitsmoment des Systemes um jene Axe.

Demnach sind Ξ, H, Z die Trägheitsmomente des starren Systemes um die Coordinatenaxen X, Y, Z.

Die drei Summen Ξ', H', Z', genommen über alle Massen, eine jede multiplicirt mit der negativen Fläche des Rechtecks, welches von zwei ihrer Coordinaten gebildet wird, nennen wir die Deviationsmomente des Systemes um die resp. dritten Coordinatenaxen.

Der Grund für die Wahl dieser Namen wird späterhin klar werden.

Wir gehen jetzt an die Entwickelung der Eigenschaften der Trägheitsmomente und betrachten der Bequemlichkeit halber sogleich specieller dasjenige für einen continuirlichen Körper und um eine durch den innerhalb oder ausserhalb des Körpers willkürlich gewählten Anfangspunkt gelegte Axe. Wir setzen dasselbe:

$$\mathsf{M} = \int r^2\, dm, \tag{35''}$$

indem wir mit r den normalen Abstand des Elementes dm von der Axe bezeichnen; da es von der Richtung der Axe abhängig ist, werden wir es eine vectorielle Function nennen müssen.

Das Trägheitsmoment ist seiner Dimension nach eine Masse mal dem Quadrat einer Länge, also:

$$[\mathsf{M}] = [ml^2].$$

Man erhält demgemäss, wenn man es durch die Masse des Körpers dividirt, für welchen es gilt, einen Werth von der Dimension $[l^2]$ und setzt daher auch wohl:

$$\mathsf{M} = m\varkappa^2,$$

worin nun $\varkappa$ der Trägheitsradius für die gegebene Axe genannt wird; er bezeichnet diejenige Entfernung, in welcher die ganze Masse angebracht werden müsste, um dasselbe Trägheitsmoment zu geben, als die wirkliche Vertheilung.

Wir wollen, um Verwechselungen zu vermeiden, weiterhin den Buchstaben $\varkappa$ für den Trägheitsradius nur anwenden, wenn die Axe, auf die sich das Trägheitsmoment bezieht, durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Die Definition des Trägheitsmomentes $\mathsf{M} = \int r^2\, dm$ führt sogleich zu dem einfachen und doch für die Anwendung wichtigen Satz:

I. Das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Axe ist gleich der Summe der Trägheitsmomente seiner Theile um dieselbe Axe.

Setzen wir ferner in die Definitionsgleichung (35″) von M den Werth r^2, ausgedrückt durch die Coordinaten x, y, z des Massenelementes dm und die Cosinus α, β, γ der Richtungswinkel der Axe, ein, der sich nach einer der p. 137 angestellten ähnlichen Rechnung ergiebt:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2, \\ &= (y^2 + z^2)\alpha^2 + (z^2 + x^2)\beta^2 + (x^2 + y^2)\gamma^2 \\ &\quad - 2yz\beta\gamma - 2zx\gamma\alpha - 2xy\alpha\beta, \end{aligned}$$

so erhalten wir in Rücksicht auf (35) den Werth:

$$\mathsf{M} = \Xi\alpha^2 + \mathsf{H}\beta^2 + \mathsf{Z}\gamma^2 + 2\Xi'\beta\gamma + 2\mathsf{H}'\gamma\alpha + 2\mathsf{Z}'\alpha\beta. \tag{36}$$

Diese Formel zeigt, dass das Trägheitsmoment um *jede* durch den Coordinatenanfang gehende Axe sich bestimmt durch die sechs Grössen $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \Xi', \mathsf{H}', \mathsf{Z}'$. Das Gesetz, nach welchem M mit der Richtung der Axe variirt, drückt sich gemäss der letzten Gleichung, in welcher $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ nach ihrer Bedeutung stets positiv sind, in folgendem Satz aus:

II. *Trägt man auf allen durch einen gegebenen Punkt p des Körpers gehenden Axen Repräsentanten für die reciproke Quadratwurzel aus den zugehörigen Trägheitsmomenten auf, so erfüllen deren Endpunkte ein dreiaxiges Ellipsoid: das Trägheitsellipsoid oder Centralellipsoid des Körpers in Bezug auf den Punkt p.*

Seine Gleichung ist:

$$1 = \Xi x^2 + \mathsf{H}y^2 + \mathsf{Z}z^2 + 2(\Xi' yz + \mathsf{H}' zx + \mathsf{Z}' xy). \tag{36'}$$

Daraus folgt, dass in Bezug auf drei zu einander normale Axen durch jenen Punkt das Trägheitsmoment seine grössten und kleinsten Werthe annimmt; diese Richtungen heissen die Hauptträgheitsaxen durch p, die bezüglichen Werthe die Hauptträgheitsmomente.

In Bezug auf die Hauptträgheitsaxen vertheilen sich die Werthe der Trägheitsmomente um den Punkt p symmetrisch.

Die Aufsuchung der Hauptträgheitsaxen für einen gegebenen Körper und einen in ihm gegebenen Punkt p erfordert sonach die Kenntniss der Grössen $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \Xi', \mathsf{H}', \mathsf{Z}'$ für diesen Punkt p und ein beliebiges Coordinatensystem; die Berechnung, übereinstimmend mit der Bestimmung der Lage der Axen eines dreiaxigen Ellipsoides, verlangt die Auflösung einer cubischen Gleichung. Practische Wichtigkeit gewinnt der Satz nur in den Fällen, wo die Gestalt und Massen-

vertheilung des Körpers für einen bestimmten Punkt, z. B. für den Schwerpunkt, die Lage der Hauptträgheitsaxen aus den Symmetrieverhältnissen sofort erschliessen lässt, wie z. B. für einen elliptischen Cylinder.

Wählt man nämlich die so gefundenen Hauptaxen zu Coordinatenaxen A, B, C, so muss die Gleichung des Trägheitsellipsoides auf dessen Hauptaxen bezogen erscheinen und demgemäss

$$\mathsf{A}' = -\int bc\,dm = 0, \quad \mathsf{B}' = -\int ca\,dm = 0, \quad \Gamma' = -\int ab\,dm = 0 \quad (37)$$

sein, M hingegen durch die Hauptträgheitsmomente

$$\mathsf{A} = \int (b^2 + c^2)\,dm, \quad \mathsf{B} = \int (c^2 + a^2)\,dm, \quad \Gamma = \int (a^2 + b^2)\,dm \quad (37')$$

sich ausdrücken:

$$\mathsf{M} = \mathsf{A}\alpha^2 + \mathsf{B}\beta^2 + \Gamma\gamma^2. \quad (37'')$$

Die Gleichung des Hauptträgheitsellipsoids ist dann:

$$1 = \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}y^2 + \Gamma z^2. \quad (37''')$$

In diesem Falle genügt also die Kenntniss nur dreier Trägheitsmomente zur Bestimmung aller, die für Axen gelten, welche durch den Punkt p gehen.

Verschwinden nur zwei von den drei Deviationsmomenten $\mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma'$, so fällt nur eine Axe des Systems A, B, C mit einer Hauptträgheitsaxe zusammen, z. B. die C-Axe, falls $\mathsf{A}' = \mathsf{B}' = 0$ ist.

Wie die Trägheitsmomente um beliebige durch einen Punkt gehende Axen sich durch die Hauptträgheitsmomente und die Winkel der betreffenden Axen gegen die Hauptträgheitsaxen für diesen Punkt bestimmen, so gilt ähnliches auch für die Deviationsmomente, d. h. für die Integrale:

$$\Xi' = -\int yz\,dm, \quad \mathsf{H}' = -\int zx\,dm, \quad \mathsf{Z}' = -\int xy\,dm,$$

nur treten hier naturgemäss die Winkel auf, welche zwei auf einander normale Richtungen mit den Hauptträgheitsaxen bilden.

Bezeichnet man wieder die den letzteren parallel gerechneten Coordinaten mit a, b, c und setzt:

$$x = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3,$$
$$y = a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3,$$
$$z = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3,$$

so folgt in Rücksicht auf (37) und (37') sogleich:

$$\begin{aligned} \mathsf{\Xi}' &= \mathsf{A}\beta_1\gamma_1 + \mathsf{B}\beta_2\gamma_2 + \mathsf{\Gamma}\beta_3\gamma_3, \\ \mathsf{H}' &= \mathsf{A}\gamma_1\alpha_1 + \mathsf{B}\gamma_2\alpha_2 + \mathsf{\Gamma}\gamma_3\alpha_3, \\ \mathsf{Z}' &= \mathsf{A}\alpha_1\beta_1 + \mathsf{B}\alpha_2\beta_2 + \mathsf{\Gamma}\alpha_3\beta_3. \end{aligned} \tag{38}$$

Späterer Anwendungen wegen fügen wir hierzu auch die durch A, B, $\mathsf{\Gamma}$ gegebenen Werthe der Trägheitsmomente um die X, Y, Z-Coordinatenaxen; sie lauten nach (37''):

$$\begin{aligned} \mathsf{\Xi} &= \mathsf{A}\alpha_1^2 + \mathsf{B}\alpha_2^2 + \mathsf{\Gamma}\alpha_3^2, \\ \mathsf{H} &= \mathsf{A}\beta_1^2 + \mathsf{B}\beta_2^2 + \mathsf{\Gamma}\beta_3^2, \\ \mathsf{Z} &= \mathsf{A}\gamma_1^2 + \mathsf{B}\gamma_2^2 + \mathsf{\Gamma}\gamma_3^2. \end{aligned} \tag{38'}$$

Aus ihnen folgt:

$$\mathsf{\Xi} + \mathsf{H} + \mathsf{Z} = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{\Gamma}. \tag{38''}$$

Die Summe der Trägheitsmomente um drei beliebige zu einander normale Axen ist jederzeit gleich der Summe der drei Hauptträgheitsmomente. —

Wir wollen jetzt das Trägheitsmoment M_0 um eine zur gegebenen Axe a parallele a_0 durch den Schwerpunkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Körpers berechnen. Es ist dann in der Definition

$$\mathsf{M}_0 = \int r_0^2\, dm$$

statt des Werthes auf p. 163 der für r_0^2 folgende zu setzen:

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - ((x-\xi)\alpha + (y-\eta)\beta + (z-\zeta)\gamma)^2 \\ &= r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + 2(x\alpha + y\beta + z\gamma)(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma) \\ &\quad + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$d^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2$$

das Quadrat des Abstandes der beiden parallelen Axen von einander, oder der Axe a vom Schwerpunkt. Setzt man dies r_0^2 oben ein und bedenkt die Definitionen von ξ, η, ζ, so findet sich:

$$\mathsf{M}_0 = \mathsf{M} - md^2,$$

falls m die ganze Masse des Körpers bezeichnet. Schreibt man dies:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_0 + md^2, \tag{39}$$

so erhält man den Satz:

III. Verlegt man die Drehungsaxe mit sich selbst parallel aus dem Schwerpunkt in die Entfernung d von ihrer früheren Lage, so wächst das Trägheitsmoment um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung d.

Bei Einführung des Trägheitsradius wird die Gleichung (39′):

$$\mathsf{M} = m(\varkappa^2 + d^2).$$

Verbindet man diesen Satz mit dem vorigen, so erkennt man, dass hierdurch die Trägheitsmomente um beliebige Axen durch beliebige Punkte innerhalb oder ausserhalb des Körpers sofort angebbar werden, wenn man nur für einen Punkt p, dessen Lage gegen den Schwerpunkt gegeben ist, die drei Hauptträgheitsmomente kennt. Denn für eine durch α, β, γ in ihrer Richtung gegen die Hauptträgheitsaxen bestimmte Axe findet sich nach (37″):

$$\mathsf{M} = \mathsf{A}\alpha^2 + \mathsf{B}\beta^2 + \Gamma\gamma^2,$$

für die dazu parallele durch den Schwerpunkt:

$$\mathsf{M}_0 = \mathsf{M} - md^2,$$

und abermals für die parallele durch einen beliebigen Punkt p':

$$\mathsf{M}' = \mathsf{M}_0 + md'^2,$$

falls d und d' die Entfernungen der Punkte p und p' von der zur gegebenen Axe parallelen durch den Schwerpunkt sind; hieraus folgt schliesslich:

$$\mathsf{M}' = \mathsf{A}\alpha^2 + \mathsf{B}\beta^2 + \Gamma\gamma^2 + m(d'^2 - d^2). \tag{39''}$$

Ist der Punkt p der Schwerpunkt des Körpers, also $\mathsf{A} = \mathsf{A}_0$, $\mathsf{B} = \mathsf{B}_0$, $\Gamma = \Gamma_0$ und $d = 0$, so erhalten wir durch Einsetzen des nach d^2 sogleich zu bildenden Werthes von d'^2:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_1' = \left(\mathsf{A}_0 + m(\eta'^2 + \zeta'^2)\right)\alpha^2 + \left(\mathsf{B}_0 + m(\zeta'^2 + \xi'^2)\right)\beta^2 + \left(\Gamma_0 + m(\xi'^2 + \eta'^2)\right)\gamma^2 \\ - 2m(\eta'\zeta'\beta\gamma + \zeta'\xi'\gamma\alpha + \xi'\eta'\alpha\beta).\end{aligned} \tag{39'''}$$

Hierin sind ξ', η', ζ' die auf die Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt bezogenen Coordinaten des Punktes p'.

Die Gleichung (39‴) zeigt, dass die Hauptträgheitsaxen für verschiedene Punkte eines Körpers keineswegs parallel sind, denn das Trägheitsellipsoid für p' hat die Coordinatenaxen nicht zu Hauptaxen. Doch erkennt man aus der Gestalt der Factoren von $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und $\alpha\beta$ sogleich den Satz:

Für Punkte, welche auf einer der Hauptträgheitsaxen A_0, B_0, C_0 durch den Schwerpunkt liegen, sind alle drei Hauptträgheitsaxen A, B, C mit A_0, B_0, C_0 parallel.

Für Punkte, welche in einer der Ebenen der Hauptträgheitsaxen A_0, B_0, C_0 liegen, steht eine der Hauptträgheitsaxen normal zu jener Ebene.

Wir gehen nun an die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente in Bezug auf den Schwerpunkt für einige einfache homogene Körper.

1. Die Hauptträgheitsmomente einer unendlich dünnen homogenen Kreisscheibe.

Nach der Symmetrie muss das Trägheitsellipsoid hier ein Rotationsellipsoid mit der Hauptaxe normal zur Scheibe sein; letztere möge zur Z-Axe gewählt werden.

Sei ϑ die Dicke der Scheibe, ϱ ihr Radius, ε ihre Dichtigkeit, m ihre Masse; das Volumenelement dk werde ausgeschnitten durch um $d\varphi$ gegeneinander geneigte Meridianebenen und Kreiscylinder von um dr wachsenden Radien; es ist dann:

$$dk = \vartheta r\, dr\, d\varphi,$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_0 &= \varepsilon\vartheta \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\varphi = \pi\varepsilon\vartheta \frac{\varrho^4}{2} = m\frac{\varrho^2}{2}, \\ A_0 = B_0 &= \varepsilon\vartheta \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\varphi\, dr\, d\varphi = \pi\varepsilon\vartheta \frac{\varrho^4}{4} = m\frac{\varrho^2}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Für eine beliebige Axe durch den Schwerpunkt erhält man sonach:

$$M_0 = \frac{m\varrho^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2) = \frac{m\varrho^2}{4}(1 + \gamma^2). \tag{40'}$$

2. Die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Kreiscylinders.

Wieder muss das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt ein Rotationsellipsoid sein; die Cylinderaxe sei die Z-Axe.

Wir denken uns den Cylinder von der Länge L und der Masse M aus Kreisscheiben der unter 1. behandelten Art zusammengesetzt; ϑ sei mit dz vertauscht.

Nach dem Satz I auf p. 162 haben wir sogleich:

$$\Gamma_0 = \pi\varepsilon\frac{\varrho^4}{2}\int_{-L/2}^{+L/2} dz = \pi\varepsilon\frac{\varrho^4}{2}L = M\frac{\varrho^2}{2}; \tag{41}$$

nach Satz III auf p. 165 findet sich, da der Abstand einer beliebigen Scheibe von der Drehungsaxe identisch mit ihrer Z-Coordinate ist:

$$A_0 = B_0 = \pi\varepsilon\frac{\varrho^4}{4}\int_{-L/2}^{+L/2} dz + \pi\varepsilon\varrho^2\int_{-L/2}^{+L/2} z^2\, dz = \pi\varepsilon\frac{\varrho^4}{4}L + \pi\varepsilon\frac{\varrho^2 L^3}{12} = M\left(\frac{\varrho^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right). \tag{41'}$$

Hieraus folgt der allgemeine Werth des Trägheitsmomentes für den Schwerpunkt:

$$M_0 = M\left(\left(\frac{\varrho^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{\varrho^2}{2}\gamma^2\right) = \frac{M}{4}\left(\varrho^2 + \frac{L^2}{3} + \left(\varrho^2 - \frac{L^2}{3}\right)\gamma^2\right). \tag{41''}$$

Ist der Radius ϱ verschwindend gegen die Länge L des Cylinders, derselbe ein „Faden", so haben wir:

$$\mathsf{M}_0 = \frac{ML^2}{12}(1 - \gamma^2); \tag{41'''}$$

das Trägheitsmoment um die Fadenrichtung verschwindet, das Trägheitsellipsoid degenerirt zu einem unendlichen Cylinder vom Radius

$$\frac{2}{L}\sqrt{\frac{3}{M}}.$$

3. Trägheitsmoment einer homogenen Kugel.

Die Kugel vom Radius R können wir ebenfalls aus Kreisscheiben von der Dicke dz aufbauen. Für eine solche im Abstand z vom Centrum ist dann:

$$\varrho^2 = R^2 - z^2.$$

Demgemäss haben wir für alle Axen durch den Schwerpunkt:

$$\mathsf{M}_0 = \frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{-R}^{+R} dz\,(R^2 - z^2) = \frac{8\pi\varepsilon}{15}R^5 = M\frac{2}{5}R^2. \tag{42}$$

4. Die Hauptträgheitsmomente eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides.

Die Hauptträgheitsaxen für den Schwerpunkt, d. h. für das Centrum, fallen nach Symmetrie mit den Axen des Ellipsoides zusammen.

Sei dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so bestimmt sich

$$\mathsf{A}_0 = \varepsilon\int (y^2 + z^2)\,dk, \qquad \mathsf{B}_0 = \varepsilon\int (z^2 + x^2)\,dk, \qquad \Gamma_0 = \varepsilon\int (x^2 + y^2)\,dk$$

durch die Substitution

$$x = x_1 a, \qquad y = y_1 b, \qquad z = z_1 c$$

zu

$$\mathsf{A}_0 = \varepsilon\, abc\int (b^2 y_1^2 + c^2 z_1^2)\,dk_1, \qquad \mathsf{B}_0 = \varepsilon\, abc\int (c^2 z_1^2 + a^2 x_1^2)\,dk_1,$$

$$\Gamma_0 = \varepsilon\, abc\int (a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2)\,dk_1,$$

worin dk_1 das Volumenelement der Kugel

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

bedeutet. Für diese Kugel ist aber nach Formel (42)

$$\varepsilon\int(y_1^2+z_1^2)\,dk_1=\varepsilon\int(z_1^2+x_1^2)\,dk_1=\varepsilon\int(x_1^2+y_1^2)\,dk_1=\frac{8\pi\varepsilon}{15}$$

und daher

$$\varepsilon\int x_1^2\,dk_1=\varepsilon\int y_1^2\,dk_1=\varepsilon\int z_1^2\,dk_1=\frac{4\pi\varepsilon}{15}.$$

Da noch $(4\pi\varepsilon/3)abc = m$ die Masse des Ellipsoides ist, so folgt schliesslich:

$$\mathsf{A}_0=\frac{m(b^2+c^2)}{5},\qquad \mathsf{B}_0=\frac{m(c^2+a^2)}{5},\qquad \Gamma_0=\frac{m(a^2+b^2)}{5}. \tag{42'}$$

Für eine beliebige Axe durch den Schwerpunkt, welche durch die Cosinus α, β, γ ihrer Winkel mit den Hauptaxen bestimmt ist, ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_0&=\frac{m}{5}\left[(b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2\right]\\&=\frac{m}{5}\left[a^2+b^2+c^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2\right]. \text{ —}\end{aligned} \tag{42''}$$

Die vorstehend entwickelten allgemeinen Gesetze über die Trägheitsmomente gestatten nun den Werth der lebendigen Kraft Ψ für ein starres System, z. B., was der practisch einzig wichtige Fall ist, für einen continuirlichen Körper zu berechnen.

Nach seiner Definition ist:

$$\Psi=\frac{1}{2}\int dm\,(x'^2+y'^2+z'^2);$$

setzen wir hierein die Werthe der Geschwindigkeiten nach (32), so folgt zunächst:

$$\begin{aligned}2\Psi = {} & m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)\\&+\lambda'^2\int dm\,((y-y_0)^2+(z-z_0)^2)\\&+\mu'^2\int dm\,((z-z_0)^2+x-x_0)^2)+\nu'^2\int dm\,((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\\&+2x_0'\left(\mu'\int dm\,(z-z_0)-\nu'\int dm\,(y-y_0)\right)\\&+2y_0'\left(\nu'\int dm\,(x-x_0)-\lambda'\int dm\,(z-z_0)\right)\\&+2z_0'\left(\lambda'\int dm\,(y-y_0)-\mu'\int dm\,(x-x_0)\right)\\&-2\mu'\nu'\int dm\,(y-y_0)(z-z_0)-2\nu'\lambda'\int dm\,(z-z_0)(x-x_0)\\&-2\lambda'\mu'\int dm\,(x-x_0)(y-y_0).\end{aligned} \tag{43}$$

Bezeichnet man die relativen Coordinaten des Schwerpunktes gegen den im Körper festen Punkt x_0, y_0, z_0 mit ξ_0, η_0, ζ_0, die Trägheits- und Deviationsmomente um Parallele zu den Coordinatenaxen durch x_0, y_0, z_0, um welche auch die Drehungsgeschwindigkeiten λ', μ', ν' gerechnet sind, mit $\mathsf{\Xi}_0, \mathsf{H}_0, \mathsf{Z}_0, \mathsf{\Xi}_0', \mathsf{H}_0', \mathsf{Z}_0'$, so schreibt sich dies Resultat viel einfacher:

$$2\Psi = m[x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 + 2x_0'(\mu'\zeta_0 - \nu'\eta_0) + 2y_0'(\nu'\xi_0 - \lambda'\zeta_0) + 2z_0'(\lambda'\eta_0 - \mu'\xi_0)]$$
$$+ \lambda'^2\mathsf{\Xi}_0 + \mu'^2\mathsf{H}_0 + \nu'^2\mathsf{Z}_0 + 2\mu'\nu'\mathsf{\Xi}_0' + 2\nu'\lambda'\mathsf{H}_0' + 2\lambda'\mu'\mathsf{Z}_0'. \tag{43'}$$

Führen wir die resultirende Fortschreitungsgeschwindigkeit ω_0 des Punktes x_0, y_0, z_0 ein durch

$$\omega_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$$

und die Cosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ der Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen einschliesst, durch

$$\alpha_0 = \frac{x_0'}{\omega_0}, \qquad \beta_0 = \frac{y_0'}{\omega_0}, \qquad \gamma_0 = \frac{z_0'}{\omega_0},$$

führen wir ferner die resultirende Rotationsgeschwindigkeit τ_0 um den Punkt x_0, y_0, z_0 ein durch

$$\tau_0^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2$$

und die Cosinus α, β, γ der Winkel, welche die Rotationsaxe oder, kurz gesagt, welche τ_0 mit den Coordinatenaxen einschliesst, durch

$$\alpha = \frac{\lambda'}{\tau_0}, \qquad \beta = \frac{\mu'}{\tau_0}, \qquad \gamma = \frac{\nu'}{\tau_0},$$

so ergiebt sich:

$$2\Psi = m\left(\omega_0^2 + 2\tau_0\omega_0[\alpha_0(\beta\zeta_0 - \gamma\eta_0) + \beta_0(\gamma\xi_0 - \alpha\zeta_0) + \gamma_0(\alpha\eta_0 - \beta\xi_0)]\right)$$
$$+ \tau_0^2(\alpha^2\mathsf{\Xi}_0 + \beta^2\mathsf{H}_0 + \gamma^2\mathsf{Z}_0 + 2\beta\gamma\mathsf{\Xi}_0' + 2\gamma\alpha\mathsf{H}_0' + 2\alpha\beta\mathsf{Z}_0').$$

Hierin können wir nach (36) das Trägheitsmoment M_0 um die Richtung der momentanen Drehungsaxe einführen und schreiben:

$$2\Psi = m\left(\omega_0^2 + 2\tau\omega_0[\alpha_0(\beta\zeta_0 - \gamma\eta_0) + \beta_0(\gamma\xi_0 - \alpha\zeta_0) + \gamma_0(\alpha\eta_0 - \beta\xi_0)]\right) + \tau_0^2\mathsf{M}_0. \tag{43''}$$

Bezeichnet man schliesslich mit $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ die Cosinus der Winkel, welche eine zu ω_0 und τ_0 normale Richtung σ_0 mit den Coordinatenaxen einschliesst, falls ω_0 zu τ_0 zu σ_0 liegt wie X zu Y zu Z, und nennt ϑ den Winkel, der zwischen der Richtung von ω_0 und τ_0 liegt, so wird

$$\beta_0\gamma - \gamma_0\beta = \alpha^0 \sin\vartheta,$$
$$\gamma_0\alpha - \alpha_0\gamma = \beta^0 \sin\vartheta,$$
$$\alpha_0\beta - \beta_0\alpha = \gamma^0 \sin\vartheta,$$

und es kommt noch einfacher:

$$2\Psi = m\left(\omega_0^2 + 2\tau_0\omega_0 \sin\vartheta\,(\xi_0\alpha^0 + \eta_0\beta^0 + \zeta_0\gamma^0)\right) + \tau_0^2\mathsf{M}_0. \tag{43'''}$$

Dieser Werth ist noch vollkommen allgemein, denn weder über die Bewegung des Körpers, noch über die Lage des Coordinatensystems ist irgend eine specielle Voraussetzung gemacht. Führt man solche ein, so kann man das Resultat noch weiter vereinfachen.

Fällt z. B. der willkürliche Punkt x_0, y_0, z_0, auf den sich Verschiebungen und Drehungen beziehen, in den Schwerpunkt des Körpers, so ist:

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0; \qquad \omega_0 = \omega, \qquad \tau_0 = \tau, \qquad \mathsf{M}_0 = \mathsf{M},$$

und

$$2\Psi = m\omega^2 + \mathsf{M}\tau^2; \tag{44}$$

die ganze lebendige Kraft giebt sich als die Summe eines nur von der Fortschreitung und eines nur von der Drehung abhängigen Gliedes, nämlich als die Summe der lebendigen Kräfte dieser beiden Bewegungen.

Dieselbe Form resultirt, wenn in (43‴) der Winkel ϑ zwischen den Richtungen von ω_0 und τ_0 verschwindet — eine Beziehung, die man nach p. 140 durch Wahl des Coordinatensystem stets erreichen kann — oder auch, wenn der Schwerpunkt in der Ebene liegt, welche die Richtung der Geschwindigkeit ω_0 und die der Rotationsaxe von τ_0 enthält, also $\xi_0\alpha^0 + \eta_0\beta^0 + \zeta_0\gamma^0 = 0$ ist.

Ist ein Punkt des Körpers fest, so legt man in diesen naturgemäss die Stelle x_0, y_0, z_0 und erhält dann, da $\omega_0 = 0$ ist:

$$2\Psi = \tau_0^2\mathsf{M}_0; \tag{44'}$$

hierin lässt sich M_0 durch die Hauptträgheitsmomente A_0, B_0, Γ_0 und τ_0 durch die Drehungsgeschwindigkeiten α_0', β_0', γ_0' um die Hauptträgheitsaxen in Bezug auf x_0, y_0, z_0 ausdrücken, sodass für einen um einen festen Punkt rotirenden Körper auch gilt:

$$2\Psi = \mathsf{A}_0\alpha_0'^2 + \mathsf{B}_0\beta_0'^2 + \Gamma_0\gamma_0'^2. \tag{44''}$$

§ 20. Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers. Beispiele. Der Anfang der Bewegung.

Nachdem wir in den vorigen Abschnitten alle die in den Bewegungsgleichungen für einen starren Körper auftretenden Functionen ausführlich untersucht haben, gehen wir nun zu ihren Anwendungen über und fragen zunächst nach den Bedingungen dafür, dass bei verschwindenden Geschwindigkeiten auch alle Beschleunigungen verschwinden. Diese Bedingungen bestimmen das Gleichgewicht eines starren Körpers, weil bei ihrer Erfüllung vorhandene Ruhe auch durch die wirkenden Kräfte nicht aufgehoben wird.

Wir gehen aus von den Gleichungen (34) und führen ein, dass $x_0', y_0', z_0', \lambda', \mu', \nu'$ verschwinden sollen. Da der Körper ruht, so können wir das in ihm feste System ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit dem im Raume festen zusammenfallen lassen, also $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ setzen; λ', μ', ν' sind dann die Rotationsgeschwindigkeiten um die Coordinatenaxen selbst. Berücksichtigen wir, dass die Differentiation von x_h, y_h, z_h nach t in $x_0', y_0', z_0', \lambda', \mu', \nu'$ lineäre homogene Ausdrücke liefert, die nach der Annahme verschwinden, so erhalten wir unter Anwendung der Bezeichnungen (35) folgende sechs Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{dx_0'}{dt} + \zeta\frac{d\mu'}{dt} - \eta\frac{d\nu'}{dt}\right) &= \sum_h X_h, \\
m\left(\frac{dy_0'}{dt} + \xi\frac{d\nu'}{dt} - \zeta\frac{d\lambda'}{dt}\right) &= \sum_h Y_h, \\
m\left(\frac{dz_0'}{dt} + \eta\frac{d\lambda'}{dt} - \xi\frac{d\mu'}{dt}\right) &= \sum_h Z_h, \\
m\left(\eta\frac{dz_0'}{dt} - \zeta\frac{dy_0'}{dt}\right) + \Xi\frac{d\lambda'}{dt} + \mathrm{Z}'\frac{d\mu'}{dt} + \mathrm{H}'\frac{d\nu'}{dt} &= \sum_h (y_h Z_h - z_h Y_h), \\
m\left(\zeta\frac{dx_0'}{dt} - \xi\frac{dz_0'}{dt}\right) + \mathrm{Z}'\frac{d\lambda'}{dt} + \mathrm{H}\frac{d\mu'}{dt} + \Xi'\frac{d\nu'}{dt} &= \sum_h (z_h X_h - x_h Z_h), \\
m\left(\xi\frac{dy_0'}{dt} - \eta\frac{dx_0'}{dt}\right) + \mathrm{H}'\frac{d\lambda'}{dt} + \Xi'\frac{d\mu'}{dt} + \mathrm{Z}\frac{d\nu'}{dt} &= \sum_h (x_h Y_h - y_h X_h).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Dies System zeigt, dass, wenn die Beschleunigung vom Zustand der Ruhe aus stattfindet, zwischen den sechs Beschleunigungen und den Kraftcomponenten X, Y, Z nebst Momenten L, M, N sechs lineäre Beziehungen bestehen und dass die ersteren nur mit den letzteren verschwinden. Nun ist nach den Formeln, welche für Einführung eines neuen Coordinatensystems gelten, mit dem Verschwinden der Beschleunigungen in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem das für jedes andere nothwendig verknüpft; dasselbe gilt für die Kräfte und auch für die Drehungsmomente bei verschwindenden Componentensummen; daher gilt der folgende Satz:

Für das Gleichgewicht eines starren Systemes ist die nothwendige und hinreichende Bedingung das Verschwinden der Kraftcomponenten und Drehungsmomente in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem, ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$
\begin{gathered}
\sum_h X_h = 0, \quad \sum_h Y_h = 0, \quad \sum_h Z_h = 0, \\
\sum_h (y_h Z_h - z_h Y_h) = 0, \quad \sum_h (z_h X_h - x_h Z_h) = 0, \quad \sum_h (x_h Y_h - y_h X_h) = 0.
\end{gathered}
\tag{46}
$$

Sind also die Kräfte X_h, Y_h, Z_h als Functionen der Coordinaten x_h, y_h, z_h gegeben, so wird sich aus diesen Formeln im Allgemeinen die Lage bestimmen lassen, in welcher der Körper in Ruhe verharren kann. Ist der Körper aber nicht vollkommen frei beweglich, sondern an feste Bahnen oder Axen gebunden, so sind aus den Componenten jene Theile X_k', Y_k', Z_k' auszusondern, welche die Reactionen der Bahnen oder Axen darstellen und nicht direct gegeben sind. Der dadurch gesteigerten Anzahl der Unbekannten entsprechend wächst auch die Anzahl der Gleichungen durch die Bedingungen, welche auf jene Reactionskräfte führen.

Unter diesen Bedingungen sind die, dass irgend ein Punkt des starren Systems auf einer festen Oberfläche oder Curve zu bleiben gezwungen ist, genau wie die analogen in § 9 für materielle Punkte gestellten zu behandeln. Sie geben eine, resp. zwei Gleichungen für dessen Coordinaten, zugleich eine, resp. zwei in ihrer Richtung gegebene, aber in ihrer Grösse unbekannte Reactionskräfte, die in dem gebundenen Punkte angreifen.

Ist ein Punkt p vollkommen fest gelegt, so ist für das starre System noch eine Drehung um denselben möglich. Es ist hier sonach der Werth der drei Coordinaten x_p, y_p, z_p als gegeben und zugleich die in ihm wirkende Reactionskraft nach Grösse und Richtung und damit X', Y', Z' als unbekannt in die Gleichungen (46) einzuführen.

Diesen Fall wollen wir als erstes Beispiel besprechen.

1. Gleichgewicht eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers.

Ist der feste Punkt zum Coordinatenanfang gewählt, so treten die in ihm angreifenden Kraftcomponenten nur in den Componentensummen auf und wir erhalten die Bedingungen:

$$\begin{gathered} X' + \sum_h X_h = Y' + \sum_h Y_h = Z' + \sum_h Z_h = 0, \\ \sum_h (y_h Z_h - z_h Y_h) = \sum_h (z_h X_h - x_h Z_h) = \sum_h (x_h Y_h - y_h X_h) = 0. \end{gathered} \tag{46'}$$

Die letzteren Gleichungen zeigen, da die Bedingung (22″) durch sie identisch erfüllt ist, dass die gegebenen Kräfte K_h sich ersetzen lassen müssen durch eine einzige Kraft K, deren Richtung den festen Punkt enthält; die ersteren zeigen, dass die in demselben angreifende Reactionskraft jener Resultirenden K gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

Für parallele Kräfte spricht sich das Resultat specieller so aus, dass die Verbindungslinie des Kräftemittelpunktes mit dem festen Punkt

den gegebenen Kräften parallel und die Reaction ihrer Summe entgegengesetzt gleich sein muss.

Wirkt speciell nur die Schwere, so muss der Schwerpunkt des Körpers in der Verticalen durch den festen Punkt liegen, wie man sagt „unterstützt“ sein; die Reaction ist dem Gewicht des Körpers gleich.

Lenkt man den Körper aus der hierdurch gegebenen Gleichgewichtslage unendlich wenig ab, so dass der Schwerpunkt in Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Nullpunkt der feste Punkt und dessen Z-Axe vertical nach unten gerichtet ist, die Coordinaten ξ, η, ζ erhält, so werden die Drehungsmomente erregt

$$L = \eta G, \qquad M = -\xi G, \qquad N = 0,$$

in welchen G das im Schwerpunkt angreifende Gesammtgewicht des Körpers bezeichnet. Man erkennt sogleich durch die geometrische Anschauung, dass diese Momente den Körper in die Ruhelage zurückführen, wenn der Schwerpunkt unterhalb der Unterstützung lag, im andern Falle ihn von ihr entfernen; das Gleichgewicht ist also im erstern Falle stabil, im zweiten labil. Fällt der Unterstützungspunkt in den Schwerpunkt, so erregt eine Ablenkung aus der Ruhelage gar kein Moment; das Gleichgewicht ist in diesem Falle indifferent. —

Wird ausser dem Punkte p noch ein zweiter q festgehalten — beide müssen in der Wirklichkeit immer in der Oberfläche des Körpers liegen —, so können alle in der Richtung $\overline{pq}$ liegenden Punkte ihren Ort nicht verändern, der Körper ist nur um $\overline{pq}$ als Axe drehbar. Diesem Falle wollen wir uns jetzt zuwenden.

2. Gleichgewicht eines um eine feste Axe drehbaren Körpers; Theorie der Waage.

Legen wir die Z-Axe in die Richtung der festen Geraden $\overline{pq}$, den Coordinatenanfang in die Stelle p und bezeichnen die Entfernung $\overline{pq}$ mit e, so lauten die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\begin{gathered} X' + X'' + \sum X_h = Y' + Y'' + \sum Y_h = Z' + Z'' + \sum Z_h = 0, \\ -eY'' + \sum (y_h Z_h - z_h Y_h) = +eX'' + \sum (z_h X_h - x_h Z_h) \quad (46'') \\ = \sum (x_h Y_h - y_h X_h) = 0. \end{gathered}$$

Man erkennt, dass die sechs Componenten der beiden Reactionskräfte nur in fünf von diesen sechs Gleichungen auftreten und sonach eine von ihnen durch die äussern Kräfte allein zu erfüllen ist. Von den vorkommenden Combinationen sind

$$-(X' + X''), \qquad -(Y' + Y''), \qquad -(Z' + Z'')$$

die Componenten der Kraft, welche, wie man kurz sagt, die Axe $\overline{pq}$ erleidet, $+eY''$, $-eX''$ die Momente um die X- und Y-Coordinatenaxen, welche sie erfährt.

Die Gleichgewichtslage des Körpers wird allein bestimmt durch die Bedingung:

$$\sum (x_h Y_h - y_h X_h) = 0.$$

Nach Formel (16) kann man dafür auch schreiben:

$$\sum P_h p_h = 0,$$

worin P_h die Componente von K_h nach der XY-Ebene und p_h ihren Hebelarm bezeichnet; das Vorzeichen von p_h bestimmt sich nach der auf p. 143 gegebenen Regel.

Für nur zwei wirkende Kräfte resultirt daraus das sogenannte Hebelgesetz, ausgedrückt durch die Formel:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten die Theorie der Waage, welche wir ihrer practischen Wichtigkeit wegen ausführlicher besprechen wollen. (Figur 19.)

Die Waage ist ein um eine horizontale Axe A drehbarer Hebel, welcher unter der Wirkung seines Gewichtes und desjenigen von an seinen Enden aufgehangenen Massen im Gleichgewicht ist. Wir nennen die Waage unbelastet, wenn diese Massen nur diejenigen m_1 und m_2 der Waagschalen sind.

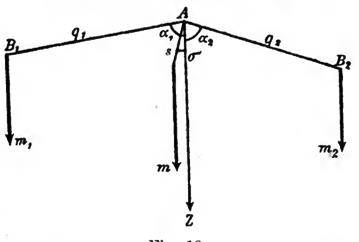


Fig. 19.

Das Gewicht mg des Waagebalkens greift in dessen Schwerpunkt an; derselbe liege im Abstand s von der Drehungsaxe A und die Verbindungslinie beider schliesse den Winkel σ mit der nach unten positiv gerechneten Verticalen ein. Die Gewichte $m_1 g$ und $m_2 g$ der Waagschalen greifen in den Punkten B_1 und B_2 an, deren Verbindungslinien mit der Axe A resp. $AB_1 = q_1$, $AB_2 = q_2$ sein und mit der Verticalen die Winkel α_1 und α_2 einschliessen mögen.

Für das Gleichgewicht im unbelasteten Zustande gilt dann:

$$m_1 q_1 \sin\alpha_1 - m_2 q_2 \sin\alpha_2 + ms \sin\sigma = 0. \tag{47}$$

Legen wir auf die Waagschale (2) die unbekannte Masse M, auf (1) eine Anzahl Gewichtsstücke M_1, bis die Stellung wieder die erste wird, so muss jetzt erfüllt sein:

$$(m_1 + M_1) q_1 \sin \alpha_1 - (m_2 + M) q_2 \sin \alpha_2 + m s \sin \sigma = 0 . \qquad (47')$$

Die Differenz beider Formeln giebt:

$$M_1 q_1 \sin \alpha_1 = M q_2 \sin \alpha_2 ;$$

wäre also die Waage vollkommen symmetrisch, d. h. $q_1 = q_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, so würde hieraus folgen $M = M_1$ und man erhielte durch die Masse der aufgelegten Gewichte M_1 direct die unbekannte Masse M bestimmt. Man gelangt, ohne diese Voraussetzung als erfüllt zu nehmen, zu dem gleichen Ziel, wenn man eine zweite Beobachtung so anstellt, dass man die unbekannte Masse M auf die Waagschale (1) legt und durch auf (2) gelegte Gewichtsstücke von der Gesammtmasse M_2 die ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder herstellt. Dann gilt noch weiter:

$$M q_1 \sin \alpha_1 = M_2 q_2 \sin \alpha_2 ,$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$M = \sqrt{M_1 M_2} , \qquad (47'')$$

also der Werth der gesuchten Masse unabhängig von dem sogenannten „Fehler der Waage“, unter welchem Namen man die Abweichung des Verhältnisses $q_1 \sin \alpha_1 / q_2 \sin \alpha_2$ von der Einheit versteht. Man bemerkt, dass obige Gleichungen ergeben:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{q_2^2 \sin^2 \alpha_2}{q_1^2 \sin^2 \alpha_1} , \qquad (47''')$$

also auch die Bestimmung dieses Fehlers durch die beschriebenen zwei Beobachtungen gestatten.

Sind M_1 und M_2 um einen nur sehr kleinen Bruchtheil ihres Werthes verschieden, so kann man statt der letzten beiden Formeln unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung schreiben:

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2} , \qquad \frac{q_2 \sin \alpha_2 - q_1 \sin \alpha_1}{q_1 \sin \alpha_1} = f = \frac{M_1 - M_2}{2 M_2} .$$

Es ist zu bemerken, dass diese Betrachtung ignorirt, dass in Wirklichkeit der Waagebalken nicht starr ist und demgemäss die Hebelarme $q_h \sin \alpha_h$ sich mit der Belastung ändern. Ist die Waage von Anfang an symmetrisch, bleibt sie dies auch bei der Belastung und sind ausserdem die Massen beider Waagschalen m_1 und m_2 gleich, so ist die Biegung des Balkens ohne Einfluss; im andern Falle giebt sie im Resultat einen kleinen Fehler. —

Unter der Empfindlichkeit einer Waage versteht man den Ausschlag, welchen ihr Zeiger bei einem gegebenen, der Belastung einer Waagschale zugefügten Uebergewicht giebt. Wir wollen untersuchen, von welchen Umständen derselbe abhängig ist.

Wird bei der Anordnung der Belastungen, welche die durch einen bestimmten Winkel σ gegebene Gleichgewichtslage zur Folge hat und deren Bedingungsgleichung (47′) ist:

$$(m_1 + M_1) q_1 \sin \alpha_1 - (m_2 + M_2) q_2 \sin \alpha_2 + ms \sin \sigma = 0,$$

auf die Waagschale (1) das Uebergewicht μ zugelegt, so verwandeln sich α_1 in $\alpha_1 - \varepsilon$, σ in $\sigma - \varepsilon$, α_2 in $\alpha_2 + \varepsilon$ und es gilt nun:

$$(m_1 + M_1 + \mu) q_1 \sin (\alpha_1 - \varepsilon) - (m_2 + M_2) q_2 \sin (\alpha_2 + \varepsilon) + ms \sin (\sigma - \varepsilon) = 0.$$

Die Differenz dieser Formel und der vorhergehenden mit $\cos \varepsilon$ multiplicirten ergiebt:

$$[(m_1 + M_1 + \mu) q_1 \cos \alpha_1 + (m_2 + M_2) q_2 \cos \alpha_2 + ms \cos \sigma] \operatorname{tg} \varepsilon = \mu q_1 \sin \alpha_1.$$

Fügt man zu der Klammer die linke Seite der vorletzten Gleichung mit $\cos \alpha_2 / \sin \alpha_2$ multiplicirt hinzu, so folgt:

$$\begin{aligned}[(m_1 + M_1) q_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + \mu q_1 \cos \alpha_1 + ms \sin (\alpha_2 + \sigma)] \operatorname{tg} \varepsilon \\ = \mu q_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 .\end{aligned} \tag{48}$$

Betrachten wir μ als eine Grösse, die neben $m_1 + M_1$ erster Ordnung ist, und nehmen an, dass der Winkel α_1 nur wenig von $\pi/2$ abweicht, so ist $\mu q_1 \cos \alpha_1$ als von zweiter Ordnung zu vernachlässigen, und wir erhalten, da in derselben Annäherung $\operatorname{tg} \varepsilon$ gleich ε ist, falls wir noch die Länge des Zeigers gleich l, den Ausschlag $l\varepsilon = e$ setzen, das schliessliche Resultat:

$$e = \frac{\mu l q_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{(m_1 + M_1) q_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + ms \sin (\alpha_2 + \sigma)}. \tag{48′}$$

Der Ausschlag findet sich mit dem Uebergewicht proportional, aber im Allgemeinen von der Belastung abhängig, nämlich abnehmend, wenn diese wächst. Es würden hiernach also grössere Massen mit kleinerer absoluter Genauigkeit bestimmbar sein, als kleinere. Dies wäre um so mehr unbequem, als bei den meisten Anwendungen der Waage Bestimmungen verschieden grosser Massen durch Addition und Subtraction verbunden werden und dabei die Ungenauigkeit der grösseren die Genauigkeit der kleineren aufhebt.

Es ist daher von Wichtigkeit, dass diese Abhängigkeit des Ausschlages von der Belastung verschwindet, wenn man den Winkel $(\alpha_1 + \alpha_2)$ zwischen den beiden Hebelarmen gleich π macht, also die

Aufhängepunkte B_1 und B_2 der Massen in dieselbe durch die Drehungsaxe A gehende Ebene legt. Dann gilt einfacher:

$$e = \frac{\mu\, l q_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{m s \sin(\alpha_2 + \sigma)}; \tag{48''}$$

es ist indess zu bemerken, dass diese Voraussetzung mit Strenge nur für *eine* Belastung erfüllt sein kann, da die Arme mit wachsender Belastung sich biegen. Um $\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ stets möglichst klein zu machen, ist es daher vortheilhaft, den Balken so einzurichten, dass im unbelasteten Zustand $(\alpha_1 + \alpha_2) > \pi$, bei mittlerer Belastung $(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi$ und erst bei grösserer $(\alpha_1 + \alpha_2) < \pi$ ist.

Dabei ist zu beachten, dass bei gewissen grossen Werthen von $(\alpha_1 + \alpha_2)$ die Waage kein stabiles Gleichgewicht mehr annehmen kann. Nehmen wir, um dies zu erkennen, den Waagbalken *symmetrisch* gebildet und belastet an, also $q_1 = q_2$, $m_1 = m_2 = m'$, $M_1 = M_2 = M'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\sigma = 0$, so wird:

$$e = \frac{\mu\, l q \sin\alpha}{2(m' + M')\, q \cos\alpha + m s},$$

also e für beliebig kleines μ unendlich, wenn α so weit $\pi/2$ übertrifft, dass bei einer gewissen Belastung der Nenner gleich Null wird. Gleiches kann bei sehr kleinen Belastungen eintreten, wenn der Schwerpunkt des Balkens *über* der Axe liegt, also $s < 0$ ist.

Nehmen wir schliesslich α sehr wenig von $\pi/2$ verschieden an, so giebt die letzte Formel:

$$e = \frac{\mu\, l q}{m s}. \tag{48'''}$$

Der Ausschlag ist also, abgesehen von dem Factor μ, *proportional mit der Zeigerlänge* l *und der Hebellänge* q; beide werden daher passend so gross als möglich gewählt. Für sehr genaue Messungen wird Ablesung mit Spiegel, Fernrohr und Scala angewandt und dadurch l gleich mehreren Metern gemacht.

Der Ausschlag ist ferner *indirect proportional mit der Masse des Balkens* m *und dem Abstand* s *zwischen dessen Schwerpunkt und der Drehungsaxe*; beide wird man also möglichst klein herzustellen suchen. Dabei schliessen allerdings die möglichste Kleinheit von m und die möglichste Grösse von q sich bis zu einem gewissen Grade gegenseitig aus, da der Balken trotz geringer Masse und trotz grosser Länge sich nahezu wie ein starrer Körper verhalten muss; man hat versucht, durch eigenthümliche Formen der Balken die beiden Anforderungen zu erfüllen.

Der Kleinheit von s wird dadurch eine Grenze gesetzt, dass die Schwingungsdauer der Waage mit verschwindendem s unendlich wird

und daher schon bei sehr kleinem s die Beobachtungen unbequem sind. —

Sind an dem starren Körper drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, festgehalten, so ist derselbe durch keine wie immer gewählte Kraft zu bewegen, denn keine der sechs Gleichungen des Gleichgewichts ist dann von den Reactionskräften frei. Gegenstand der Untersuchung können hier also ausschliesslich die in den drei unterstützten Punkten wirkenden Reactionskräfte sein. Hierfür giebt die folgende Aufgabe ein einfaches Beispiel.

3. Bestimmung der Drucke, welche ein in drei Punkten unterstützter schwerer Körper in denselben ausübt.

Sei G das Gewicht des Körpers, welches parallel der Z-Axe wirkt und in dem Schwerpunkte angreift, dessen Coordinaten $\xi = \eta = 0$, $\zeta = h$ sein mögen, und seien die Coordinaten der drei festen Punkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, dann gelten die sechs Gleichungen:

$$\begin{gathered}\sum_k X^{(k)} = \sum_k Y^{(k)} = \sum_k Z^{(k)} + G = 0, \\ \sum_k \left(y_k Z^{(k)} - z_k Y^{(k)}\right) = \sum_k \left(z_k X^{(k)} - x_k Z^{(k)}\right) = \sum_k \left(x_k Y^{(k)} - y_k X^{(k)}\right) = 0,\end{gathered} \tag{49}$$

worin die Summen über alle Reactionskräfte ausgedehnt sind.

Man erkennt, dass durch diese sechs Gleichungen die neun Unbekannten $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$ nicht bestimmbar sind. Man kann daher dem gegebenen Problem noch willkürliche Beschränkungen hinzufügen, unter denen sich am meisten die empfiehlt, dass alle $X^{(k)}$ und $Y^{(k)}$ gleich Null sind, weil sie dem Falle entspricht, dass der Körper — z. B. ein physikalischer Apparat — mit drei Punkten auf drei reibungsfreien horizontalen Ebenen ruht.

In diesem Falle wird sehr einfach:

$$\sum_k Z^{(k)} + G = 0, \qquad \sum_k y_k Z^{(k)} = \sum_k x_k Z^{(k)} = 0 \tag{49'}$$

und daher:

$$\begin{gathered}-Z^{(1)} = +\frac{(x_2 y_3 - y_2 x_3)\,G}{\Delta}, \qquad -Z^{(2)} = +\frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1)\,G}{\Delta}, \\ -Z^{(3)} = +\frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)\,G}{\Delta}.\end{gathered} \tag{49''}$$

worin

$$\varDelta = (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1) + (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

die doppelte Fläche des Dreiecks ist, dessen Ecken die Projectionen der drei unterstützten Punkte auf die XY-Ebene bilden, und $-Z^{(1)}$, $-Z^{(2)}$, $-Z^{(3)}$ die Drucke sind, welche die festen Punkte erleiden.

Der Druck auf einen z. B. den 1. Punkt ist also positiv, wenn der Coordinatenanfang und hiermit der Schwerpunkt des Körpers mit ihm auf derselben Seite der Verbindungslinie $\overline{2,3}$ liegt, negativ, wenn auf verschiedenen; er verschwindet, wenn derselbe auf $\overline{2,3}$ rückt, also $x_2/y_2 = x_3/y_3$ ist.

Zwei Punkte (2) und (3) erleiden den gleichen Druck, wenn

$$x_1(y_2 + y_3) = y_1(x_2 + x_3),$$

also der Coordinatenanfang auf der Verbindungslinie des Punktes (1) mit der Mitte der Geraden $\overline{2,3}$ liegt.

4. Theorie der bifilaren Aufhängung unter Rücksicht auf die Drillung der Fäden.

Ist ein schwerer Körper an zwei in Bezug auf die Verticale durch seinen Schwerpunkt symmetrischen Punkten an zwei gleich langen Fäden befestigt, deren feste Enden in derselben Horizontalebene liegen, und wird auf ihn ein gegebenes Moment N um die Verticale durch seinen Schwerpunkt ausgeübt, so nimmt er eine Gleichgewichtslage ein, die dadurch bestimmt ist, dass die durch die Schwere, die durch die Fäden und die von aussen auf ihn ausgeübten Kräfte sich zerstören. (Figur 20.)

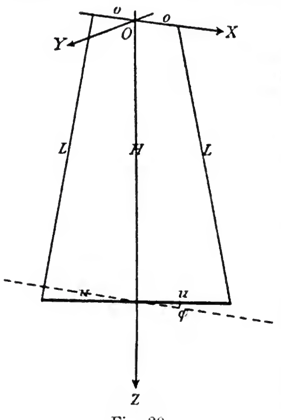


Fig. 20.

Sei L die Länge der Fäden, $2o$ ihr oberer, $2u$ ihr unterer Abstand und φ der Winkel zwischen den verticalen Ebenen durch o und durch u, so sind die Cosinus der Winkel von L mit den Coordinatenaxen, von denen X parallel o, Y horizontal und normal dazu, Z aber vertical nach unten gerechnet werde, gegeben durch:

$$\pm\cos(L,x) = \frac{u\cos\varphi - o}{L}, \qquad \pm\cos(L,y) = \frac{u\sin\varphi}{L},$$

$$\cos(L,z) = \sqrt{1 - \frac{u^2 + o^2 - 2uo\cos\varphi}{L^2}}.$$

o und u mögen als Grössen erster Ordnung neben L betrachtet und ihre Quadrate vernachlässigt werden.

Parallel den Richtungen L wirken die Spannungen S der beiden Fäden, die nach der Symmetrie ihrer Richtungen in Bezug auf den Schwerpunkt des Körpers einander gleich sein müssen. Ihre Componenten nach den Coordinatenaxen sind resp.

$$S\cos(L,x)\,,\qquad S\cos(L,y)\,,\qquad S\cos(L,z)\,,$$

ihre Angriffspunkte haben die Coordinaten

$$\pm u\cos\varphi\,,\qquad \pm u\sin\varphi\,,\qquad +L\cos(L,z)\,.$$

Das Gewicht des Körpers sei G; es ist im Schwerpunkt, also einer Stelle der Z-Axe, angreifend zu denken.

Die Momente, welche die Fäden oder Drähte um ihre Axe ausüben, seien D_1 und D_2; sie können ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit einander gleich, nämlich gleich D, angenommen werden.

Mit diesen Kräften und ihren Momenten sind nun die sechs Gleichgewichtsgleichungen (46) zu erfüllen.

$\sum_h X_h = \sum_h Y_h = 0$ ist identisch erfüllt, $\sum_h Z_h = 0$ ergiebt durch

$$2S\cos(L,z) + G = 0$$

den Werth der Spannungen S, die nun in den Momentengleichungen zu benutzen sind.

Nach der Symmetrie kann ein Moment um die X- resp. Y-Axe nicht auftreten, die Summe der Momente um die Z-Axe muss aber, da man D auf dieselbe projiciren kann, ergeben:

$$2uS\big(\cos\varphi\cos(L,y) - \sin\varphi\cos(L,x)\big) + 2D\cos(L,z) + N = 0,$$

oder nach Einsetzen aller Werthe:

$$-\frac{uoG\sin\varphi}{L\cos(L,z)} + 2D\cos(L,z) + N = 0,$$

worin $\cos(L,z)$ gemäss seiner Bedeutung erst um ein Glied zweiter Ordnung von Eins verschieden ist und jetzt damit vertauscht werden mag.

Wirkt kein äusseres Moment, so wird die Gleichgewichtslage, d. h. der sie bestimmende Winkel φ_0, gegeben sein durch:

$$-\frac{uoG\sin\varphi_0}{L} + 2D_0 = 0. \qquad (50)$$

Bei der Drehung ψ der Drähte, die in Folge der Ablenkung ψ des Körpers aus dieser Lage eintritt, nimmt das Moment D_0 um einen mit ψ proportionalen Betrag $D'\psi$ ab, sodass bei nunmehr wirkendem äussern Moment N die Bedingung lautet:

$$-\frac{u\,o\,G\sin(\psi+\varphi_0)}{L}+2(D_0-D'\psi)+N=0. \tag{50'}$$

Ist $\psi+\varphi_0$ so klein, dass man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann, so erhält man durch Subtraction der letzten beiden Gleichungen:

$$-\left(\frac{u\,o\,G}{L}+2\,D'\right)\psi+N=0. \tag{50''}$$

Hierin ist o, u, L und G mehr oder weniger direct bestimmbar; liesse sich noch D' angeben, so wäre die Möglichkeit vorhanden, aus der Ablenkung des Körpers aus seiner Ruhelage die Grösse des ausgeübten Momentes N zu berechnen. Dazu bietet der Apparat selbst ein Mittel, wenn man ihn so einrichtet, dass man das untere Ende der Drähte um einen angebbaren Winkel, z. B. um π, gegen das obere drehen kann, am einfachsten dadurch, dass man das Ende an einer Oese befestigt, welche in einen am Körper befindlichen Haken passt.

Bringt man eine solche Drehung um $+\pi$ hervor, so wird der Apparat ohne die Wirkung eines äussern Momentes eine um ψ' geänderte Ruhelage annehmen ($\psi'<0$), gegeben durch

$$-\frac{u\,o\,G\,(\varphi_0+\psi')}{L}+2\left(D_0-D'(\pi+\psi')\right)=0,$$

welche Gleichung mit (50) combinirt auf

$$-\frac{u\,o\,G\,\psi'}{L}-2\,D'(\pi+\psi')=0$$

führt, in welcher ψ' neben π zu vernachlässigen ist und also folgt:

$$2\,D'=-\frac{u\,o\,G\,\psi'}{\pi L}. \tag{51}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in (50″) erhält man:

$$N=\frac{o\,u\,G}{L}\left(1-\frac{\psi'}{\pi}\right)\psi,$$

oder, indem man schliesslich den ganzen Abstand der Fäden oben und unten, $O=2o$ und $U=2u$, einführt:

$$N=\frac{O\,U\,G}{4\,L}\left(1-\frac{\psi'}{\pi}\right)\psi. \tag{51'}$$

Da man das Verhältniss O/L sehr klein (z. B. $< 1/1000$) machen und bei Ablesung mit Fernrohr, Spiegel und Scala den Winkel ψ bis auf Secunden bestimmen kann, so eignet sich die bifilare Aufhängung zur Messung sehr kleiner z. B. magnetischer oder electrischer Drehungsmomente; bei den angegebenen Verhältnissen würde noch der 0,000 000 005. Theil des Momentes UG erkennbar sein.

Ist die Dicke der beiden Fäden nicht sehr gering gegen ihren Abstand, so ist es zweifelhaft, ob man die Entfernungen ihrer Axen als die Grössen O und U einführen darf; in diesem Falle ist es möglich, durch Schwingungsbeobachtungen das Glied $OUg/4L$ zu bestimmen, — eine Methode, auf die wir später zurückkommen.

5. Gleichgewicht einer schweren Kugel auf drei ihrerseits auf einer horizontalen Ebene liegenden unter der Wirkung gleitender Reibung.

Seien $R, R_h, G, G_h, x, y, z, x_h, y_h, z_h$ für $h = 1, 2, 3$ Radien, Gewichte und Mittelpunktscoordinaten der obern und der drei untern Kugeln, α_h der Winkel der Verbindungslinie des Mittelpunkts der obern Kugel mit dem einer untern gegen die Verticale. Seien ferner N_h die in der Berührungsstelle der obern Kugel mit einer der untern, N_h' die in der Berührungsstelle einer untern mit der Ebene wirkenden normalen Druckkräfte, ν_h und ν_h' die resp. Reibungscoëfficienten; die factisch vorhandenen Reibungskräfte $N_h n_h$ und $N_h' n_h'$ werden, selbst wenn alle Kugeln und die Ebene gleiche Oberflächenbeschaffenheit besitzen, doch wegen der verschiedenen Inanspruchnahme verschiedene Werthe haben können.

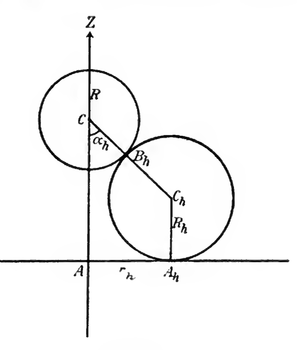


Fig. 21.

Die Reibungskräfte müssen, wie die Drucke, sämmtlich in den vertialen Ebenen durch den Mittelpunkt C der obern und den C_h einer untern Kugel liegen, sodass es genügt, diese drei Schnittebenen zu betrachten. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde die in der Berührungsstelle B_h (Fig. 21) wirkende Reibung eine Componente normal zur Ebene der Figur geben, die ein durch keine andere vorhandene Kraft zerstörbares Moment um die Gerade $\overline{A_h C_h}$ als Axe erregen würde; das Gleiche gilt für die Reibung an der Stelle A_h

bezüglich der Richtung $\overline{C_h B_h}$. Eine Abweichung hiervon wäre nur dann zulässig, wenn man in jenen Punkten eine besondere Widerstandskraft gegen die Drehung annähme.

Sonach wirken alle in den Stellen A_h und B_h angreifenden Kräfte in Richtungen, welche durch die Z-Axe $\overline{AC}$ hindurchgehen; sie können also für keine Kugel eine Drehung um die Z-Axe hervorbringen und auch für keine der untern Kugeln eine Verschiebung normal zu einer der Ebenen ACC_h erregen; es sind daher für die obere Kugel nur die Momente um die X- und Y-Axe, für jede untere nur die Momente um eine zur Ebene ACC_h normale Axe gleich Null zu setzen; ebenso für jede untere Kugel die Componentensummen nur für zwei in der Ebene ACC_h liegende Richtungen.

Demgemäss resultirt für die obere Kugel durch das Nullsetzen der Componentensummen folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{gathered}\sum_h a_h N_h (\sin\alpha_h - n_h \cos\alpha_h) = 0, \qquad \sum_h b_h N_h (\sin\alpha_h - n_h \cos\alpha_h) = 0,\\ \sum_h N_h (\cos\alpha_h + n_h \sin\alpha_h) = G,\end{gathered} \tag{52}$$

worin a_h und b_h die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtungen $\overline{AA_h}$, die wir von der Z-Axe hinweggerechnet kurz mit r_h bezeichnen, resp. mit der X- und der Y-Axe einschliessen.

Bezieht man die Drehungsmomente auf Parallele zur X- und Y-Axe durch den Mittelpunkt der obern Kugel, so geben zu ihnen nur die Reibungskräfte Antheile, die an jeder Stelle B_h in der Richtung der Tangente von der Z-Axe hinweg wirken mit der Intensität $N_h n_h$. Jede von ihnen giebt um eine durch C normal zur Ebene ACC_h gelegte Axe das Moment $RN_h n_h$.

Benutzt man den Satz p. 148 über die Zusammensetzung von Momenten um Axen, die durch einen Punkt gehen, so erhält man sogleich die beiden Bedingungen für das Verschwinden der Momente um die Parallelen zur X- und Y-Axe durch das Centrum der obern Kugel, nämlich:

$$\sum_h N_h n_h b_h = 0, \qquad \sum_h N_h n_h a_h = 0. \tag{52'}$$

Für die untern Kugeln giebt das Verschwinden der Componenten, die vertical und horizontal in den ACC_h-Ebenen liegen, sechs Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} N_h' &= N_h (\cos\alpha_h + n_h \sin\alpha_h) + G_h',\\ n_h' N_h' &= N_h (\sin\alpha_h - n_h \cos\alpha_h),\end{aligned} \tag{52''}$$

das Verschwinden des Momentes um die Axe normal zu dieser Ebene in C_h drei Gleichungen:

$$n_h N_h = n_h' N_h'. \tag{52'''}$$

Combinirt man diese mit den vorhergehenden, so kommt:

$$n_h = \sin \alpha_h - n_h \cos \alpha_h, \tag{53}$$

und diese Beziehung erweist, dass die zwei ersten Gleichungen (52) mit (52') identisch sind. Es verbleiben sonach 12 Gleichungen zur Bestimmung der sechs Drucke N_h und N_h' und der sechs Coëfficienten n_h und n_h'; nur die letzteren bieten grösseres Interesse.

Die drei n_h folgen sogleich aus der letzten Gleichung, gemäss

$$n_h = \frac{\sin \alpha_h}{1 + \cos \alpha_h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_h}{2}. \tag{53'}$$

Zur Bestimmung der n_h' beachte man, dass

$$\cos \alpha_h + n_h \sin \alpha_h = 1$$

ist, also die erste Gleichung (52'') lautet:

$$N_h' = N_h + G_h', \tag{53''}$$

was einen merkwürdigen Satz enthält. Combinirt man dies mit der Gleichung (52''')

$$n_h' N_h' = n_h N_h,$$

so erhält man:

$$n_h' = \frac{n_h N_h}{N_h + G_h'}. \tag{53'''}$$

Für die N_h gelten aber nach (52) die Gleichungen:

$$\sum_h N_h = G, \qquad \sum_h N_h n_h a_h = 0, \qquad \sum_h N_h n_h b_h = 0,$$

so dass sich ergiebt:

$$\begin{gathered} N_1 = \frac{G\, n_2 n_3}{\Delta}(a_2 b_3 - a_3 b_2), \qquad N_2 = \frac{G\, n_3 n_1}{\Delta}(a_3 b_1 - a_1 b_3), \\ N_3 = \frac{G\, n_1 n_2}{\Delta}(a_1 b_2 - a_2 b_1), \end{gathered} \tag{54}$$

worin:

$$\Delta = n_2 n_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + n_3 n_1 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + n_1 n_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Beachtet man, dass $a_h b_k - a_k b_h = \sin(r_h, r_k)$, kurz $= \varrho_{hk}$ gesetzt, der Sinus des Winkels zwischen r_h und r_k ist, diesen von r_h nach r_k hin positiv gerechnet, so erhält man:

$$N_1 = \frac{G\, n_2 n_3 \varrho_{23}}{n_2 n_3 \varrho_{23} + n_3 n_1 \varrho_{31} + n_1 n_2 \varrho_{12}} \quad \text{u. s. f.} \tag{54'}$$

Daher wird schliesslich:

$$n_1' = n_1 \cdot \frac{G\, n_2 n_3\, \varrho_{23}}{(G + G_1')\, n_2 n_3\, \varrho_{23} + G_1' n_3 n_1\, \varrho_{31} + G_1' n_1 n_2\, \varrho_{12}}, \tag{54''}$$

woraus die andern durch cyclische Vertauschung der Indices folgen.

Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, dass die drei untern Kugeln gleich sind und mit ihren Centren in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen, so werden alle G_h', α_h, n_h, n_h' und alle ϱ_{hk} gleich, und daher:

$$n = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad n' = n\,\frac{G}{G + 3G'}.$$

Die Reibung der untern Kugeln auf der Ebene ist also viel weniger in Anspruch genommen, als die zwischen den Kugeln wirkende; es kann demnach für erstere auch der Grenzwerth viel niedriger liegen, als für letztere, ohne das Gleichgewicht zu gefährden.

Aehnliches gilt ganz allgemein. Da nach dem dritten Problem dieses Abschnittes Gleichgewicht unmöglich ist, wenn der Schwerpunkt der obern Kugel aus dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ herausfällt, also wenn einer der Winkel (r_h, r_k) grösser als π wird, so sind sämmtliche $\varrho_{hk} > 0$ und demgemäss $n_h' < n_h$; ausgenommen ist der Grenzfall, dass die untern Kugeln gewichtslos sind, dann wird $n_h' = n_h$.

Bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit der Ebene und aller vier Kugeln ist daher ein Gleiten zuerst an einer der Berührungsstellen zweier Kugeln B_h zu erwarten und zwar an der, für welche $n_h = \operatorname{tg} \alpha_h/2$ den grössten Werth hat. Da der Grenzwerth des Reibungscoëfficienten gleich der Tangente des Reibungswinkels ist, so beginnt das Gleiten, sobald ein α_h den doppelten Werth des Reibungswinkels erreicht hat. —

Die Ausgangsgleichungen (45) dieses Paragraphen, welche die Beziehungen ausdrücken, die zwischen den auf das starre System wirkenden Kräften und seinen sechs Beschleunigungen stattfinden, falls die Geschwindigkeiten verschwinden, geben nicht nur in der von uns benutzten Weise Aufschluss über die Bedingungen, welche die Kräfte erfüllen müssen, damit das Gleichgewicht erhalten bleibe, sondern auch über die Art und Weise, in welcher der Körper die Bewegung aus der Ruhe beginnt, wenn jene Bedingungen nicht erfüllt sind.

Um aus ihnen Folgerungen abzuleiten, legen wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit enthält, die festen Coordinatenaxen in die Richtungen, welche während der Ruhe die Hauptträgheitsaxen durch den Coordinatenanfang besassen, setzen also $\mathsf{\Xi}' = \mathsf{H}' = \mathsf{Z}' = 0$ und $\mathsf{\Xi} = \mathsf{A}$, $\mathsf{H} = \mathsf{B}$, $\mathsf{Z} = \mathsf{\Gamma}$, um die Hauptträgheitsmomente zu bezeichnen.

Wir erhalten dann folgendes System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&m\left(\frac{dx_0'}{dt}+\zeta\frac{d\mu'}{dt}-\eta\frac{d\nu'}{dt}\right)=X,\\
&m\left(\frac{dy_0'}{dt}+\xi\frac{d\nu'}{dt}-\zeta\frac{d\lambda'}{dt}\right)=Y,\\
&m\left(\frac{dz_0'}{dt}+\eta\frac{d\lambda'}{dt}-\xi\frac{d\mu'}{dt}\right)=Z,\\
&m\left(\eta\frac{dz_0'}{dt}-\zeta\frac{dy_0'}{dt}\right)+\mathsf{A}\frac{d\lambda'}{dt}=L,\\
&m\left(\zeta\frac{dx_0'}{dt}-\xi\frac{dz_0'}{dt}\right)+\mathsf{B}\frac{d\mu'}{dt}=M,\\
&m\left(\xi\frac{dy_0'}{dt}-\eta\frac{dx_0'}{dt}\right)+\Gamma\frac{d\nu'}{dt}=N.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Ein sehr einfacher Fall ist der, dass der starre Körper um den festen, übrigens willkürlichen Coordinatenanfang drehbar ist, wodurch $dx_0'/dt = dy_0'/dt = dz_0'/dt = 0$ werden, während zugleich aus X, Y, Z die Reactionscomponenten des Drehpunktes auszusondern sind. Hier bleiben nur die drei Bewegungsgleichungen:

$$\mathsf{A}\frac{d\lambda'}{dt}=L,\qquad \mathsf{B}\frac{d\mu'}{dt}=M,\qquad \Gamma\frac{d\nu'}{dt}=N,\tag{56}$$

aus denen durch Integration über die unendlich kleine Zeit τ folgt:

$$\mathsf{A}\lambda'=\int_0^\tau L\,dt,\qquad \mathsf{B}\mu'=\int_0^\tau M\,dt,\qquad \Gamma\nu'=\int_0^\tau N\,dt.$$

Die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Werthe sind die Momente der unendlich kurz andauernden Einwirkungen, die man als Impulse auffassen kann; denn wie wir auf p. 20 die Kraft K, welche aus den in den Intervallen dt ausgeübten Impulsen dJ entsteht, durch $K = dJ/dt$ definirten, so können wir umgekehrt $K\,dt = dJ$ als einen Impuls ansehen. Für stetiges K und unendlich kleines τ ist aber identisch:

$$\int_0^\tau K\,dt = K\tau.$$

Wir können daher, wenn wir die Impulsmomente mit (L), (M), (N) bezeichnen, das obige Resultat schreiben:

$$\mathsf{A}\lambda'=(L),\qquad \mathsf{B}\mu'=(M),\qquad \Gamma\nu'=(N).\tag{56'}$$

Wenden wir dasselbe Verfahren auf die Gleichungen (45) an unter der Voraussetzung, dass eine beliebige Coordinatenaxe feste Drehungsaxe ist, und bezeichnen wir in Bezug auf sie Trägheits-, Drehungsmoment und Winkelgeschwindigkeit mit M, D und φ', so erhalten wir

$$\mathsf{M}\varphi'=(D).$$

Wird auf einen starren Körper, welcher um einen festen Punkt drehbar ist, ein Impuls ausgeübt, so ergiebt derselbe Rotationsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt, welche ebenso, als wären jene Axen feste Drehungsaxen, gegeben sind durch die Quotienten aus den betreffenden Drehungs- und Trägheitsmomenten.

Die drei Rotationscomponenten λ', μ', ν' um die Hauptträgheitsaxen setzen sich zusammen zu einer resultirenden Drehung τ' um eine Axe α, deren Richtung gegeben ist durch:

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \cos(\alpha, x) : \cos(\alpha, y) : \cos(\alpha, z),$$

die drei Drehungsmomente (L), (M), (N) zu einer Resultante (D) um eine Axe d, die gegeben ist durch:

$$(L) : (M) : (N) = \cos(d, x) : \cos(d, y) : \cos(d, z).$$

Es gilt also nach (56′) die Beziehung:

$$\mathsf{A} \cos(\alpha, x) : \mathsf{B} \cos(\alpha, y) : \Gamma \cos(\alpha, z) = \cos(d, x) : \cos(d, y) : \cos(d, z). \quad (56'')$$

Beachtet man, dass zwischen den Richtungswinkeln eines Radiusvectors ϱ in dem Hauptträgheitsellipsoid, dessen Gleichung

$$\mathsf{A} x^2 + \mathsf{B} y^2 + \Gamma z^2 = 1$$

ist, und denjenigen der Normalen n auf der Tangentenebene im Endpunkt von ϱ die Gleichungen bestehen:

$$\mathsf{A} \cos(\varrho, x) : \mathsf{B} \cos(\varrho, y) : \Gamma \cos(\varrho, z) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z),$$

so erkennt man die Gültigkeit des Satzes:

Ein System von Impulsen ertheilt einem um einen festen Punkt drehbaren Körper eine Rotation um eine Axe α, deren Lage gegen die Hauptdrehungsaxe d der Impulse dadurch geometrisch bestimmt ist, dass eine Tangentenebene normal zu d an das Hauptträgheitsellipsoid in Bezug auf den festen Punkt gelegt, jenes in einer Stelle berührt, deren Radiusvector die Rotationsaxe α ist.

Fasst man die Gleichungen (56′) mit den Factoren λ'/τ', μ'/τ', ν'/τ' zusammen und bedenkt, dass

$$\tau'^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2, \qquad (D)^2 = (L)^2 + (M)^2 + (N)^2$$

ist, so findet sich:

$$\mathsf{M} \tau' = (D) \cos(d, \alpha), \quad (56''')$$

worin $\mathsf{M} = (\mathsf{A}\lambda'^2 + \mathsf{B}\mu'^2 + \Gamma\nu'^2)/\tau^2$ nach (37″) das Trägheitsmoment des Körpers um die Rotationsaxe α bezeichnet. Es gilt also der Satz:

Die resultirende Rotationsgeschwindigkeit erhält man, wenn man das Drehungsmoment der Impulse um die Rotationsaxe α durch das auf diese bezügliche Trägheitsmoment dividirt.

Ist das starre System vollkommen frei beweglich, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Coordinatenanfang in den Schwerpunkt legen und erhält so, indem man $x_0' = \xi'$, $y_0' = \eta'$, $z_0' = \zeta'$ und $\xi = \eta = \zeta = 0$ setzt, die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} m\frac{d\xi'}{dt} &= X, \quad & m\frac{d\eta'}{dt} &= Y, \quad & m\frac{d\zeta'}{dt} &= Z, \\ \mathsf{A}\frac{d\lambda'}{dt} &= L, \quad & \mathsf{B}\frac{d\mu'}{dt} &= M, \quad & \Gamma\frac{d\nu'}{dt} &= N; \end{aligned} \tag{57}$$

dieselben geben durch Integration über die unendlich kurze Zeit τ unter Benutzung der obigen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} m\xi' &= (X), \quad & m\eta' &= (Y), \quad & m\zeta' &= (Z), \\ \mathsf{A}\lambda' &= (L), \quad & \mathsf{B}\mu' &= (M), \quad & \Gamma\nu' &= (N). \end{aligned} \tag{57'}$$

Wirkt ein System Impulse auf einen frei beweglichen starren Körper, so ertheilt dasselbe dem Schwerpunkt die gleiche Geschwindigkeit, als griffe seine Resultirende in ihm an und wäre in ihm die ganze Masse vereinigt; die Rotationsgeschwindigkeit um den Schwerpunkt ist dieselbe, als wäre der Körper in ihm unterstützt.

Lassen sich hiernach die Geschwindigkeiten, welche ein System von Impulsen einem starren ruhenden Körper ertheilt, leicht bestimmen, so ist dadurch aber keineswegs das Gesetz der Bewegung des weiterhin sich selbst überlassenen Körpers ausgesprochen, denn derselbe behält, auch wenn er keinen Kräften unterliegt, seine Geschwindigkeiten nicht unverändert bei. Die von uns gefundenen Werthe sind nichts anderes als die Anfangsgeschwindigkeiten, welche in Folge eines Systems ausgeübter Impulse eintreten; der weitere Verlauf der Bewegung wird weiter unten der Betrachtung unterworfen werden.

§ 21. Drehung eines starren Körpers um eine feste Axe. Druck auf die Axe. Beispiele.

Die einfachste Art der Bewegung eines starren Körpers, welche nicht auf die Gleichungen für einen materiellen Punkt zurückführt, ist die Drehung um eine im Körper wie im Raume feste Axe.

Sei die im Körper feste Drehungsaxe die C-Axe und falle dieselbe in die im Raume feste Z-Axe, dann ist $\lambda' = \mu' = 0$. Wir lassen den Anfangspunkt des mit dem Körper beweglichen Systems in denjenigen des absolut festen fallen und haben demgemäss x_0, y_0, z_0 dauernd gleich Null, also auch x_0', y_0', z_0' gleich Null. Endlich legen wir die A-Axe durch den Schwerpunkt des Körpers, welcher den Abstand s von der Drehungsaxe haben mag, und erhalten dadurch $\zeta = 0$.

Demgemäss wird das System (34) vereinfacht zu:

$$\begin{aligned}
-m\frac{d\eta\nu'}{dt} &= X' + X'' + \sum X_h,\\
+m\frac{d\xi\nu'}{dt} &= Y' + Y'' + \sum Y_h,\\
0 &= Z' + Z'' + \sum Z_h,\\
-\frac{d}{dt}(\nu'\sum m_h z_h x_h) &= L' + L'' + \sum L_h,\\
-\frac{d}{dt}(\nu'\sum m_h z_h y_h) &= M' + M'' + \sum M_h,\\
\frac{d}{dt}\left(\nu'\sum m_h(x_h^2 + y_h^2)\right) &= \sum N_h.
\end{aligned} \tag{58}$$

Hierin bezeichnen wie im vorigen Abschnitt p. 174 die X', X'' ... die aus den wirkenden Kräften ausgesonderten Reactionen der festen Axe, die in zwei Punkten p und q angreifend gedacht sind; L', L'', M', M'' sind die von ihnen um die X- und Y-Axe ausgeübten Momente, also

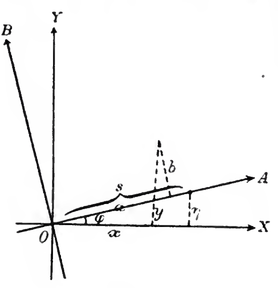


Fig. 22.

$$\begin{aligned}
L' &= -z_p Y',\\
L'' &= -z_q Y'',\\
M' &= +z_p X',\\
M'' &= +z_q X''.
\end{aligned}$$

Schliesse die A-Axe mit der X-Axe den Winkel φ, mit der Y-Axe den Winkel $(\pi/2) - \varphi$ ein, so wird

$$x_h = a_h \cos\varphi - b_h \sin\varphi, \qquad y_h = a_h \sin\varphi + b_h \cos\varphi, \qquad z_h = c_h,$$

$$\eta = s \sin\varphi, \qquad \xi = s \cos\varphi, \qquad \nu' = \frac{d\varphi}{dt},$$

und unsere Gleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
-ms\frac{d}{dt}\left(\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) &= X' + X'' + \sum X_h, \\
+ms\frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) &= Y' + Y'' + \sum Y_h, \\
0 &= Z' + Z'' + \sum Z_h,
\end{aligned} \tag{58'}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sum m_h a_h c_h + \frac{d}{dt}\left(\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sum m_h b_h c_h &= L' + L'' + \sum L_h, \\
-\frac{d}{dt}\left(\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sum m_h a_h c_h - \frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sum m_h b_h c_h &= M' + M'' + \sum M_h, \\
\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sum m_h(a_h^2 + b_h^2) &= \sum N_h.
\end{aligned}
$$

Nur die letzte dieser Formeln ist von den Reactionskräften frei, sie stellt also die für die Bewegung massgebende Beziehung dar. In ihr bezeichnet $\sum m_h(a_h^2 + b_h^2) = \mathsf{M}$ das Trägheitsmoment um die feste Axe, $\sum N_h = N$ die Summe der um dieselbe ausgeübten, nur von äussern Kräften herrührenden Drehungsmomente. Es gilt also der Satz:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N/\mathsf{M}. \tag{58''}$$

Die Winkelbeschleunigung eines starren Systemes um eine feste Axe ist gleich dem Quotienten aus dem auf jene Axe bezüglichen Drehungs- und Trägheitsmoment.

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit der für die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes geltenden, welche die Linearbeschleunigung gleich dem Quotienten aus Kraft und Masse ergab. Es gelten also für die Integration die p. 35 aufgestellten Regeln.

Verschwindet N, so ist die Rotation eine gleichförmige.

Die übrigen Gleichungen (58′) bestimmen die Reactionen der festen Axe, oder umgekehrt die Drucke und Drehungsmomente, die auf dieselbe ausgeübt werden; die Componenenten letzterer sind

$$X^0 = -(X' + X''), \quad Y^0 = -(Y' + Y''), \quad Z^0 = -(Z' + Z''),$$
$$L^0 = -(L' + L''), \quad M^0 = -(M' + M'').$$

Wir wollen zunächst die äussern Kräfte und Momente wegfallen, also die Rotation um die Z-Axe zu einer gleichförmigen werden lassen und erkennen dann Folgendes. Die Reactionscomponenten parallel der X- und Y-Axe verschwinden allgemein nicht mit den äussern Kräften, sondern — abgesehen von der Ruhe des Körpers, für welche $d\varphi/dt = 0$ ist — nur in dem Falle, dass die Drehungsaxe den Schwerpunkt enthält, also $s = 0$ ist; die Reactionsmomente um die X- und Y-Axe verschwinden dagegen nur in dem Falle, dass die dem Körper und

der Drehungsaxe individuellen Constanten $\sum m_h a_h c_h = -\mathsf{B}'$ und $\sum m_h b_h c_h = -\mathsf{A}'$, d. h. die Deviationsmomente um die A- und B-Axe, gleich Null sind, was nach p. 164 die Bedingung dafür ist, dass die Z-, resp. die C-Axe, eine Hauptträgheitsaxe des Körpers ist.

Findet beides zugleich statt, so behält der Körper die ihm ertheilte gleichförmige Rotation um eine im Körper und im Raume ruhende Axe selbst dann noch bei, wenn jene nicht mehr festgehalten oder unterstützt wird. Die Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt werden daher auch die natürlichen Drehungsaxen des freien Körpers genannt.

Verschwinden nur die Reactionsmomente, aber nicht die Componenten, so ist, um die Drehungsaxe unverändert zu erhalten, nur nöthig, dass einer ihrer Punkte unterstützt werde. Die Rotation um eine der durch den festen Punkt gehenden Hauptträgheitsaxen bleibt also unverändert bestehen; daher heissen diese Richtungen auch die permanenten Drehungsaxen für jenen festen Punkt.

Diese beiden Sätze behalten offenbar ihre Gültigkeit auch dann, wenn die äussern Kräfte zwar nicht verschwinden, aber nichts weiter liefern, als ein Drehungsmoment um die betreffende Hauptträgheitsaxe. —

Besonders einfache Werthe nehmen die auf die Axe wirkenden Drucke und Momente an, wenn man sie auf die im Körper festen Axen A, B, C bezieht; die ihnen parallelen Componenten mögen wieder mit A, B, C, die um sie wirkenden Momente mit F, G, H bezeichnet werden.

Dann gilt:

$$A_h = X_h \cos\varphi + Y_h \sin\varphi, \quad B_h = -X_h \sin\varphi + Y_h \cos\varphi, \quad C_h = Z_h,$$
$$F_h = L_h \cos\varphi + M_h \sin\varphi, \quad G_h = -L_h \sin\varphi + M_h \cos\varphi, \quad H_h = N_h,$$

und es folgt demgemäss:

$$\begin{aligned}
-ms\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= A' + A'' + \sum A_h, \\
+ms\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= B' + B'' + \sum B_h, \\
0 &= C' + C'' + \sum C_h, \\
+\mathsf{B}'\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \mathsf{A}'\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= F' + F'' + \sum F_h, \\
+\mathsf{B}'\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \mathsf{A}'\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= G' + G'' + \sum G_h, \\
\mathsf{M}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \sum H_h.
\end{aligned} \tag{59}$$

Verschwindet das äussere Moment $\sum H_h = \sum N_h$, so ist nur $d^2\varphi/dt^2$ gleich Null zu setzen.

Beachtet man, dass

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum m_h r_h \cos(r_h, A) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum m_h a_h = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 m s,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum m_h r_h \cos(r_h, B) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum m_h b_h = 0$$

die Componenten der gesammten Centrifugalkräfte sind, welche der Körper erfährt, so sieht man, dass die erste Formel aussagt:

Die Componente des Druckes $A^0 = -(A' + A'')$, welche die Axe in der Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers erleidet, ist gleich der Summe der bezüglichen äussern Kräfte plus der Resultirenden aller Centrifugalkräfte.

Dieser Satz geht vollkommen parallel mit dem zweiten der p. 59 gegebenen.

Die zweite Formel combiniren wir mit der letzten, um $d^2\varphi/dt^2$ zu eliminiren, und erhalten so:

$$-(B' + B'') = \sum B_h - m s \frac{\sum N_h}{\mathsf{M}}. \tag{59'}$$

Die Componente des Druckes $B^0 = -(B' + B'')$, welche die Axe in der Richtung normal zu der Ebene durch den Schwerpunkt des Körpers erfährt, ist gleich der Summe der bezüglichen äussern Kräfte minus dem Product aus dem Moment der Masse ms in das äussere Drehungsmoment $\sum N_h$ dividirt durch das Trägheitsmoment um die feste Axe.

Diese Componente verschwindet, wenn sich der Körper auf einen Massenpunkt reducirt, der mittelst einer starren Linie an die Drehungsaxe befestigt ist; denn dann wird $\sum N_h = s \sum B_h$ und $\mathsf{M} = m s^2$.

Wirkt auf den Körper parallel der X-Axe die Schwere, so ist, wenn man $\mathsf{M} = m(\varkappa^2 + s^2)$ setzt:

$$B^0 = -(B' + B'') = -mg\left(1 - \frac{s^2}{\varkappa^2 + s^2}\right)\sin\varphi = -\frac{mg\,\varkappa^2}{\varkappa^2 + s^2}\sin\varphi.$$

Ist der Körper ein Pendel, welches gerade die grösste Elongation erreicht hat, also die Geschwindigkeit Null besitzt, so ist gleichzeitig:

$$A^0 = -(A' + A'') = mg\cos\varphi,$$

und beiden Componenten entspricht eine Resultirende, die einen Winkel ψ mit der A-Axe einschliesst, gegeben durch:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + s^2}\operatorname{tg}\varphi;$$

die Resultirende hat also stets eine Richtung, welche zwischen die X- und die A-Axe fällt. —

Wir wenden uns nun zu speciellen Anwendungen der Gleichung (58″), welche die Bewegung eines starren um eine feste Axe drehbaren Körpers bestimmte; sie lautete:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{N}{\mathsf{M}}.$$

Besonders häufig und wichtig sind die Fälle, dass das Drehungsmoment N zusammengesetzt ist aus Gliedern, die lineär in der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ und dem Drehungswinkel φ sind, sodass die allgemeine Form entsteht:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a + b\varphi + 2c\frac{d\varphi}{dt}. \tag{60}$$

Setzt man $\varphi + (a/b) = Ce^{qt}$, so wird diese Gleichung zu

$$q^2 = b + 2cq,$$

woraus folgt:

$$q = c \pm \sqrt{b + c^2}.$$

Dies zeigt, dass, den zwei Wurzeln q_1 und q_2 entsprechend, zwei particuläre Lösungen $\varphi_1 + (a/b) = C_1e^{q_1t}$ und $\varphi_2 + (a/b) = C_2e^{q_2t}$ der Gleichung genügen, und man sieht leicht, dass von dem Ausdruck:

$$\varphi + \frac{a}{b} = C_1e^{q_1t} + C_2e^{q_2t}$$

dasselbe gilt; letzterer enthält die zwei Integrationsconstanten, welche die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zeigen muss.

Man erkennt sogleich, dass zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten, je nachdem $(b + c^2) \gtrless 0$ ist. Im ersten Falle sind die Wurzeln q_1 und q_2 reell, im zweiten conjugirt complex; im ersten Falle müssen also die Constanten C_1, C_2 reell, im letzteren conjugirt complex sein, und wir erhalten demnach die folgenden beiden Möglichkeiten:

I.

$$b + c^2 > 0,$$

$$\varphi = C_1e^{q_1t} + C_2e^{q_2t} - \frac{a}{b}, \tag{60'}$$

$$q_1 = c + \sqrt{b + c^2}, \qquad q_2 = c - \sqrt{b + c^2};$$

II.

$$b + c^2 < 0,$$

$$\varphi = e^{ct}(A\cos pt + B\sin pt) - \frac{a}{b} \tag{60''}$$

$$\sqrt{b + c^2} = ip;$$

hierin sind A und B neue willkürliche reelle Constanten.

Wir betrachten zunächst die Formeln unter I, welche zeigen, dass bei den im ersten Fall gemachten Voraussetzungen φ jeden Werth höchstens zwei Mal annimmt, während t von $-\infty$ bis $+\infty$ geht.

Bedenkt man, dass eine Umkehr des Vorzeichens von q_1, q_2 oder C_1, C_2 durch eine solche für t oder φ aufgehoben wird, so sieht man, dass für den ganzen Verlauf der Function φ hier im Ganzen vier wesentlich verschiedene Specialfälle möglich sind, die sich folgendermassen darstellen:

a) q_1, q_2 und C_1, C_2 haben untereinander gleiches — etwa positives Vorzeichen; dann beginnt für $t = -\infty$ der Drehungswinkel φ von $-a/b$ und wächst, ohne ein Maximum oder Minimum zu erreichen, mit der Zeit bis $+\infty$.

b) q_1, q_2 haben verschiedenes, C_1, C_2 gleiches Vorzeichen, q_1, C_1, C_2 möge positiv sein; dann beginnt φ mit $t = -\infty$ von $+\infty$, nimmt bis zu einem Minimum ab und wächst mit t wieder bis $+\infty$. Die Curve für φ besitzt keinen Wendepunkt.

c) q_1, q_2 haben gleiches, C_1, C_2 verschiedenes Vorzeichen, q_1, q_2, C_1 möge positiv sein; dann beginnt φ für $t = -\infty$ mit dem Werthe $-a/b$, erreicht ein Maximum oder Minimum und nimmt darnach im ersten Falle bis $-\infty$ ab, im zweiten bis $+\infty$ zu. Die Curve besitzt einen Wendepunkt.

d) q_1, q_2 und C_1, C_2 haben untereinander verschiedenes Zeichen, q_1 und C_1 seien positiv; dann beginnt φ für $t = -\infty$ mit $\pm\infty$ und nimmt, ohne ein Maximum oder Minimum zu passiren, bis $\mp\infty$ ab, resp. zu. Die Curve besitzt einen Wendepunkt.

Die Formeln unter II zeigen, dass φ den Werth $-a/b$ unendlich oft annimmt und zwar in Zeiten, die um die Constante $T = \pi/p$ von einander abweichen; die Bewegung ist also in dieser Hinsicht periodisch. Aber sie ist keine schlichte periodische, denn die grössten Abweichungen von dem Werthe $\varphi = -a/b$ nach der positiven und negativen Seite sind nicht constant, sondern nehmen je nach dem Vorzeichen von c entweder von Unendlich ab bis Null oder von Null zu bis Unendlich.

Wir betrachten nunmehr einige physikalisch wichtige Probleme, die auf Gleichungen der Form (60) führen.

1. Theorie der Atwood'schen Fallmaschine unter Rücksicht auf das Trägheitsmoment der Rolle, das Gewicht des Fadens und die Axenreibung.

Sei die Masse der beiden am Faden hängenden Gewichte je gleich M, diejenige des Uebergewichtes m, die der Längeneinheit des

Fadens gleich μ; sei ferner die Höhendifferenz der beiden Fadenenden am Anfang der Bewegung gleich $-L$, der Radius der Rolle gleich R, so ist, nachdem die Rolle sich um den Winkel φ gedreht, das fallende Gewicht also den Weg $R\varphi$ zurückgelegt hat, das Drehungsmoment der Schwerkraft:

$$R\big(m - \mu(L - 2R\varphi)\big)g;$$

davon subtrahirt sich das Moment der Axenreibung ϱ, das als eine Constante anzusehen ist.

Das Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus dem der Rolle M und demjenigen der am Faden hängenden Massen, die sich ebenso verhalten als wären sie im Abstand R angebracht. Wir erhalten hiernach:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{R\big(m - \mu(L - 2R\varphi)\big)g - \varrho}{\mathsf{M} + R^2(2M + m)}, \tag{61}$$

oder kurz

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a + b\varphi,$$

falls

$$a = \frac{R(m - \mu L)g - \varrho}{\mathsf{M} + R^2(2M + m)}, \qquad b = \frac{2R^2\mu g}{\mathsf{M} + R^2(2M + m)} \tag{61'}$$

gesetzt ist.

Vergleicht man dies mit den allgemeinen Formeln (60) und (60'), so erkennt man, dass wegen $c = 0$, $b > 0$ der Fall I vorliegt und wir erhalten:

$$q_1 = +\sqrt{b}, \qquad q_2 = -\sqrt{b}, \qquad \text{also}$$

$$\varphi = C_1 e^{t\sqrt{b}} + C_2 e^{-t\sqrt{b}} - \frac{a}{b}. \tag{61''}$$

Sei zur Zeit $t = 0$ sowohl φ als $d\varphi/dt$ gleich Null, so resultirt:

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{a}{b}, \qquad 0 = C_1 - C_2,$$

also $C_1 = C_2 = (a/2b)$ und daher

$$\varphi = \frac{a}{b}\left(\frac{e^{t\sqrt{b}} + e^{-t\sqrt{b}}}{2} - 1\right). \tag{61'''}$$

Dies ist der strenge Werth, der mit R multiplicirt den zur Zeit t zurückgelegten Weg $R\varphi = s$ angiebt. Man sieht zunächst keinerlei Verwandtschaft des Resultates mit den Galilei'schen Fallgesetzen, zu deren Demonstration der Atwood'sche Apparat gewöhnlich dient. Indess ist $t\sqrt{b}$, in der Hauptsache gegeben durch den Ausdruck $t\sqrt{\mu g}/\sqrt{M}$, für kleine t, wie sie bei der Anwendung ausschliesslich in Betracht kommen, eine gegen Eins kleine Grösse; μg ist die Masse der Länge 981 cm des Fadens durch (1 sec.)^2 dividirt,

und wird nur einige Centigramme betragen, während M hundert Gramm erreichen kann. Dann würde der Factor von t eine Zahl in der Höhe einiger Hundertel sein, dividirt durch eine Secunde, das Product in den practisch vorkommenden Fällen einige Zehntel betragen; man kann also eine Entwickelung der Exponentialgrössen vornehmen und erhält:

$$\begin{aligned} s = R\varphi &= \frac{Ra}{b}\left(\frac{bt^2}{1.2} + \frac{b^2t^4}{1.2.3.4} + \frac{b^3t^6}{1\ldots.6} + \cdots\right), \\ &= \frac{Ra\,t^2}{2}\left(1 + \frac{bt^2}{12} + \frac{b^2t^4}{360} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{62}$$

Dies zeigt: die Abweichung des Gesetzes für den Fallraum s von der Proportionalität mit t^2 verschwindet, wenn die Masse des Fadens so gering ist, dass $bt^2/12$ neben Eins vernachlässigt werden kann. Man erhält dann, wenn man auch noch μL neben m fortlässt:

$$s = \frac{R^2 mg - R\varrho}{\mathsf{M} + R^2(2M + m)} \cdot \frac{t^2}{2}, \tag{62'}$$

also eine Bewegung, deren constante Beschleunigung durch das Trägheitsmoment der Rolle und durch die Axenreibung verkleinert wird.

2. Theorie der gedämpften Schwingungen bei kleiner Amplitude.

Schwingungen, welche in Folge einer Widerstandskraft allmählich zur Ruhe kommen, werden an verschiedenen physikalischen Instrumenten der Beobachtung unterworfen, theils zur Bestimmung der Kraft, welche die Schwingungen hervorruft, oder derjenigen, welche sie dämpft, theils zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des schwingenden Körpers.

Damit ein um eine Axe drehbarer Körper in Schwingungen gerathe, muss durch seine Ablenkung aus der Ruhelage ein Moment entstehen, welches bestrebt ist, ihn in dieselbe zurückzuführen. Für hinreichend kleine Drehungswinkel φ wird man dasselbe nach Potenzen von φ entwickeln und sich auf das lineäre Glied beschränken können; man hat daher für dies Moment den Werth $D_0 - D_1\varphi$.

Die dämpfende Kraft betrachten wir als eine Function der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ und verfahren wie zuvor, beschränken uns auf kleine Geschwindigkeiten, entwickeln die Function daher nach Potenzen von $d\varphi/dt$ und brechen mit dem zweiten Glied ab, so dass wir für das Moment der Widerstände den Werth haben $E_0 - E_1(d\varphi/dt)$. Die Bewegungsgleichung wird hiernach:

$$\mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (D_0 + E_0) - D_1\varphi - E_1\frac{d\varphi}{dt}. \tag{63}$$

D_1 ist der bei einer Vergrösserung der Ablenkung φ um die Winkeleinheit, E_1 der bei einer Vergrösserung der Geschwindigkeit $d\varphi/dt$ um die Geschwindigkeitseinheit eintretende Zuwachs der beiden Momente, die beide der Bewegung entgegenwirken, wenn D_1 und E_1 positiv sind.

Das constante Glied D_0 stellt das Drehungsmoment dar, das der Körper erfährt, wenn $\varphi = 0$ ist, E_0 das Widerstandsmoment, das bei der Geschwindigkeit $d\varphi/dt = 0$ wirkt und das, wenn es bei der Bewegung dämpfend wirken soll, stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie $d\varphi/dt$ haben muss; E_0 würde etwa als eine gleitende Reibung, z. B. als Axenreibung bei der Drehung anzusehen sein.

Der Winkel φ ist gegen eine beliebige Anfangslage des Körpers gerechnet; es liegt nahe, zu dieser die Ruhelage des Körpers zu wählen; da dieselbe durch

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

definirt ist, so ergiebt sich aus (63)

$$D_0 + E_0 = D_1\varphi_1'$$

für den Winkel φ_1', welcher der Ruhelage des Körpers entspricht.

Dabei ist aber zu bemerken, dass, weil E_0 eine Widerstandskraft ist, die der Bewegung entgegen wirkt, die obige Formel bei positivem E_0 nur für eine Verschiebung in negativer Richtung gilt, z. B. auch wenn der Körper, von grössern Winkeln φ herkommend, zur Ruhe gelangt ist. Für eine positive Verschiebung ist E_0 mit $-E_0$ zu vertauschen und es gilt dann für das Gleichgewicht, das durch eine Verschiebung von kleinern Werthen φ her erreicht wird:

$$D_0 - E_0 = D_1\varphi_2'.$$

Zwischen diesen beiden äussersten Werthen φ_1' und φ_2' liegen unendlich viele Gleichgewichtslagen, in denen der Widerstand E_0 nur unvollständig in Anspruch genommen wird; in der mittlern Lage, die gegeben ist durch:

$$D_0 = D_1\varphi',$$

wirkt er gar nicht; in dieser würde also der Körper ohne Widerstand E_0 ruhen.

Es ist daher angemessen, die so gegebene Lage als Anfangslage zu wählen, was sich dadurch ausdrückt, dass in der Gleichung (63) D_0 mit Null zu vertauschen ist. Sie lautet demgemäss:

$$\mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mp E_0 - D_1\varphi - E_1\frac{d\varphi}{dt}; \qquad (63')$$

das obere oder untere Vorzeichen gilt für Bewegungen in positiver oder negativer Richtung.

Vergleichen wir dies mit dem allgemeinen Schema (60), so finden wir:

$$a = \mp \frac{E_0}{\mathsf{M}}, \quad b = -\frac{D_1}{\mathsf{M}}, \quad 2c = -\frac{E_1}{\mathsf{M}},$$

und die Formeln (60′) und (60″) zeigen, dass trotz des negativen Werthes von b mit den gemachten Voraussetzungen periodische und nicht periodische Bewegungen vereinbar sind; wir haben beide Fälle gesondert zu discutiren.

I. Ist $b + c^2 = (E_1^2/4\mathsf{M}^2 - D_1/\mathsf{M}) > 0$, also die dämpfende Kraft beträchtlich, so gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t} \mp \frac{E_0}{D_1} \\ &= e^{-rt}\left(C_1 e^{+pt} + C_2 e^{-pt}\right) \mp \frac{E_0}{D_1}, \end{aligned} \tag{64}$$

falls kurz

$$\frac{E_1}{2\mathsf{M}} = r, \quad \sqrt{\frac{E_1^2}{4\mathsf{M}^2} - \frac{D_1}{\mathsf{M}}} = p$$

gesetzt wird. Das obere Vorzeichen gilt für eine Bewegung in positiver, das untere für eine solche in negativer Richtung.

Ist für $t = 0$: $\varphi = -E_0/D_1$, der Körper also an der negativen Grenze seines Ruhebereichs, und wird ihm durch einen Stoss eine positive Anfangsgeschwindigkeit $\psi = (d\varphi/dt)_{t=0}$ mitgetheilt, so bestimmen sich die Constanten C_1, C_2 aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ \psi &= (p - r)\, C_1 - (p + r)\, C_2, \end{aligned}$$

und es wird, so lange die Bewegung in positivem Sinne andauert:

$$\varphi = \frac{\psi e^{-rt}}{2p}\left(e^{pt} - e^{-pt}\right) - \frac{E_0}{D_1}. \tag{64′}$$

Dies zeigt, dass die Ablenkung φ ein Maximum Φ erreicht zur Zeit τ, die gegeben ist durch die Beziehung:

$$e^{-2p\tau} = \frac{(r-p)}{(r+p)};$$

dasselbe hat die Grösse:

$$\Phi = \psi \frac{(r-p)^{(r-p)/2p}}{(r+p)^{(r+p)/2p}} - \frac{E_0}{D_1}.$$

Hier kehrt die Bewegung um und es gilt daher fortan

$$\varphi = e^{-rt}\left(C_1 e^{+pt} + C_2 e^{-pt}\right) + \frac{E_0}{D_1}; \tag{64″}$$

für die Rechnung ist es am bequemsten die Zeit in dieser zweiten Periode wieder von Null an zu zählen. Die Constanten sind dann aus den Bedingungen zu bestimmen, dass für $t = 0$:

$$\varphi = \Phi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

sein muss.

Man erhält so für die zweite Periode:

$$\varphi = \left(\Phi - \frac{E_0}{D_1}\right)\frac{e^{-rt}}{2p}\left((p+r)e^{pt} + (p-r)e^{-pt}\right) + \frac{E_0}{D_1}, \qquad (64''')$$

eine Formel, welche zeigt, dass der Körper nach unendlich langer Zeit in der Position

$$\varphi_\infty = + \frac{E_0}{D_1}$$

zur Ruhe kommt.

Fehlt die constante Widerstandskraft oder Axenreibung E_0, so gilt die Gleichung (64') in der Form

$$\varphi = \frac{\psi}{2p} e^{-rt}\left(e^{pt} - e^{-pt}\right) \qquad (65)$$

für die ganze Dauer der Bewegung, die zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit ψ in der Lage $\varphi = 0$ beginnt und nach unendlicher Zeit ebenda endet.

Die grösste erreichte Ausweichung ist:

$$\Phi = \psi \frac{(r-p)^{(r-p)/2p}}{(r+p)^{(r+p)/2p}}, \qquad (65')$$

ihre Beobachtung kann bei bekanntem r und p dazu dienen, die Anfangsgeschwindigkeit ψ und dadurch nach p. 187 das Moment des Impulses zu bestimmen, der dieselbe zu erzeugen vermag; indessen sind hierzu die weiter unten zu besprechenden periodischen Schwingungen mehr geeignet.

Fehlt endlich auch das Drehungsmoment D_1 und ist der Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit ψ in der Ruhelage $\varphi = 0$ nur der Widerstandskraft $E_1 d\varphi/dt$ überlassen, so gilt:

$$\varphi = \frac{\psi}{2r}\left(1 - e^{-2rt}\right); \qquad (65'')$$

die Bewegung dauert unendlich lange in positiver Richtung an bis zu der Endamplitude

$$\varphi_\infty = \frac{\psi}{2r}.$$

II. Ist $b + c^2 = (E_1^2/4M^2 - D_1/M) < 0$, also die dämpfende Kraft geringer, so gilt, wenn wir zunächst von der Axenreibung absehen, also $E_0 = 0$ setzen:

$$\varphi = e^{-rt}(A\cos pt + B\sin pt), \tag{66}$$

worin

$$\frac{E_1}{2M} = r, \qquad \sqrt{\frac{D_1}{M} - \frac{E_1^2}{4M^2}} = p$$

abgekürzt ist.

Ist für $t = 0$ der Körper in der Ruhelage, also $\varphi = 0$, und wird ihm durch einen Stoss die Anfangsgeschwindigkeit $\psi = (d\varphi/dt)_{t=0}$ mitgetheilt, so bestimmen sich die Constanten A und B:

$$A = 0, \qquad Bp = \psi,$$

so dass wird:

$$\varphi = \frac{\psi}{p} e^{-rt} \sin pt. \tag{66'}$$

Durchgänge durch die Ruhelage finden zu den Zeiten $t = h\pi/p$ statt, sodass die Dauer einer einfachen Schwingung ist:

$$T = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{D_1}{M} - \frac{E_1^2}{4M^2}}} = \frac{2\pi M}{\sqrt{4D_1M - E_1^2}}. \tag{66''}$$

Ist die Dämpfung sehr gering, so erkennt man, dass sie nur mit einem Glied zweiter Ordnung auf die Schwingungsdauer einwirkt, die sich dem Grenzwerth nähert:

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{M}{D_1}}. \tag{66'''}$$

Diese Formel wird bei beobachetem T_0, je nach Umständen, bald zur Bestimmung von M, bald von D_1 benutzt.

Wird z. B. das Drehungsmoment D_1 durch die Drillung eines elastischen Drahtes geliefert, der an seinem obern Ende befestigt ist und an seinem untern einen Körper (etwa eine Kreisscheibe aus Metall) von so einfacher Form trägt, dass sein Trägheitsmoment aus seinen Dimensionen und seiner Masse leicht und genau zu berechnen ist, so kann man durch die Messung von Torsionsschwingungen das Drehungsmoment D_1 des Drahtes bestimmen, welches der Ablenkung $\varphi = 1$ entspricht. Hierbei ist besonders günstig, dass in diesem Falle die Proportionalität des Momentes mit dem Ablenkungswinkel noch für sehr beträchtliche Amplituden mit grosser Genauigkeit gilt.

Ist so D_1 für einen gegebenen Draht gefunden, so kann man ihn dann zur empirischen Bestimmung von Trägheitsmomenten benutzen, die der Berechnung grössere Schwierigkeiten bieten. Man wird beispielsweise an dem Draht zunächst einen Apparat zur Befestigung von

andern Körpern, z. B. von Stäben, anbringen und dessen Trägheitsmoment M^0 durch Schwingungsbeobachtungen feststellen, etwa finden:

$$T^0 = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}^0}{D_1}};$$

darauf wird man den eigentlich zu untersuchenden Körper vom Trägheitsmoment M' hinzufügen und etwa erhalten:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}^0 + \mathsf{M}'}{D_1}}.$$

Dann ist:

$$\mathsf{M}' = (T'^2 - T^{0^2}) \frac{D_1}{\pi^2}.$$

Aehnlich wie einen gedrillten Draht kann man zur Bestimmung von Trägheitsmomenten die im vorigen Abschnitt beschriebene bifilare Aufhängung anwenden, deren Drehungsmoment bei kleinen Amplituden ebenfalls mit φ proportional ist.

Hier ist dann:

$$D_1 = \frac{Mg\,O\,U}{4\,l},$$

worin Mg das Gewicht des aufgehängten Apparates, l die Länge der Fäden, O und U ihre Abstände oben und unten bezeichnen.

Dabei ist, wie schon im vorigen Abschnitt bemerkt, wenn die Fäden nicht sehr dünn gegen ihren Abstand sind, eine gewisse Unsicherheit darüber vorhanden, welche Entfernungen für O und U zu wählen sind.

Diese Schwierigkeit lässt sich nach einem Vorschlag von Gauss folgendermassen umgehen.

Man legt einen Stab so in den Apparat, dass sein Schwerpunkt sehr nahe in die Drehaxe fällt, was sich durch gewisse einfache Kunstgriffe leicht erreichen lässt. Beiderseits sind in gleichen Abständen $L', L'' \ldots$ vom Schwerpunkt und somit von der Drehungsaxe feine Marken angebracht, welche gestatten, gegebene gleiche Massen m, z. B. cylindrische Metallstücken, so aufzuhängen, dass ihre Schwerpunkte um eben diese Längen $L', L'' \ldots$ von der Drehungsaxe abstehen.

Möge der Apparat mit dem eingelegten Stab die Schwingungsdauer T^0 haben, also gelten:

$$T^0 = \pi \sqrt{\frac{4\,l\,\mathsf{M}^0}{g\,O\,U\,M}},$$

hingegen, wenn die Massen m in den Entfernungen $L', L'' \ldots$ angebracht sind, resp. die Schwingungsdauern $T', T'' \ldots$ haben, sodass ist:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{4\,l\,(\mathsf{M}^0 + 2\,m\,(\varkappa^2 + L'^2))}{g\,O\,U(M + 2\,m)}},$$

$$T'' = \pi \sqrt{\frac{4\,l\,(\mathsf{M}^0 + 2\,m\,(\varkappa^2 + L''^2))}{g\,O\,U(M + 2\,m)}}, \quad \text{u. s. f.}$$

hierin bezeichnet $m\varkappa^2$ das Trägheitsmoment eines der angebrachten Gewichte m um eine verticale Axe durch seinen Schwerpunkt.

Daraus folgt:

$$\frac{g\,O\,U}{4\,l} = \frac{2\,\pi^2\,(L'^2 - L''^2)}{(T'^2 - T''^2)\,(M + 2\,m)},$$

und hierdurch ist also das ganze in D_1 auftretende Aggregat $g\,O\,U/4\,l$ mit einem Male bestimmt; setzt man seinen Werth in die Formel für T^0 ein, so folgt auch M^0 und damit ist Alles bekannt, was man nöthig hat, um die bifilare Aufhängung zur Bestimmung von Trägheitsmomenten zu verwenden. —

Nachdem wir so die practische Anwendung des Gesetzes der Schwingungsdauer erörtert haben, wollen wir uns zur Betrachtung des Gesetzes der Schwingungsamplituden wenden. Es war nach (66'):

$$\varphi = \frac{\psi}{p}\,e^{-rt}\sin p\,t,$$

dabei

$$r = \frac{E_1}{2\,\mathsf{M}}, \qquad p = \sqrt{\frac{D_1}{\mathsf{M}} - \frac{E_1^2}{4\,\mathsf{M}^2}}.$$

Maxima oder Minima von φ finden statt zu Zeiten τ, die gegeben sind durch die Gleichung:

$$\operatorname{ctg} p\,\tau = \frac{r}{p}. \tag{67}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung folgen einem einfachen Gesetz; ist die erste, positive gleich τ_0, so sind die folgenden gegeben durch:

$$\tau_h = \tau_0 + \frac{h\,\pi}{p} = \tau_0 + h\,T,$$

wo h eine ganze Zahl ist; demgemäss bestimmt sich das $h$te Maximum oder Minimum von φ durch:

$$(-1)^h\,\Phi_h = \frac{\psi}{p}\,e^{-r(\tau_0 + h\,T)}\sin\tau_0, \tag{67'}$$

wobei nun alle Φ_h positiv sind; es gilt also:

$$\frac{\Phi_{h+1}}{\Phi_h} = e^{-r\,T}. \tag{67''}$$

Die Schwingungsamplituden Φ_h bilden also in ihren absoluten Werthen eine geometrische Reihe; das gleiche gilt von dem directer ablesbaren Intervall Ψ_h zwischen einander folgenden Umkehrpunkten, definirt durch:

$$\Phi_h + \Phi_{h+1} = \Psi_h, \qquad \Phi_{h+1} + \Phi_{h+2} = \Psi_{h+1} \quad \text{u. s. f.}$$

Es lässt sich demnach leicht der Werth des Exponenten:

$$r\,T = \frac{\pi\,r}{p} = \frac{T\,E_1}{2\,\mathsf{M}}$$

durch die Beobachtung bestimmen und bei direct beobachtetem T und berechnetem M die Grösse der dämpfenden Kraft E_1 ableiten. —

Die erste Amplitude nach Ertheilung der Geschwindigkeit ψ kann zur Bestimmung dieser Grösse und dadurch zur Bestimmung des Impulses dienen, welcher die Schwingungen hervorgerufen hat; dergleichen Messungen werden im Gebiete der electrischen Induction häufig angestellt.

Die Zeit τ des ersten Maximums für φ ist die erste positive Wurzel der Gleichung:

$$\operatorname{ctg} p\tau = \frac{r}{p};$$

da man durch die Beobachtung der folgenden Amplituden, wie oben gezeigt, den Werth r/p leicht erhalten kann und $\pi/p = T$ die Dauer einer einfachen Schwingung giebt, so ist in der Gleichung

$$\psi = \frac{p\,\Phi_1 e^{+r\tau_1}}{\sin p\tau_1} \tag{68}$$

alles auf der rechten Seite Vorkommende bekannt.

Ist r/p klein neben Eins, so ist $p\tau_1$ nur wenig von $\pi/2$ verschieden und man kann die Gleichung (67) zu leichterer Berechnung von τ_1 in eine Reihe entwickeln.

Wenn auf die besprochene Weise ψ gefunden ist, so folgt daraus die Grösse des angewandten Impulsmomentes (N) nach Gleichung (56'):

$$(N) = \psi\mathsf{M}. \text{ —}$$

Wirkt ausser der mit der Geschwindigkeit proportionalen auch noch eine constante Widerstandskraft, so gilt nach (60'') an Stelle von (66):

$$\varphi = e^{-rt}(A\cos pt + B\sin pt) \mp \frac{E_0}{D_1}, \tag{69}$$

wo das obere Vorzeichen für Bewegungen in positiver, das untere für solche in negativer Richtung zu benutzen ist; es gilt also dieselbe Formel immer nur für die Dauer einer einfachen Schwingung und es müssen die Constanten A und B für eine jede dieser Perioden neu bestimmt werden.

Seien die einfachen Schwingungen durch Ordnungszahlen bestimmt und mögen die in positiver Richtung stattfindenden die geradzahligen sein. Betrachten wir dann den Anfang der $(h+1)$ten einfachen Schwingung, der zur Zeit τ_h stattfinden möge; die Anfangsamplitude sei $(-1)^h\,\Phi_h$, also, da Φ_h positiv ist, negativ bei positiver Bewegungsrichtung; die Geschwindigkeit ist zur selben Zeit τ_h gleich Null.

Demgemäss muss gelten:

$$(-1)^h\left(\Phi_h - \frac{E_0}{D_1}\right) = e^{-r\tau_h}(A_{h+1}\cos p\tau_h + B_{h+1}\sin p\tau_h), \tag{69'}$$

$$0 = -A_{h+1}(r\cos p\tau_h + p\sin p\tau_h) + B_{h+1}(p\cos p\tau_h - r\sin p\tau_h).$$

Für das Ende dieser Periode gilt:

$$(-1)^{h+1}\left(\Phi_h + \frac{E_0}{D_1}\right) = e^{-r\tau_{h+1}}(A_{h+1}\cos p\tau_{h+1} + B_{h+1}\sin p\tau_{h+1}), \tag{69''}$$

$$0 = -A_{h+1}(r\cos p\tau_{h+1} + p\sin p\tau_{h+1}) + B_{h+1}(p\cos p\tau_{h+1} - r\sin p\tau_{h+1}).$$

Die Betrachtung dieser Formeln genügt, um den Einfluss einer constanten Reibung auf die Gesetze der Oscillation zu erkennen.

Die beiden zweiten Gleichungen zeigen, dass τ_h und τ_{h+1} derselben Relation:

$$\operatorname{tg} p\tau = -\frac{Ar - Bp}{Ap + Br} \tag{70}$$

genügen, es muss also, da zwischen diesen beiden kein anderer Werth die Gleichung erfüllt,

$$p(\tau_{h+1} - \tau_h) = \pi$$

sein; die Differenz $\tau_{h+1} - \tau_h = T = \pi/p$ ist also die constante Dauer einer einfachen Schwingung und unabhängig von der constanten Widerstandskraft. Es gilt daher für die Dauer einer einfachen Schwingung die Formel (66''):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{D_1}{\mathsf{M}} - \frac{E_1^2}{4\mathsf{M}^2}}}.$$

Die beiden ersten Gleichungen (69') und (69'') lassen sich in Rücksicht darauf, dass $pt_{h+1} = pt_h + \pi$ ist, in der Form schreiben:

$$\Phi_h - \frac{E_0}{D_1} = K_h, \qquad \Phi_{h+1} + \frac{E_0}{D_1} = K_h e^{-r\pi/p} \tag{70'}$$

und daraus erkennt man, dass jetzt die Amplituden selbst keine geometrische Reihe mehr bilden, sondern:

$$\frac{\Phi_h \quad - \frac{E_0}{D_1}}{\Phi_{h+1} + \frac{E_0}{D_1}} = e^{+r\pi/p} \tag{70''}$$

ein constantes Verhältniss giebt.

Stellt man zu den letzten Formeln die für die folgende $(h+2)$te einfache Schwingung geltende, so hat man:

$$\Phi_{h+1} - \frac{E_0}{D_1} = K_{h+1}, \qquad \Phi_{h+2} + \frac{E_0}{D_1} = K_{h+1} e^{-r\pi/p},$$

und erhält daraus:

$$\Phi_h - 2\,\Phi_{h+1} + \Phi_{h+2} = (K_h - K_{h+1})(1 - e^{-r\pi/p}), \tag{71}$$

und:

$$2\frac{E_0}{D_1} = K_h e^{-r\pi/p} - K_{h+1}.$$

Sind die Widerstandskräfte gering, sodass man in Bezug auf $r\pi/p$ und E_0/D_1 quadratische Glieder vernachlässigen kann, so schreibt sich dies:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_h - 2\,\Phi_{h+1} + \Phi_{h+2} &= (K_h - K_{h+1})\frac{r\pi}{p}, \\ K_h\frac{r\pi}{p} + 2\frac{E_0}{D_1} &= K_h - K_{h+1}. \end{aligned}\right\} \tag{71'}$$

Da aber die zweite Gleichung $(K_h - K_{h+1})$ als eine Grösse erster Ordnung ergiebt, so ist die rechte Seite der ersten Gleichung zweiter Ordnung und daher zu setzen:

$$\Phi_h - 2\,\Phi_{h+1} + \Phi_{h+2} = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi_h + \Phi_{h+2} = 2\,\Phi_{h+1}. \tag{71''}$$

Hieraus lässt sich eine Regel ableiten, um für Körper, die unter Widerstandskräften schwingen, die Ruhelage zu bestimmen, welche sie ohne diese Widerstände einnehmen würden, und die direct nur sehr mühsam zu beobachten sein würde.

Man beobachte auf einer Scala mit beliebigem Nullpunkt drei auf einander folgende Umkehrpunkte des schwingenden Körpers, die auf die Zahlen s_h, s_{h+1}, s_{h+2} fallen mögen; dann ist

$$\frac{s_h + 2s_{h+1} + s_{h+2}}{4} = s_0$$

der der gesuchten Ruhelage entsprechende Punkt der Scala.

In der That: $s_h - s_0$, $s_0 - s_{h+1}$, $s_{h+2} - s_0$ sind proportional mit den drei auf einander folgenden Amplituden Φ_h, Φ_{h+1}, Φ_{h+2}; führt man dies aber ein, so verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\Phi_h - 2\,\Phi_{h+1} + \Phi_{h+2} = 0.$$

Diese Gauss'sche Regel kommt stets bei der Benutzung der Waagen in Anwendung, um aus deren Schwingungen schnell und sicher die Ruhelage zu bestimmen.

Man kann sie leicht für den Fall grösserer Widerstände erweitern, indem man bei der Entwickelung der Exponentialgrössen noch die nächsten Glieder beibehält. Es gilt z. B. unter Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung:

$$\Phi_h - 4\,\Phi_{h+1} + 6\,\Phi_{h+2} - 4\,\Phi_{h+3} + \Phi_{h+4} = 0.$$

§ 22. Theorie der Anwendung des Pendels zur Bestimmung der Beschleunigung durch die Schwerkraft.

Für die Dauer T der einfachen Schwingung eines schweren Massenpunktes auf einer vertical stehenden Kreisbahn vom Radius l oder eines sogenannten einfachen Pendels von der Länge l hatten wir schon im ersten Theil, § 9, das Gesetz gefunden

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

welches für unendlich kleine Amplituden gilt. Dasselbe zeigt, wie durch eine Beobachtung von T und l die Beschleunigung g durch die Schwere sich einfachst bestimmen lassen würde. Indess ist die bei der vorstehenden Formel vorausgesetzte Anordnung bei dem Experiment nach vielen Seiten hin nur angenähert zu erreichen, und wir wollen daher jetzt ausführlich die störenden Umstände erörtern, welche bei der Bestimmung der überaus wichtigen Grösse g in Betracht kommen, und die Methoden, die man anwendet, um ihren Einfluss auf die Beobachtung theoretisch zu erkennen und practisch zu eliminiren.

Die Pendel, welche zur Bestimmung von g wirklich angewandt werden, und die man im Gegensatz zu den oben erwähnten idealen oder „einfachen" wohl „zusammengesetzte" nennt, sind starre Körper, die um eine horizontale Axe A unter der Wirkung der Schwerkraft drehbar sind. Ihre Masse sei mit M, ihr Trägheitsmoment um die Axe A mit M bezeichnet. Die drehend wirkende Kraft ist die Schwere, deren Resultante Mg im Schwerpunkt s des Körpers angreift. Das Pendel ist in stabiler Ruhe, wenn sich der Schwerpunkt S normal unter A befindet, eine Ablenkung um den Winkel φ giebt ein zurückdrehendes Moment:

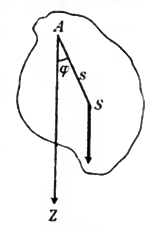


Fig. 23.

$$N = -Mgs \sin\varphi,$$

falls s den Abstand des Schwerpunktes von der Axe bezeichnet.

Wir erhalten demgemäss die Bewegungsgleichung

$$\mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgs \sin\varphi, \tag{72}$$

welche nach Multiplication mit $d\varphi/dt$ und einmaliger Integration ergiebt:

$$\frac{\mathsf{M}}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c + Mgs \cos\varphi.$$

Ist für $t = 0$ das Pendel in seiner grössten Elongation Φ nach der positiven Seite und also $(d\varphi/dt)_{t=0} = 0$, so wird:

$$\mathsf{M}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2Mgs(\cos\varphi - \cos\Phi), \tag{72'}$$

also

$$t = -\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Mgs}}\int_{\Phi}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\Phi)}}, \tag{72''}$$

wo das negative Zeichen für die Dauer der ersten einfachen Schwingung gilt. Setzt man hierin

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\psi, \qquad \text{also}$$

$$d\varphi = \frac{2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\psi}},$$

so erhält man:

$$t = \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Mgs}}\int_{\psi}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\psi}}; \tag{72'''}$$

die Ablenkung des Pendels zu beliebiger Zeit wird also durch ein elliptisches Integral erster Art gegeben. Für die Praxis ist es bequem, da die Amplitude Φ immer nur einige Grade beträgt, den Nenner zu entwickeln und zu schreiben:

$$t = \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Mgs}}\int_{\psi}^{\pi/2} d\psi\left[1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\psi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^4\frac{\Phi}{2}\sin^4\psi + \cdots\right].$$

Die Dauer einer einfachen Schwingung erhalten wir hieraus, wenn wir die untere Grenze $\psi = -\pi/2$ wählen, denn dies entspricht der Zeit, die verfliesst, bis die Amplitude zum ersten Mal den Werth $-\Phi$ erreicht. Demgemäss findet sich unter Rücksicht auf die Beziehung

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sin^{2n}\psi\, d\psi = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots 2n}\pi$$

das Resultat:

$$T_\Phi = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Mgs}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\Phi}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\sin^4\frac{\Phi}{2} + \cdots\right]. \tag{73}$$

Lassen wir den Körper zu einem einzigen schweren Punkt M im Abstand l von der Axe werden, so ist für diesen $\mathsf{M} = Ml^2$ und $s = l$;

es wird also der Factor M/Ms zu l, während alles übrige bestehen bleibt. Wir erhalten daher den Satz:

Ein zusammengesetztes Pendel besitzt dieselbe Schwingungsdauer T_Φ, wie ein einfaches von der Länge l, wenn die Beziehung besteht:

$$\frac{\mathsf{M}}{Ms} = l. \tag{74}$$

Drückt man das Trägheitsmoment M durch den Trägheitsradius $\varkappa$ um eine zur gegebenen parallele Axe durch den Schwerpunkt und durch dessen Abstand s aus, gemäss (39'), so erhält man auch:

$$\frac{\varkappa^2 + s^2}{s} = l. \tag{74'}$$

Die Betrachtung des in der Klammer von (73) stehenden Werthes zeigt ferner:

Die Schwingungsdauer eines Pendels wächst mit seiner Schwingungsweite.

Dies Wachsthum ist nur gering und beträgt bei einer Zahl von n Graden, die so klein ist, dass das dritte Glied zu ignoriren ist, den $0{,}000\,018 \, . \, n^2$ten Theil des Ganzen. Bezeichnet man den Klammerausdruck mit $1 + \sigma$, so giebt die Formel (73), nach g aufgelöst, den Werth:

$$g = \frac{\mathsf{M}}{Ms}\left(\frac{\pi}{T_\Phi}\right)^2 (1 + \sigma)^2. \tag{74''}$$

$T_\Phi/(1 + \sigma)$ ist dabei die einer unendlich kleinen Amplitude entsprechende Schwingungsdauer, die wir weiterhin kurz T nennen wollen.

Für die Bestimmung von g durch die Beobachtung sind also die fünf Grössen M, M, s, T_Φ und σ zu bestimmen.

Die geringste Schwierigkeit bietet M und σ dar; die Masse des Pendels wird durch Wägung bestimmt, die Amplituden Φ werden am Pendel direct abgelesen, und für nicht zu grosse Zeitintervalle ist ihre Veränderlichkeit in Folge der Widerstände dadurch genügend zu berücksichtigen, dass man mit dem arithmetischen Mittel $\Phi_m = (\Phi_a + \Phi_b)/2$ der Anfangs- und Endamplitude rechnet.

Die Schwingungsdauer wird dadurch bestimmt, dass man die Zeit τ beobachtet, während welcher eine nicht zu kleine Anzahl n von Schwingungen stattfindet. Es lässt sich durch eine strenge Analyse zeigen, dass dann τ/n sehr nahe die Grösse derjenigen Schwingungsdauer ist, welche der mittleren Amplitude Φ_m in dieser Zeit entspricht.

Für diese Beobachtung hat man zwei Methoden, welche beide eine ungefähre Kenntniss des Werthes von T, die man durch directe

Zählung einer Anzahl von Schwingungen und Ablesung der ihnen entsprechenden Anzahl von Secunden leicht erhalten kann, voraussetzen.

Bei der ersten „gewöhnlichen“ Methode beobachtet man mit einem auf die Ruhelage des Pendels eingestellten Fernrohre die Zeitpunkte $t_0, t_1, t_2, \ldots$ beliebiger Durchgänge des Pendels durch die Ruhelage, sowie die ihnen direct vorhergehenden oder folgenden Elongationen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$, bestimmt dann mit Hülfe des vorläufigen Werthes von T die Anzahl $n_1, n_2, \ldots$ der zwischen je zwei sich folgenden Ablesungen liegenden Schwingungsdauern und erhält dadurch folgende Gleichungen zur Bestimmung von T, d. h. der einer unendlich kleinen Amplitude entsprechenden Schwingungsdauer:

$$\begin{aligned}
t_0 &= a \\
t_1 &= a + T(n_1 + n_1\sigma_1) \\
t_2 &= a + T(n_1 + n_2 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2) \\
t_3 &= a + T(n_1 + n_2 + n_3 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3) \\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{75}$$

Die sehr kleinen in σ multiplicirten Glieder kann man hierin unter Benutzung eines angenäherten Werthes für T passend auf die linke Seite bringen als Correctionen an den direct beobachteten Zeitpunkten t_h.

Für ein Gleichungssystem, welches, wie dieses, mehr Gleichungen als Unbekannte (a und T) enthält, ergiebt die Wahrscheinlichkeitsrechnung die folgende Regel zur Bestimmung der Unbekannten: Man multiplicirt jede Gleichung mit dem in ihr auftretenden Factor der ersten Unbekannten und addirt alle so erhaltenen, verfährt ebenso mit dem Factor der zweiten, dritten . . . $n$ten Unbekannten und gewinnt auf diese Weise n Gleichungen, deren Auflösung die wahrscheinlichsten Werthe der n Unbekannten liefert. (Methode der kleinsten Fehlerquadrate.)

Die andere Beobachtungsmethode, auch „Methode der Coincidenzen“ genannt und von Mairan erfunden, von Borda vervollkommnet, setzt voraus, dass die Schwingungsdauer des Pendels sehr nahe in einem durch kleine ganze Zahlen gegebenem Verhältniss zu der Schwingungsdauer eines (controlirten) Uhrpendels steht, und bestimmt die Zeitpunkte des gleichzeitigen gleichsinnigen Durchganges beider Pendel durch ihre Ruhelage, die sogenannte Coincidenz.

Fänden ν Schwingungen des Experimentirpendels in genau derselben Zeit statt, wie μ des Uhrpendels, d. h. wäre $\nu T_\Phi = \mu T'$, so müsste, wenn beide zur Zeit $t = 0$ eine Coincidenz besitzen, nach je μ Secunden abermals eine solche eintreten; ist dies Verhältniss aber nicht genau erfüllt, sondern

$$(\nu \mp \delta)\, T_\Phi = \mu T',$$

wo δ neben μ sehr klein und mit positivem oder negativem Zeichen zu nehmen ist, jenachdem das Uhr- oder das Experimentirpendel voreilt, so werden zunächst die nach je μ Secunden zu erwartenden Coincidenzen immer unvollkommner werden, bis nach $h\mu$ Secunden einmal ein nahezu gleichzeitiger Durchgang beider Pendel in entgegengesetzter Richtung stattfindet, d. h. $h\delta$ nahe $= 1$, also

$$(h\nu \mp 1)\, T_\Phi (=) h\mu\, T'$$

ist, wobei das Zeichen $(=)$ die Gleichheit innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler andeuten mag.

Weiter werden die beiden Pendel beim Durchgang nach je μ Secunden sich einander mehr und mehr nähern, und nach $2h\mu$ Secunden wird ein nahe gleichzeitiger Durchgang in gleicher Richtung wieder stattfinden. Dann ist:

$$2\,(h\nu \mp 1)\, T_\Phi (=) 2h\mu\, T' (=) \Theta_\Phi$$

die Dauer einer Coincidenz.

Die Coincidenzen sind niemals vollständige, und darum wird man, wenn man aus der Messung der Dauer einer grössern Zahl von Intervallen das h berechnet, für dasselbe im Allgemeinen keine ganze Zahl finden. Unter Voraussetzung nicht ganzzahliger Werthe h wird dann die Gleichung

$$2\,(h\nu \mp 1)\, T_\Phi = 2h\mu\, T' = \Theta_\Phi \qquad (76)$$

auch streng richtig; man kann also die Beziehung

$$T_\Phi = \frac{h\mu}{h\nu \mp 1}\, T'$$

benutzen, um die Schwingungsdauer des Experimentirpendels durch diejenige des Uhrpendels auszudrücken.

Sind die Amplituden des ersteren nicht unendlich klein, so ist T_Φ während der Beobachtung auch nicht constant; es muss dann eine Reduction auf unendlich kleine Amplituden vorgenommen werden.

Die Schwingungsdauer T bei unendlich kleiner Amplitude steht mit der bei endlicher nach dem Obigen in dem Zusammenhang:

$$T_\Phi = T(1 + \sigma),$$

worin σ, eine Function der Grösse der Amplitude, in der Regel so klein ist, dass man ihr Quadrat neben Eins vernachlässigen kann.

Bei unendlich kleiner Amplitude würden die Coincidenzen in Zeitintervallen:

$$2\,(h^0\nu \mp 1)\, T = 2h^0\mu\, T' = \Theta \qquad (76')$$

stattfinden.

Vergleicht man dies mit der Formel (76)

$$2(h\nu \mp 1)\,T(1+\sigma) = 2h\mu\,T' = \Theta_\Phi,$$

so erhält man nach einfachen Reductionen die Beziehung

$$h = h^0 \mp \sigma h(h\nu \mp 1), \tag{76''}$$

wo im zweiten Glied auf der rechten Seite h beliebig mit h^0 zu vertauschen ist.

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für Θ_Φ ein, so erhält man, indem man sich auf die linearen Glieder in Bezug auf σ beschränkt:

$$\Theta\big(1 \mp \sigma(h\nu \mp 1)\big) = \Theta_\Phi,$$

oder abgekürzt (76‴)

$$\Theta_\Phi = \Theta(1 \mp \sigma').$$

Beobachtet man nun Coincidenzen zu den Zeiten $t_0, t_1, t_2 \ldots$, und liegen zwischen denselben resp. $k_1, k_2, \ldots$ Intervalle T, so gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
t_0 &= b\\
t_1 &= b + \Theta(k_1 + k_1\sigma_1')\\
t_2 &= b + \Theta(k_1 + k_2 + k_1\sigma_1' + k_2\sigma_2')\\
t_3 &= b + \Theta(k_1 + k_2 + k_3 + k_1\sigma_1' + k_2\sigma_2' + k_3\sigma_3')\\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{77}$$

Hierin sind die σ' mit den mittleren Amplituden in dem betreffenden Intervall zu berechnen und die in sie multiplicirten Glieder unter Benutzung eines vorläufigen angenäherten Werthes von T vortheilhaft auf die linke Seite zu bringen.

Die Berechnung von Θ geschieht dann nach der oben besprochenen Methode; aus seinem Werth findet sich nach (76′)

$$h^0 = \frac{\Theta}{2\mu\,T'}$$

und daraus T gemäss derselben Gleichung:

$$T = \frac{\Theta}{2(h^0\nu \mp 1)} = \frac{\Theta}{2\left(\frac{\nu\Theta}{2\mu\,T'} \mp 1\right)}. \tag{77'}$$

Am häufigsten wird die Methode der Coincidenzen auf Pendel angewandt, welche mit dem Uhrpendel nahe übereinstimmende Schwingungsdauer haben, für welche also $\mu = \nu$ ist. —

Die Hauptschwierigkeit in der Anwendung der Formel (74″) zur Bestimmung von g liegt in den Grössen M und s, die im Allgemeinen

aus den Dimensionen des Pendels zu berechnen sind. Dabei bringt einmal die stets vorhandene und nicht streng zu berücksichtigende Inhomogenität des Materiales, aus welchem das Pendel gefertigt ist, dann auch die nie vollkommen dem Ideal entsprechende unregelmässige Gestalt desselben bedeutende Fehler mit sich. Wir wollen zwei verschiedene Anordnungen des Experimentes, welche bestimmt sind, diese Uebelstände unschädlich zu machen, ausführlich besprechen.

I. Fadenpendel.

Die Einrichtung der Fadenpendel bezweckt, die Wirkung der genannten Fehlerquellen dadurch zu verringern, dass man die ganze Masse auf möglichst kleinen Raum in grossem Abstand von der Drehungsaxe concentrirt. Dazu hängt man an einem möglichst leichten Faden eine Kugel auf von möglichst grosser Dichtigkeit und einem Radius R, der klein ist gegen die Länge des Fadens L. Nennt man die Masse der Kugel m, die des Fadens m', so erhält man unter Voraussetzung homogener Substanz in jedem der beiden Theile und regelmässiger Form nach (39), (41‴), (42) für das Verhältniss M/Ms, welches die Länge l des mit dem gegebenen gleichschwingenden einfachen Pendels darstellt, den Werth:

$$l = \frac{\mathsf{M}}{Ms} = \frac{m\left((L+R)^2 + \frac{2}{5}R^2\right) + m'\frac{L^2}{3}}{m(L+R) + m'\frac{L}{2}}. \tag{78}$$

Hierin wird m und m' durch Wägung, $L + R$ durch Messung der Pendellänge im Allgemeinen direct bestimmt werden. R wird entweder durch das Mittel einer grössern Zahl von Messungen verschiedener Durchmesser gegeben, oder aus dem nach später zu besprechenden Methoden beobachteten Volumen als mittlerer Werth berechnet werden.

Ist m' so klein gegen m, dass man neben Eins sowohl $(m'/m)^2$ als auch $m'R/mL$ vernachlässigen kann, so erhält man:

$$l = \frac{\mathsf{M}}{Ms} = L + R + \frac{2}{5}\cdot\frac{R^2}{L+R} - \frac{Lm'}{6m}. \tag{78'}$$

Wäre die ganze Masse im Kugelcentrum vereinigt, so würde $l = L + R$ sein; die beiden letzten Glieder der Formel sind also die von der Grösse der Kugel und der Masse des Fadens herrührenden Correctionen; da sie das entgegengesetzte Vorzeichen haben, so kann man durch geeignete Wahl erreichen, dass sie sich gegenseitig zerstören. Dazu muss:

$$\frac{12}{5}\frac{R^2}{L(L+R)} = \frac{m'}{m}$$

sein; ist Faden und Kugel aus der gleichen Substanz und q der Querschnitt des Fadens, so folgt für diesen:

$$q = \frac{16\pi}{5} \cdot \frac{R^5}{L^2(L+R)};$$

dies giebt, falls $R = 1$ cm, $L = 1$ m, für q den Werth 0,001 □mm.

Um sich von der Voraussetzung der Homogenität der Substanz der Kugel — der Faden kommt hierbei seiner geringen Masse wegen nicht in Betracht — zu befreien, kann man nach Vorgang von Mairan, dem die späteren Beobachter mit Fadenpendeln gefolgt sind, zwei Beobachtungsreihen combiniren, zwischen denen die Kugel umgekehrt, unten und oben vertauscht worden ist.

Bezeichnet man nämlich das Trägheitsmoment so wie den Schwerpunktsabstand für den Fall homogener Massenvertheilung mit M_0 und s_0, den Abstand des Kugelcentrums von der Axe mit a, und bezeichnet man ferner die positive oder negative Dichtigkeit, die in dem Raumelement dk an der Stelle $(a+x)$, y mehr vorhanden ist, als bei homogener Massenvertheilung stattfinden würde, mit ε', so wird sich, wenn man y^2 als sehr klein neben $(a+x)^2$ vernachlässigt, schreiben:

$$l = \frac{\mathsf{M}_0 + \int \varepsilon' dk (a+x)^2}{M s_0 + \int \varepsilon' dk (a+x)},$$

woraus unter Rücksicht auf $\int \varepsilon' dk = 0$ und die gleiche Grössenordnung von x und y folgt:

$$l = \frac{\mathsf{M}_0}{M s_0}\left(1 + \left(\frac{2a}{\mathsf{M}_0} - \frac{1}{M s_0}\right)\int \varepsilon' x \, dk\right);$$

man bemerkt, dass bei der vorausgesetzten Drehung der Pendelkugel das zweite Glied sein Vorzeichen umkehrt. Beobachtet man daher T, womit auch weiterhin sogleich die auf unendlich kleine Amplitude reducirte Schwingungsdauer bezeichnet werden mag, in diesen beiden Anordnungen und bezeichnet die sich entsprechenden Werthe mit l', T' und l'', T'', so wird:

$$\frac{T'^2 + T''^2}{2} = \frac{\pi^2}{g}\frac{(l'+l'')}{2} = \frac{\pi^2}{g}\frac{\mathsf{M}_0}{M s_0};$$

man kann also, wenn man an Stelle der einen beobachteten Schwingungsdauer die Wurzel aus der halben Summe der Quadrate der bei verschiedener Lage der Kugel erhaltenen setzt, g ebenso berechnen als wäre die Pendelkugel homogen. Ist $(T' - T'')^2/(T' + T'')^2$ neben Eins zu vernachlässigen, so kann man für die Rechnung bequemer setzen:

$$\sqrt{\frac{T'^2 + T''^2}{2}} = \frac{T' + T''}{2}.$$

Die Unregelmässigkeiten der Gestalt fallen bei dieser Combination von Beobachtungen im Allgemeinen nicht heraus, da sie auf die direct gemessene Länge $L+2R$ des Pendels auch Einfluss haben; dies würde nur in dem speciellen Falle geschehen, dass der verticale Durchmesser der fehlerhaften Kugel genau gleich dem durch Wägung gefundenen mittleren ist. Man kann diese Fehlerquelle einzig dadurch weniger wirksam machen, dass man bei derselben Kugel verschiedene Durchmesser nach einander vertical stellt; indessen ist sie weniger bedenklich als die vorige, da die Fehler der Gestalt durch directe Messung von Durchmessern constatirt werden können, die der Homogenität nicht. —

Eine eigenthümliche Schwierigkeit entsteht für die Beobachtung dadurch, dass die Drehungsaxe eines Fadenpendels nicht unmittelbar durch das obere Ende des Pendelfadens gegeben ist, sondern von demselben abweicht. Ist der Pendelfaden zwischen Backen eingeklemmt, so bewirkt seine Steifigkeit, dass er in seinem obersten Theil vertical bleibt und die Bewegung um einen tieferen Punkt stattfindet, dessen Entfernung von dem oberen Ende von der Dicke und Substanz des Pendelfadens, vielleicht auch von der Schwingungsweite des Pendels abhängt. Diese Thatsachen hat Borda festgestellt und demgemäss bei seinen Pendelbeobachtungen die Bewegung um eine Schneide, die auf horizontalen Lagern auflag, stattfinden lassen. Um sicher zu sein, dass das sonach aus Schneide, Faden und Kugel bestehende Pendel wie ein starrer Körper schwang, gab er der Schneide eine solche Einrichtung, dass sie für sich allein ein Pendelchen nahe mit derselben Periode, wie das ganze Pendel, darstellte. Dies ist nach (74) bei beliebig kleinem Trägheitsmoment durch Wahl des Schwerpunktsabstandes jederzeit zu erreichen. Eine gleiche Einrichtung ist von späteren Beobachtern benutzt worden.

Indessen bietet auch sie eine Unsicherheit dar, denn, wie Laplace zuerst hervorgehoben hat, liegt, falls die Schneide keine absolut scharfe ist, die Drehungsaxe nicht in der Ebene des Lagers, sondern etwas darunter.

Thomas Young hat darauf hingewiesen, dass, falls das Pendel sich um einen feinen Kreiscylinder dreht, der auf einer horizontalen Unterlage rollt, die vom Schwerpunkt beschriebene Trochoide in dessen tiefster Lage einen Krümmungsmittelpunkt besitze, der um die Länge des Cylinderradius unterhalb des Lagers liegt. Hieraus folgt für ein nahezu einfaches ebenso aufgehängtes Pendel, dass die wahre Pendellänge um den gleichen Betrag kürzer ist, als der Abstand des schweren Punktes von dem Lager.

Indess wollen wir uns mit diesem speciellen Resultat nicht be-

gnügen, sondern einer späteren Anwendung wegen die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels bestimmen, das mit einer cylindrischen Axe auf einer ebenen Unterlage ohne zu gleiten rollt. (Fig. 24.)

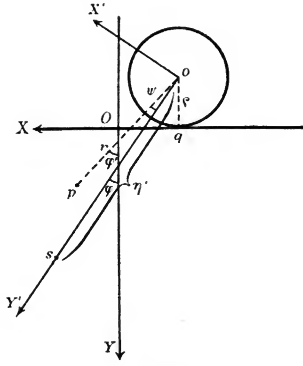


Fig. 24.

Sei ϱ der Radius des Kreiscylinders; das Loth η' von dem Schwerpunkt s des Pendels auf seine Axe schliesse mit der nach unten positiven Y-Axe den Winkel φ ein, der Radiusvector r von einem beliebigen andern Punkte p des Pendels den Winkel φ'; $\varphi' - \varphi$ sei $= \psi$.

Wir wenden dann nach § 15 des ersten Theiles die Gleichung für die lebendige Kraft Ψ in der Form an

$$d\Psi + d\Phi = dA,$$

worin dA die Arbeit der Schwere bezeichnet, und $d\Phi$, die Aenderung des innern Potentiales, wegen der Starrheit des Körpers verschwindet; demgemäss haben wir, auf die Zeiteinheit bezogen:

$$\frac{d}{dt}\left(\int \frac{V^2}{2}\,dm\right) = g\int \frac{dy}{dt}\,dm = g\,\frac{d}{dt}\left(\int y\,dm\right). \tag{79}$$

Nun ist nach der Figur:

$$x = x_0 + \varrho\varphi' - r\sin\varphi', \qquad y = r\cos\varphi' - \varrho,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = (\varrho - r\cos\varphi')\frac{d\varphi'}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = -r\sin\varphi'\frac{d\varphi'}{dt},$$

$$V^2 = (\varrho^2 - 2r\varrho\cos\varphi' + r^2)\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2.$$

Hierin ist $\varphi' = \varphi + \psi$, wo ψ sich mit der Zeit nicht ändert; $r\sin\psi = x'$, $r\cos\psi = y'$ sind die Coordinaten von p in Bezug auf das im Körper feste System $X'Y'$. Daher giebt die Gleichung (79):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\int dm\,(\varrho^2 + r^2 - 2\varrho\,(y'\cos\varphi - x'\sin\varphi))\right]&\\ = 2g\frac{d}{dt}\int dm\,(y'\cos\varphi - x'\sin\varphi - \varrho).&\end{aligned} \tag{79'}$$

Nun ist aber:

$$\int y'\,dm = M\eta', \qquad \int x'\,dm = 0, \qquad \int r^2\,dm = M(\varkappa^2 + \eta'^2),$$

falls η' die Schwerpunktscoordinate, $\varkappa$ den Trägheitsradius des Pendels in Bezug auf die zur Cylinderaxe parallele durch den Schwerpunkt bezeichnet; daher erhalten wir nach ausgeführter Integration:

$$M(\varkappa^2 + \eta'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\eta'\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C + 2Mg\eta'\cos\varphi$$

oder, falls für $\varphi = \Phi$ die Geschwindigkeit $d\varphi/dt$ verschwindet, auch

$$M(\varkappa^2 + \eta'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\eta'\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2Mg\eta'(\cos\varphi - \cos\Phi). \quad (80)$$

Beschränken wir uns auf so kleine Amplituden, dass in den Gliedern, die in Bezug auf ϱ erster Ordnung sind, $\frac{1}{2}\varphi^2$ neben 1 vernachlässigt werden kann, so ist links $\cos\varphi$ mit 1 zu vertauschen. Wollen wir ferner den Schwerpunktsabstand s von der in der Ruhe tiefsten Stelle des Cylinders einführen, so haben wir

$$\eta' = s + \varrho$$

zu setzen und erhalten so:

$$M(\varkappa^2 + s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathsf{M}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2Mg(s+\varrho)(\cos\varphi - \cos\Phi). \quad (80')$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der für ein um eine Linie drehbares Pendel erhaltenen (72′) überein, nur steht hier rechts $(s + \varrho)$ an Stelle von s dort. Es ergiebt sich daher der Satz:

Ein zusammengesetztes Pendel, welches mit einem Kreiscylinder vom Radius ϱ als Axe auf einer horizontalen, ebenen Unterlage rollt, besitzt bei Schwingungsamplituden Φ, welche so klein sind, dass $\varrho\Phi^2$ neben l vernachlässigt werden kann, dieselbe Schwingungsdauer, wie ein einfaches Pendel von der Länge

$$l = \frac{\varkappa^2 + s^2}{s + \varrho}; \quad (80'')$$

hierin ist s der Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der ebenen Unterlage für den Fall der Ruhe.

Ist ϱ neben s sehr klein, wie dies bei den Anwendungen stets stattfindet, so ergiebt sich bei Beschränkung auf die erste Ordnung:

$$l = l_0\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right), \quad (80''')$$

worin l_0 der für $\varrho = 0$ stattfindende Werth von l ist.

Für ein einfaches Pendel ist $s = l_0$, also $l = l_0 - \varrho$; es bestätigt sich damit also das von Th. Young gegebene Resultat.

Da die Schwingungsweite als sehr klein vorausgesetzt ist, so behält das abgeleitete Resultat seine Gültigkeit auch für den Fall, dass der Querschnitt des Cylinders andere als kreisförmige Form besitzt; ϱ bedeutet dann den Krümmungsradius an der Stelle, welche beim Ruhezustand auf der Unterlage aufliegt. Eine allgemeine Untersuchung dieses Einflusses auch für grössere Amplituden ist von Bessel angestellt worden.

Die Einflüsse der Aufhängungsart auf die Pendelschwingungen lassen sich aber nicht mit Sicherheit durch blosse theoretische Betrachtungen bestimmen — ϱ ist z. B. nicht messbar — deshalb hat Bessel eine Anordnung des Experiments erfunden, welche die Elimination derselben durch die Combination verschiedener Beobachtungen gestattet und zugleich neben anderen den Vortheil bietet, die an sich schwierige Bestimmung der „Pendellänge" (für das Fadenpendel die Grösse $R + L$) bis zu einem gewissen Grade zu umgehen.

Er operirte mit zwei Fadenpendeln, welche dieselben Aufhängungen und Kugeln benutzten, aber gesammte Längen besassen, welche sich um einen nur sehr wenig von einer Toise verschiedenen und daher sehr genau messbaren Betrag unterschieden. Es galt für die Länge l des mit einem gegebenen Fadenpendel gleich schwingenden einfachen Pendels die Formel (78'), die bei Einführung der Schwingungsdauer T sich schreibt:

$$g\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 = l = L + R + \frac{2}{5}\frac{R^2}{L+R} - \frac{Lm'}{6m};$$

hierin folgen einander die Glieder rechts nach ihrer Grössenordnung. Auf zwei Beobachtungen mit verschiedenen Längen angewandt ergiebt sie:

$$g\,\frac{T_1^2 - T_2^2}{\pi^2} = (L_1 - L_2) + \frac{2}{5}R^2\left(\frac{1}{L_1+R} - \frac{1}{L_2+R}\right) - \frac{L_1 m_1' - L_2 m_2'}{6m}.$$

Aus dem höchsten Gliede ist, wenn die Amplituden bei beiden Beobachtungen entweder gleich oder hinreichend klein sind, der Einfluss der Aufhängung beseitigt, der z. B. für den Fall der Benutzung einer Schneide hier darin besteht, dass die in Rechnung zu ziehenden L_1 und L_2 um den Krümmungsradius der Abstumpfung von den gemessenen verschieden sind. $L_1 - L_2$ ist zugleich die gesammte gemessene Längendifferenz, wenn die Kugel bei beiden Beobachtungen die gleiche Lage behalten hat, also nicht gedreht ist.

Das zweite Glied mit R ist völlig verschwunden, der Kugelradius tritt daher erst im dritten und demgemäss mit geringerem Einfluss auf, in ebendemselben auch die absoluten Längen L_1 und L_2, die also mit geringerer Sicherheit bekannt zu sein brauchen.

Da die Aufhängung durch Einklemmung des Pendelfadens oder durch Befestigung an einer Schneide nicht die Garantie vollkommener Unveränderlichkeit bietet, insofern die Einklemmung bei dem langen und dem kurzen Pendel in verschiedener Weise, z. B. mit verschiedener Kraft, geschehen kann, und die Schneide der Abnutzung ausgesetzt ist, liess Bessel den Pendelfaden sich von einem Kreiscylinder von geringem Radius abwickeln.

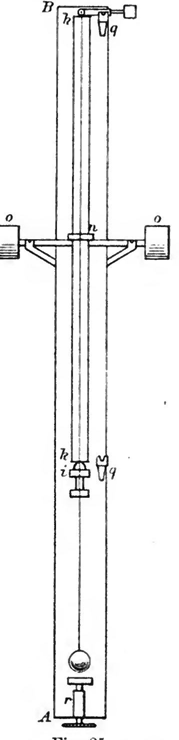


Fig. 25.

Ueber die gesammte Anordnung des Apparates sei nur Folgendes gesagt. Auf einer verticalen eisernen Schiene AB (Fig. 25) befand sich, etwa um ein Drittel der ganzen Länge vom untern Ende entfernt, ein fester Ansatz i mit horizontaler oberer Fläche, auf welche die Toise kk gestellt werden konnte; der Druck auf i und zugleich die Längenänderung, welche die Toise in Folge der Schwere erleiden würde, war dadurch aufgehoben, dass sie in ihrer Mitte bei n durch eine ihrem Gewicht nahe gleiche Kraft nach oben gezogen wurde.

Zwei Gabeln qq, die ebenfalls auf der eisernen Schiene AB befestigt waren, nahmen die Aufhängevorrichtung der Pendel auf, die mit einem Ansatz das eine Mal auf der obern Fläche von i, das andere Mal auf dem obern Querschnitt der Toise ruhte. Dadurch war erreicht, dass die obern Enden der Pendel genau um die Länge der Toise von einander entfernt angebracht waren. Die Lage des tiefsten Punktes der Pendelkugel wurde mit der am untern Ende der Schiene angebrachten Mikrometerschraube r nebst Fühlhebelvorrichtung bestimmt und dadurch zugleich gefunden, um wieviel die Längendifferenz des kurzen und des langen Pendels von einer Toise abweicht. Die Wirkung des Druckes des Fühlhebels auf die Längenmessung wurde in Rechnung gezogen, ebenso die Temperatur der einzelnen Theile.

Um alles zu dem hier besprochenen Problem Gehörige zu erledigen, wollen wir noch erörtern, in welcher Weise die Luft, innerhalb deren die Bewegung des beobachteten Pendels der Regel nach stattfindet, auf die Beobachtungen Einfluss hat. Ihre Wirkung ist eine dreifache.

Erstens übt, wie wir im nächsten Theile ableiten werden, eine jede ruhende schwere Flüssigkeit auf einen in ihr befindlichen Körper einen Auftrieb aus, d. h. eine vertical nach oben gerichtete Kraft, welche gleich ist dem Gewicht der von jenem verdrängten Flüssigkeitsmasse und in deren Schwerpunkt, im Falle einer homogenen Flüssigkeit also im Schwerpunkt des Körpervolumens, angreift.

In Folge dieses Auftriebes wird in unserer Ausgangsgleichung (72) der Werth des ausgeübten Drehungsmomentes geändert. Ist das Pendel soweit symmetrisch, dass der Schwerpunkt seines Volumens in dieselbe Ebene fällt, welche die Axe und den Schwerpunkt seiner Masse enthält, und ist sein Abstand von der Axe s', die verdrängte (homogene) Flüssigkeitsmasse M', so wird:

$$N = -(Ms - M's')g \sin\varphi . \tag{81}$$

Hieraus folgt die Länge des gleichschwingenden einfachen Pendels nunmehr:

$$l = \frac{\varkappa^2 + s^2}{s\left(1 - \frac{M'}{M}\frac{s'}{s}\right)} . \tag{81'}$$

Ist das Pendel als homogen anzusehen, wie dies bei Fadenpendeln immer erlaubt ist, so ist $s = s'$, und M/M' ist gleich dem Verhältniss der Dichtigkeiten ε/ε'; daraus folgt:

$$l = \frac{\varkappa^2 + s^2}{s\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)} . \tag{81''}$$

In diesem Falle tritt also in Formel (72) einfach $g(1 - \varepsilon'/\varepsilon)$ an die Stelle von g, und es wird daher auch die corrigirte Schwingungsdauer:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Msg\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}} ; \tag{81'''}$$

der hydrostatische Einfluss der umgebenden Luft ist also leicht in Rechnung zu ziehen.

Zweitens setzt die Luft dem bewegten Pendel einen Widerstand entgegen, den man bei kleinen Amplituden der Geschwindigkeit proportional setzen kann, und der also zu dem Moment N ein Glied von der Form $-Q\,d\varphi/dt$ hinzugiebt. Wir haben den directen Einfluss eines solchen auf die Schwingungsdauer im vorigen Abschnitt untersucht und gefunden, dass er zweiter Ordnung und daher zumeist zu vernachlässigen ist; der indirecte, den er durch Veränderung der Amplituden ausübt, wird durch die Beobachtung der letzteren in der oben (p. 210) angegebenen Weise berücksichtigt.

Drittens bewirkt die vom Pendel in Bewegung gesetzte und mitgeführte Luft eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes der bewegten Masse. Eine strenge Theorie dieses Einflusses bietet namentlich für den practisch wichtigen Fall eines ziemlich eng begrenzten Luftvolumens, innerhalb dessen die Kugel oscillirt, grosse Schwierigkeit; Bessel, der ihn experimentell nachgewiesen hat, benutzte daher zu seiner Bestimmung und Elimination das angenäherte Verfahren, dem Trägheitsmoment des Pendels ein Glied $\mu \varkappa'^2$ als Correction zuzufügen, welches von der Gestalt des Pendels und der Dichte des umgebenden Mediums abhängen muss, und dasselbe durch Variation der Umstände der Beobachtungen zu bestimmen.

Aus der sonach von ihm aufgestellten Formel:

$$l = \frac{s^2 + \varkappa^2 + \frac{\mu}{M}\varkappa'^2}{s\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)} = \frac{s + \frac{\varkappa^2}{s} + \frac{\mu \varkappa'^2}{Ms}}{1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \tag{82}$$

folgt, dass das Glied mit $\varkappa'^2$ sich ermitteln lässt, wenn man der Pendelkugel bei gleicher Grösse verschiedene Dichtigkeit und demgemäss verschiedene Masse M giebt.

In der That hat Bessel so durch Benutzung zweier Kugeln aus Messing und Elfenbein diesen dritten Einfluss der Luft bestimmt und eliminirt.

II. Reversionspendel.

Die zweite Anordnung, die man getroffen hat, um die Schwierigkeiten, welche die directe Bestimmung von Trägheitsmoment und Schwerpunktsabstand bringt, zu umgehen, basirt auf einem von Huyghens gegebenen Satz über die gegenseitige Lage solcher paralleler Drehungsaxen, um welche ein starrer Körper unter Wirkung der Schwere gleiche Schwingungsdauer besitzt.

Die Formel (74'):

$$\frac{\varkappa^2 + s^2}{s} = l, \tag{83}$$

in welcher l die Länge des mit dem Körper gleichschwingenden einfachen Pendels angiebt, zeigt zunächst, dass l und somit die Schwingungsdauer dieselbe ist für alle parallelen Axen, welche den gleichen Abstand s vom Schwerpunkt haben, welche also einen Kreiscylinder erfüllen, auf dessen Axe der Schwerpunkt liegt.

Ferner ergiebt sie aber auch, da sie in Bezug auf s quadratisch ist, dass zu jedem Werthe l oder zu jeder gegebenen Schwingungsdauer T im Allgemeinen zwei Werthe von s, also auch zwei Systeme von

Drehungsaxen, die je einen Cylinder erfüllen, gehören; und zwar finden sich diese beiden Werthe s gegeben durch:

$$s = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \varkappa^2}. \qquad (83')$$

Beide sind also reell und verschieden nur dann, wenn $l^2 > 4\varkappa^2$ ist; die von einem gegebenen Körper geforderten Schwingungsdauern dürfen daher einen gewissen kleinsten Werth $T^2_{\min} = 2\pi\varkappa/g$, die entsprechende einfache Pendellänge die Grösse des doppelten Trägheitsradius $l_{\min} = 2\varkappa$ in Bezug auf eine parallele Axe durch den Schwerpunkt nicht unterschreiten, wenn eine reelle Lösung möglich sein soll.

Ist diese Bedingung aber erfüllt, so geben sich zu jedem l zwei Werthe von s, über welche nach Formel (83') der Satz gilt:

Schwingt ein Körper um zwei parallele Axen, welche verschieden weit von seinem Schwerpunkt abstehen, gleich schnell, so ist die Summe ihrer Schwerpunktsabstände gleich der Länge des entsprechenden einfachen Pendels:

$$s_1 + s_2 = l.$$

Zugleich sieht man, dass die eine dieser beiden Axen immer innerhalb, die andere ausserhalb des Abstandes $s = \varkappa$ liegt. Unendlicher Schwingungsdauer entspricht $s = 0$ und $s = \infty$. Construirt man in einem SL-Coordinatensystem die durch (83) gegebene Curve, so erhält man eine Hyperbel, deren Centrum der Coordinatenanfang und deren Asymptoten die Gerade $s = l$ und die L-Axe bilden; ergänzt man die Figur durch ihr Spiegelbild in Bezug auf die L-Axe, so sagt der Satz aus, dass jedes Punktpaar b und c mit gleichen Ordinaten $\overline{ab} = \overline{dc} = l$ einen Abstand $\overline{cb} = l$ haben muss. Die Figur 26 giebt zugleich Aufklärung über die Art, wie an verschiedenen Stellen l mit einer Aenderung von s variirt.

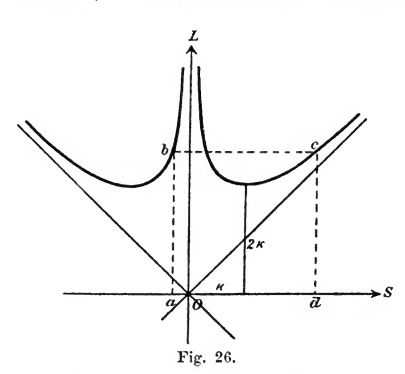


Fig. 26.

Der vorstehende Satz enthält die Theorie des durch **Bohnenberger** und später unabhängig von ihm durch **Kater** erfundenen Reversionspendels. Dasselbe ist ein zusammengesetztes Pendel, an welchem zwei

parallele Axen, deren Ebene den Schwerpunkt zwischen den Axen enthält, so angebracht sind, dass das Pendel um beide mit gleicher Periode schwingt. Nach dem gefundenen Satze ist dann der Abstand beider Axen L unmittelbar gleich der Länge des gleichschwingenden einfachen Pendels, also:

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes und des Schwerpunktsabstandes ist hier also vollständig vermieden.

Von Fehlerquellen ist zunächst die Abweichung der Axenrichtungen vom Parallelismus zu nennen, die man durch mit den Axenschneiden in Verbindung gebrachte Spiegelvorrichtungen mit grosser Genauigkeit prüfen und demgemäss berichtigen kann; ferner die Abweichung des Schwerpunktes aus der Ebene der Schneiden, die man ebenfalls leicht experimentell constatiren und hinlänglich beseitigen kann, da sie nur angenähert erfüllt zu sein braucht. Ist nämlich die Abweichung gleich λ, so ist gemessen

$$L = \sqrt{l_1^2 - \lambda^2} + \sqrt{l_2^2 - \lambda^2},$$

die entsprechende einfache Pendellänge ist aber $l = l_1 + l_2$; es genügt also zur Uebereinstimmung, wenn λ^2 neben l_1^2 und l_2^2 zu vernachlässigen ist.

Wichtiger ist hier wieder die durch directe Beobachtung nicht messbare Abstumpfung der Axenschneiden; ist dieselbe für die beiden Axen durch die resp. Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 gegeben, so ist für beide die Länge des gleichschwingenden einfachen Pendels nach (80‴) gegeben durch:

$$l_1 = \left(\frac{\varkappa^2}{s_1} + s_1\right)\left(1 - \frac{\varrho_1}{s_1}\right), \qquad l_2 = \left(\frac{\varkappa^2}{s_2} + s_2\right)\left(1 - \frac{\varrho_2}{s_2}\right). \tag{84}$$

Da die Schwingungsdauern für beide Axen gleich sind, so ist $l_1 = l_2 = l$, also wenn man in dem sehr kleinen mit ϱ proportionalen Gliede $(\varkappa^2 + s_1^2)/s_1 = (\varkappa^2 + s_2^2)/s_2 = L$ setzt, d. h. dort den Einfluss der Krümmung ignorirt:

$$l(s_1 - s_2) = (s_1^2 - s_2^2) - L(\varrho_1 - \varrho_2),$$

daher, weil $s_1 + s_2$ die direct gemessene Länge L ist:

$$l = L - \frac{L}{s_1 - s_2}(\varrho_1 - \varrho_2). \tag{84'}$$

Diese Formel zeigt, dass der Einfluss der Krümmung der Schneiden auf die Messung verschwindet, wenn beide Schneiden gleiche Krümmung besitzen, also $\varrho_1 = \varrho_2$ ist. Dies ist zwar von vorn herein anzunehmen nicht erlaubt; man kann aber nach Bessel auch im allgemeinen Falle

sich von dem mit $(\varrho_1 - \varrho_2)$ proportionalen Gliede befreien, wenn man die Schneiden vertauscht und das Pendel von Neuem so justirt, dass es um beide Schneiden gleiche Schwingungsdauer besitzt. Dann ist nämlich

$$l' = L' - \frac{L'}{s_1 - s_2}(\varrho_2 - \varrho_1); \tag{84''}$$

im zweiten, kleinen Gliede kann aber L' mit L vertauscht werden, und es entsteht daher durch Addition der letzten beiden Formeln die von den ϱ_1, ϱ_2 freie Beziehung

$$l + l' = L + L' = g\frac{T^2 + T'^2}{\pi^2}, \tag{84'''}$$

welche die Bestimmung von g gestattet.

Was das Justiren des Reversionspendels anbelangt, so ist dasselbe in vollständig genauer Weise sehr umständlich und mühsam. Man kann aber, wenn die Justirung soweit ausgeführt ist, dass die um beide Schneiden beobachteten und auf unendlich kleine Amplituden reducirten Schwingungsdauern nur noch eine geringe Differenz $T_1 - T_2 > 0$ zeigen, aus dieser Differenz selbst die Correction berechnen, die man dem gemessenen Schneidenabstand L hinzuzufügen hat, um die Länge l zu erhalten, welche der aus $T^2 = (T_1^2 + T_2^2)/2$ folgenden mittlern Schwingungsdauer T entspricht. Seien

$$l_1 = g\frac{T_1^2}{\pi^2} = \frac{\varkappa^2 + s_1^2}{s_1}, \qquad l_2 = g\frac{T_2^2}{\pi^2} = \frac{\varkappa^2 + s_2^2}{s_2} \tag{85}$$

die den beobachteten Zeiten T_1, T_2 entsprechenden Längen. Wir denken uns s_1 um δ_1, s_2 um δ_2 vergrössert; dadurch mag l_1 um $-\delta$, l_2 um $+\delta$ so geändert werden, dass $l_1 - \delta = l_2 + \delta = l$ wird. $\delta_1 + \delta_2$ ist dann offenbar die zu L zu fügende Correction $\varDelta$; weiter ist

$$\frac{2\delta\pi^2}{g} = \frac{(l_1 - l_2)\pi^2}{g} = T_1^2 - T_2^2 \tag{85'}$$

die Differenz der beobachteten Schwingungsdauerquadrate und

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} = g\frac{(T_1^2 + T_2^2)}{2\pi^2} = g\frac{T^2}{\pi^2} \tag{85''}$$

die der mittlern Schwingungsdauer entsprechende einfache Pendellänge. Wir erhalten aus (85)

$$\frac{\varkappa^2 + s_1^2 + 2\delta_1 s_1}{s_1 + \delta_1} = l_1 - \delta, \qquad \frac{\varkappa^2 + s_2^2 + 2\delta_2 s_2}{s_2 + \delta_2} = l_2 + \delta$$

und unter Vernachlässigung der zweiten Ordnung in Bezug auf δ_1 und δ_2:

$$\frac{s_1^2 - \varkappa^2}{s_1^2}\delta_1 = -\delta, \qquad \frac{s_2^2 - \varkappa^2}{s_2^2}\delta_2 = +\delta,$$

also

$$\delta_1 + \delta_2 = \varDelta = \delta\left(\frac{s_2^2}{s_2^2 - \varkappa^2} - \frac{s_1^2}{s_1^2 - \varkappa^2}\right). \tag{86}$$

In dieser Correction kann man die angenäherte Relation:

$$L = \frac{x^2 + s_1^2}{s_1} = \frac{x^2 + s_2^2}{s_2}$$

benutzen, um x^2 zu eliminiren, und erhält dann, wenn man zugleich den Werth $L = s_1 + s_2$ und die Annäherung $L\pi^2 = g(T_1^2 + T_2^2)/2$ einführt:

$$\varDelta = \frac{L^2}{s_2 - s_1} \cdot \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}, \tag{86}$$

und damit die an L anzubringende Correction in den direct gemessenen Grössen L, T_1, T_2 und den am Pendel durch eine Hülfsbeobachtung leicht ein für alle mal zu bestimmenden s_1 und s_2 gegeben.

Es erübrigt noch, von dem Einfluss der Luft auf das Reversionspendel zu sprechen.

Unter Rücksicht auf die hydrostatische Wirkung giebt die oben ganz allgemein gefundene Formel (81′) als Bedingung gleicher Schwingungsdauer um beide Schneiden:

$$l = \frac{x^2 + s_1^2}{s_1\left(1 - \frac{M's_1'}{Ms_1}\right)} = \frac{x^2 + s_2^2}{s_2\left(1 - \frac{M's_2'}{Ms_2}\right)}, \tag{87}$$

oder

$$l\left(s_1 - \frac{M'}{M}s_1'\right) = x^2 + s_1^2, \qquad l\left(s_2 - \frac{M'}{M}s_2'\right) = x^2 + s_2^2. \tag{87'}$$

Man sieht sogleich, dass, wenn $s_1' = s_2'$ ist, d. h. der Schwerpunkt des Volumens in die Mitte zwischen beide Schneiden fällt, die Differenz beider Formeln ergiebt:

$$l = s_1 + s_2;$$

es ist dann also in der Luft dieselbe Beziehung gültig, wie im leeren Raume, dass nämlich der gemessene Abstand zwischen beiden Schneiden die der beobachteten Schwingungsdauer entsprechende einfache Pendellänge für das Vacuum ist.

Der Luftwiderstand, d. h. die Kraft, welche das Pendel in seiner Bewegung durch die Luft erleidet, ist auf die Schwingungsdauer direct nur in einem Gliede zweiter Ordnung von Einfluss; seine indirecte Wirkung wird durch die Beobachtung der Schwingungsamplituden berücksichtigt.

Die Vermehrung des Trägheitsmomentes in Folge der in Bewegung gesetzten Luftmasse giebt in den letzten Formeln (87′) ein zu x^2 hinzutretendes Glied von der Form $\mu x'^2/M$, welches für die Schwingung um beide Schneiden den gleichen Werth hat und deshalb aus der Differenz der beiden Formeln (87′) verschwindet, wenn das Pendel symmetrische Form besitzt; denn dann geschieht die Bewegung der Luft in beiden Fällen in gleicher Weise.

Durch die von Bessel vorgeschlagene symmetrische Construction ist man also des Anbringens irgend einer Correction wegen der Wirkung der Luft vollständig enthoben. —

Im Vorstehenden sind die Mittel besprochen, um durch Pendelbeobachtungen den Werth der Schwerebeschleunigung g an der Beobachtungsstelle zu bestimmen; nach welchen Gesetzen diese Grösse auf der Erde von Ort zu Ort variirt, wird im letzten Abschnitt dieses Theiles erörtert werden.

§ 23. Rotation eines Körpers um einen festen Punkt.

Die Gleichungen (34) werden, für den Fall, dass der Coordinatenanfang des im Körper festen Systemes mit dem des absolut festen zusammenfällt, also $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ist, und man aus den Kraftcomponenten die Reactionen des festgehaltenen Punktes X', Y', Z' aussondert, folgende Gestalt annehmen:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d}{dt}(\zeta\mu' - \eta\nu') &= X' + \sum_h X_h,\\
m\frac{d}{dt}(\xi\nu' - \zeta\lambda') &= Y' + \sum_h Y_h,\\
m\frac{d}{dt}(\eta\lambda' - \xi\mu') &= Z' + \sum_h Z_h,
\end{aligned}
\qquad (88)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\lambda'\Xi + \mu'\mathrm{Z}' + \nu'\mathrm{H}') &= \sum_h (y_h Z_h - z_h Y_h) = L,\\
\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{Z}' + \mu'\mathrm{H} + \nu'\Xi') &= \sum_h (z_h X_h - x_h Z_h) = M,\\
\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{H}' + \mu'\Xi' + \nu'\mathrm{Z}) &= \sum_h (x_h Y_h - y_h X_h) = N.
\end{aligned}
$$

Die ersten drei Gleichungen bestimmen den Druck gegen den festen Punkt, die letzten die Bewegung des Körpers; sie allein sind für uns von Interesse.

In ihnen hängen die durch (35) definirten Trägheits- und Deviationsmomente Ξ, H, Z und Ξ', H', Z' noch von der Zeit ab. Die in ihnen lineären Aggregate $(\lambda'\Xi + \mu'\mathrm{Z}' + \nu'\mathrm{H}')$ u. s. f. sind, wie die Vergleichung der Formeln (88) mit (102) im ersten Theil erkennen lässt, das Doppelte jener in den Flächensätzen auftretenden Integrale über alle Massenelemente des Systemes, ein jedes multiplicirt mit seiner Flächengeschwindigkeit in Bezug auf eine Coordinatenebene, die wir kurz das Flächenmoment um die X-, Y-, Z-Coordinatenaxe genannt haben.

Das XYZ-Coordinatensystem ist hierbei ganz beliebig, muss aber im Raume fest sein. Wir wollen statt dessen ein mit dem Körper

bewegtes ABC einführen, und zwar mögen seine Axen in die Hauptträgheitsaxen des Körpers durch den festen Punkt fallen. Ihre Lage sei, wie früher, definirt durch die Gleichungen:

$$x = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3,$$
$$y = a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3,$$
$$z = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3.$$

Die Componenten der Drehungsgeschwindigkeiten um diese Axen bezeichnen wir, wie in § 16 und 17, mit α', β', γ', die Drehungsmomente mit F, G, H; die Hauptträgheitsmomente seien wiederum A, B, Γ.

Dann erhält man durch einfache Anwendung der Formeln (13′), (21) und (37) aus (88) zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\alpha_1\alpha' + \mathsf{B}\,\alpha_2\beta' + \Gamma\alpha_3\gamma') &= F\alpha_1 + G\alpha_2 + H\alpha_3,\\
\frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\beta_1\alpha' + \mathsf{B}\,\beta_2\beta' + \Gamma\beta_3\gamma') &= F\beta_1 + G\beta_2 + H\beta_3,\\
\frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\gamma_1\alpha' + \mathsf{B}\,\gamma_2\beta' + \Gamma\gamma_3\gamma') &= F\gamma_1 + G\gamma_2 + H\gamma_3;
\end{aligned} \tag{88'}$$

fasst man diese Gleichungen resp. mit den Factoren α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 zusammen, so resultirt nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} + (\Gamma - \mathsf{B})\beta'\gamma' &= F,\\
\mathsf{B}\frac{d\beta'}{dt} + (\mathsf{A} - \Gamma)\gamma'\alpha' &= G,\\
\Gamma\frac{d\gamma'}{dt} + (\mathsf{B} - \mathsf{A})\alpha'\beta' &= H.
\end{aligned} \tag{89}$$

Diese Formeln sind ausserordentlich viel einfacher als die früheren, weil die A, B, Γ sich nicht mit der Zeit ändern. Da die Ausdrücke auf der linken Seite die doppelten Differentialquotienten nach der Zeit von den Flächenmomenten des starren Körpers um die im Raume beweglichen Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt darstellen, so sprechen die Gleichungen den folgenden Satz aus, der sich als eine directe Folgerung aus den auf p. 126 abgeleiteten Resultaten darstellt:

Für einen um einen festen Punkt drehbaren starren Körper sind die doppelten Flächenmomente um die Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt gleich den um dieselben Axen wirkenden Drehungsmomenten.

Die Gleichungen (89) lassen sich noch anders anschaulich deuten, wenn man die Componenten und Momente der Centrifugalkraft des rotirenden Körpers in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt in Betracht zieht.

Ist ω die Rotationsgeschwindigkeit um eine Axe, für welche α, β, γ die Richtungswinkel gegen die Hauptträgheitsaxen A, B, C sind,

so wird ein Massenelement dm an der Stelle a, b, c in der Entfernung r von dieser Axe eine Centrifugalkraft $\omega^2 r\, dm$ in der Richtung von r ausüben; dieselbe ergiebt die Componenten:

$$\omega^2 r \cos\varphi\, dm, \qquad \omega^2 r \cos\psi\, dm, \qquad \omega^2 r \cos\chi\, dm$$

parallel den Axen A, B, C, falls φ, ψ, χ die Winkel von r gegen diese Axen sind.

Hieraus folgt für die Gesammtcomponenten und Momente der Centrifugalkraft das System von Werthen:

$$\begin{aligned}
(A) &= \omega^2 \int r \cos\varphi\, dm, & (F) &= \omega^2 \int r(b\cos\chi - c\cos\psi)\, dm,\\
(B) &= \omega^2 \int r \cos\psi\, dm, & (G) &= \omega^2 \int r(c\cos\varphi - a\cos\chi)\, dm, \qquad (89')\\
(C) &= \omega^2 \int r \cos\chi\, dm, & (H) &= \omega^2 \int r(a\cos\psi - b\cos\varphi)\, dm.
\end{aligned}$$

Nun bestimmt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung

$$\begin{aligned}
r\cos\varphi &= a - (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\alpha,\\
r\cos\psi &= b - (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\beta,\\
r\cos\chi &= c - (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\gamma,
\end{aligned}$$

und es lassen sich daher die Componenten und Momente der Centrifugalkraft durch die Constanten des Körpers und die seiner Rotation leicht berechnen. Insbesondere nehmen unter der Voraussetzung, dass die Coordinatenaxen die Hauptträgheitsaxen für den festen Punkt sind, also

$$\int bc\, dm = \int ca\, dm = \int ab\, dm = 0$$

ist, die Momente sogleich folgende einfache Form an:

$$\begin{aligned}
(F) &= \omega^2 \cos\beta\cos\gamma \int (c^2 - b^2)\, dm,\\
(G) &= \omega^2 \cos\gamma\cos\alpha \int (a^2 - c^2)\, dm,\\
(H) &= \omega^2 \cos\alpha\cos\beta \int (b^2 - a^2)\, dm.
\end{aligned}$$

Nun sind aber

$$\omega\cos\alpha = \alpha', \qquad \omega\cos\beta = \beta', \qquad \omega\cos\gamma = \gamma'$$

die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen A, B, C und die Integrale drücken sich leicht durch die Hauptträgheitsmomente $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ aus, sodass resultirt:

$$\begin{aligned}
(F) &= \beta'\gamma'(\mathsf{B} - \Gamma),\\
(G) &= \gamma'\alpha'(\Gamma - \mathsf{A}), \qquad (89'')\\
(H) &= \alpha'\beta'(\mathsf{A} - \mathsf{B}).
\end{aligned}$$

Hiernach kann man die Gleichungen (89) auch schreiben:

$$\mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} = F + (F), \qquad \mathsf{B}\frac{d\beta'}{dt} = G + (G), \qquad \Gamma\frac{d\gamma'}{dt} = H + (H), \qquad (89''')$$

wodurch der Satz erwiesen ist:

Die Rotationen um die Hauptträgheitsaxen eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers finden in jedem Augenblick ebenso statt, als wären die betreffenden Axen einzeln festgehalten und wirkte ausser dem äussern Moment um sie noch dasjenige der Centrifugalkräfte des bewegten Körpers.

Endlich sprechen wir noch eine Bemerkung aus, welche die Betrachtung der Formeln (89) sogleich als richtig erweist:

Die Bewegung zweier verschiedener starrer Körper um je einen festen Punkt findet in völlig gleicher Weise statt, wenn beide in Bezug auf jene Punkte gleiche Hauptträgheitsmomente besitzen, gleiche Drehungsmomente um die entsprechenden Hauptträgheitsaxen erfahren und in gleichen Anfangslagen derselben gleiche Anfangsrotationsgeschwindigkeiten mitgetheilt erhalten haben. —

Sind zu irgend einer Zeit zwei von den Rotationsgeschwindigkeiten α', β', γ' um die Hauptträgheitsaxen gleich Null, so nehmen für diesen Moment die Gleichungen (89) die Gestalt an:

$$\mathsf{A}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 = F, \qquad \mathsf{B}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right)_0 = G, \qquad \Gamma\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)_0 = H.$$

Wirken keine äussern Kräfte, so behalten also die Rotationscomponenten ihre Werthe dauernd bei; die Hauptträgheitsaxen sind in diesem Falle gemäss dem auf p. 192 gegebenen Satz permanente Drehungsaxen des in einem Punkt unterstützten Körpers, sie hören aber auf es zu sein, sowie der Körper äussere Einwirkungen erfährt.

Ist zu irgend einer Zeit eine dieser Rotationscomponenten, z. B. α', gleich Null, so lauten die Gleichungen (89):

$$\mathsf{A}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 + (\Gamma - \mathsf{B})\beta_0'\gamma_0' = F, \qquad \mathsf{B}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right)_0 = G, \qquad \Gamma\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)_0 = H.$$

Wirken jetzt abermals keine äussern Kräfte, so behält α' und β' zunächst seinen Werth, γ' aber variirt, und zwar wird durch

$$\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)_0 = \frac{\mathsf{B} - \Gamma}{\mathsf{A}}\beta_0'\gamma_0'$$

Sinn und Grösse der um die C-Axe eintretenden Winkelbeschleunigung festgestellt.

Diese Formeln können zur Erklärung einer Erscheinung dienen, die man an gewissen kreiselartigen Apparaten wahrnimmt.

Unter einem Kreisel versteht man einen um einen Punkt seiner Axe drehbaren Rotationskörper; nach Symmetrie ist die Kreiselaxe eine Hauptträgheitsaxe — sie sei die C-Axe unseres ABC-Systemes — und jede zu ihr normale ist eine zweite Hauptträgheitsaxe, denn es ist $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Sei nun der Kreisel etwa zwischen zwei Spitzen derart in einem starren Ring befestigt, dass er sich gegen denselben nur um die C-Axe drehen kann, so können wir zu jedem Zeitmoment die ebenda in dem Kreisel normal zur C-Axe parallel oder senkrecht zur Ringebene liegenden Richtungen zur A- und B-Axe wählen und die letzten Formeln auf diese anwenden.

Man erkennt dann leicht Folgendes. Ist eine Rotation um die C-Axe nicht vorhanden, also $\gamma_0' = 0$, so wird eine mit der Hand hervorgebrachte Drehung des Ringes in seiner Ebene, d. h. eine Drehung des Körpers um die B-Axe, welche β_0' von Null verschieden sein lässt, keinerlei andere Drehungen hervorrufen, denn alle Rotationsbeschleunigungen bleiben gleich Null. Hat hingegen von Anfang γ_0' einen von Null verschiedenen Werth, so wird eine Drehung des Ringes in seiner Ebene eine Drehung des Kreisels um die in der Ringebene liegende A-Axe hervorrufen, welche sich vom rotirenden Körper, der diese Bewegung nur mit dem Ring ausführen kann, auf letzteren überträgt; der Ring wird daher der Drehung in seiner Ebene gleichsam widerstehen und seitwärts auszuweichen suchen.

Um die Ausweichung zu verhindern, muss man auf den Ring ein Moment um die in der Ringebene normal zur C- liegende A-Axe ausüben von der Grösse:

$$F = (\Gamma - \mathsf{B})\beta_0'\gamma_0'. \text{ —}$$

I. Wir wenden uns nun zur Integration der Gleichungen (89) für einen nach Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegebenen Körper unter der Voraussetzung, dass äussere Kräfte auf den Körper nicht wirken und er um einen beliebigen Punkt rotirt, oder dass er unter der Wirkung der Schwere steht und in seinem Schwerpunkt unterstützt ist.

In beiden Fällen werden die Drehungsmomente F, G, H gleich Null und die Gleichungen (89) lauten:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} &= \beta'\gamma'(\mathsf{B} - \Gamma), \\ \mathsf{B}\frac{d\beta'}{dt} &= \gamma'\alpha'(\Gamma - \mathsf{A}), \\ \Gamma\frac{d\gamma'}{dt} &= \alpha'\beta'(\mathsf{A} - \mathsf{B}); \end{aligned} \tag{90}$$

wir fügen hinzu das sich aus (88') ergebende System:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\alpha_1\alpha' + \mathsf{B}\,\alpha_2\beta' + \Gamma\,\alpha_3\gamma') &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\beta_1\alpha' + \mathsf{B}\,\beta_2\beta' + \Gamma\,\beta_3\gamma') &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\gamma_1\alpha' + \mathsf{B}\,\gamma_2\beta' + \Gamma\,\gamma_3\gamma') &= 0. \end{aligned} \tag{90'}$$

Aus (90) erhält man zwei integrable Combinationen durch die Factoren α', β', γ' und $A\alpha'$, $B\beta'$, $\Gamma\gamma'$; sie liefern:

$$A\,\alpha'^2 + B\,\beta'^2 + \Gamma\,\gamma'^2 = \Delta\,, \tag{91'}$$

$$A^2\alpha'^2 + B^2\beta'^2 + \Gamma^2\gamma'^2 = \Theta^2, \tag{91''}$$

während die Gleichungen (90') direct integrabel sind und führen auf:

$$\begin{aligned} A\,\alpha_1\alpha' + B\,\alpha_2\beta' + \Gamma\,\alpha_3\gamma' &= K_1\,,\\ A\,\beta_1\alpha' + B\,\beta_2\beta' + \Gamma\,\beta_3\gamma' &= K_2\,,\\ A\,\gamma_1\alpha' + B\,\gamma_2\beta' + \Gamma\,\gamma_3\gamma' &= K_3\,. \end{aligned} \tag{91'''}$$

Hierin sind Δ, Θ und die K_h Integrationsconstanten. Δ ist nothwendig stets positiv, Θ kann positiv oder negativ sein; die absolute Grösse beider ist im Allgemeinen willkürlich; aber man erkennt, dass, weil die linken Seiten der Gleichungen (91') und (91'') lauter positive Glieder enthalten, ihr Verhältniss innerhalb gewisser Grenzen liegen muss. Lässt man nämlich die α', β', γ' beliebig von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren, so bleibt, wenn $A \gtrless B \gtrless \Gamma$ ist, immer

$$A \gtrless \frac{\Theta^2}{\Delta} \gtrless \Gamma\,; \tag{91}$$

worin sich das obere oder das untere Zeichen überall entspricht.

Die K_h sind nicht sämmtlich unabhängig, sondern, da durch Summation der Quadrate der Gleichungen (91''') folgt

$$A^2\alpha'^2 + B^2\beta'^2 + \Gamma^2\gamma'^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2\,,$$

so verlangt (91''), dass

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \Theta^2 \tag{92}$$

ist.

Man erkennt sogleich, dass die Gleichungen (91'') und (91''') die Flächensätze für den um den festen Punkt rotirenden Körper aussprechen; Θ ist das doppelte resultirende Flächenmoment und

$$\frac{K_1}{\Theta} = \cos(\nu, x), \qquad \frac{K_2}{\Theta} = \cos(\nu, y), \qquad \frac{K_3}{\Theta} = \cos(\nu, z) \tag{92'}$$

sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale ν auf der invariabeln Ebene grössten Flächenmomentes mit der X-, Y- und Z-Axe einschliessen. Rechnen wir hierin und später Θ positiv, so ist die Richtung der Normalen ν so definirt, dass um sie das Flächenmoment einen positiven Werth hat, also die ganze Rotation in positivem Sinne stattfindet.

Die Formel (91') dagegen spricht den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft für den rotirenden Körper aus, wie aus der Vergleichung mit (44'') sogleich hervorgeht. Die Integrationsconstante Δ ist der doppelte Werth dieser constanten lebendigen Kraft Ψ selbst.

Verbindet man mit (91′) und (91″) den Werth der resultirenden Rotationsgeschwindigkeit ω nach der Beziehung

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \omega^2,$$

so lässt sich α', β', γ' durch ω ausdrücken und schreiben:

$$\begin{aligned} \alpha'^2 &= \frac{\Theta^2 - \Delta(\mathsf{B} + \Gamma) + \mathsf{B}\Gamma\omega^2}{(\mathsf{A} - \mathsf{B})(\mathsf{A} - \Gamma)}, \\ \beta'^2 &= \frac{\Theta^2 - \Delta(\Gamma + \mathsf{A}) + \Gamma\mathsf{A}\omega^2}{(\mathsf{B} - \Gamma)(\mathsf{B} - \mathsf{A})}, \\ \gamma'^2 &= \frac{\Theta^2 - \Delta(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{A}\mathsf{B}\omega^2}{(\Gamma - \mathsf{A})(\Gamma - \mathsf{B})}. \end{aligned} \tag{93}$$

Setzt man dies in eine der Formeln (90) ein, so resultirt eine Gleichung zwischen t und ω, welche integrirt lautet:

$$t + C = \int \frac{\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma\, d\omega}{\sqrt{-[\Theta^2 - \Delta(\mathsf{B}+\Gamma) + \mathsf{B}\Gamma r^2][\Theta^2 - \Delta(\Gamma+\mathsf{A}) + \Gamma\mathsf{A}\omega^2][\Theta^2 - \Delta(\mathsf{A}+\mathsf{B}) + \mathsf{A}\mathsf{B}\omega^2]}}. \tag{93′}$$

Sie führt, nach ω aufgelöst, auf elliptische Functionen; der dadurch erhaltene Werth, in (93) eingesetzt, bestimmt α', β', γ'.

Aus diesen folgen dann mit Hülfe der Formeln (91‴) die $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$, welche die Lage des Körpers zu beliebiger Zeit bestimmen.

Bis jetzt haben wir das absolut feste Coordinatensystem X, Y, Z vollständig willkürlich gelassen; die weiteren Betrachtungen vereinfachen sich aber, wenn wir über die eine, etwa die Z-Axe, in bestimmter Weise verfügen.

Durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sind die drei Constanten $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$ und demgemäss auch Θ vollständig bestimmt, denn die Gleichungen (91‴) gelten für jeden Moment, also auch für den Anfangszustand; wir können also für jedes specielle Problem die Lage der Normale $\boldsymbol{\nu}$ der invariabeln Ebene nach (92′) vollständig berechnen.

In die Richtung von $\boldsymbol{\nu}$ wollen wir die Z_0-Axe eines neuen Coordinatensystems X_0, Y_0, Z_0 hineingelegt und die Formeln (91‴) auf dieses Coordinatensystem transformirt denken. Sie nehmen dann die ursprüngliche Form wieder an, nur steht in den ersten beiden Gleichungen an Stelle von K_1 und K_2 Null, in der dritten an Stelle von K_3 aber Θ, denn es muss $\cos(\boldsymbol{\nu}, x_0) = 0$, $\cos(\boldsymbol{\nu}, y_0) = 0$, $\cos(\boldsymbol{\nu}, z_0) = 1$ werden. Mit den so erhaltenen Gleichungen wollen wir weiter rechnen, aber der Kürze halber die Indices $_0$ nicht in ihnen einführen.

Fasst man sie mit den Factoren $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ zusammen, so erhält man die Formeln:

$$\mathsf{A}\alpha' = \Theta\gamma_1, \qquad \mathsf{B}\beta' = \Theta\gamma_2, \qquad \Gamma\gamma' = \Theta\gamma_3. \tag{94}$$

Sie bestimmen ohne neue Integration für jeden Moment die Winkel zwischen den drei Hauptträgheitsaxen A, B, C und der positiven

Normale der invariabeln Ebene Z. Diese drei Winkel, die allerdings wegen der Relation

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

nicht unabhängig von einander sind, werden durch die Werthe der Anfangsgeschwindigkeiten vollständig gegeben und enthalten nur die durch (91'), (91'') und (93') eingeführten Integrationsconstanten Δ, Θ und C. Ihre Unabhängigkeit von der Anfangslage des Körpers erklärt sich dadurch, dass sie ja nicht gegen eine willkürliche, sondern eine durch eben jene Geschwindigkeiten erst bestimmte Richtung, nämlich die Normale ν, gerechnet werden.

Um noch eines der α_h, β_h, welches zur vollständigen Bestimmung der Lage des Körpers erforderlich ist, zu bestimmen, bedarf es noch einer Integration. Man bestimmt am bequemsten eines der Verhältnisse α_h/β_h, welche direct geometrische Bedeutung haben.

Bezeichnet man z. B. den Winkel zwischen der XZ-Ebene und der durch die Z- und die C-Axe gelegten mit φ, so ist

$$\frac{\beta_3}{\alpha_3} = \operatorname{tg}\varphi$$

und daher

$$d\varphi = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}. \tag{94'}$$

Unter Rücksicht auf (13'') und (5) erhält man hieraus leicht:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma_1 \alpha' + \gamma_2 \beta'}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \tag{94''}$$

und in Rücksicht auf (94)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mathsf{A}\,\alpha'^2 + \mathsf{B}\,\beta'^2}{\mathsf{A}^2\alpha'^2 + \mathsf{B}^2\beta'^2}\,\Theta. \tag{94'''}$$

Hierin sind α' und β' nach (93) und (93') bekannte Functionen von t; für φ ergeben sich elliptische Functionen der Zeit.

Wir beschränken uns weiter auf die Entwickelung derjenigen Gesetze für die Rotation um einen Punkt, welche mit elementaren Hülfsmitteln abzuleiten sind; dieselben beziehen sich vornehmlich auf die Grösse der Rotationsgeschwindigkeit und die Lage der augenblicklichen Rotationsaxe im Körper und im Raume.

Da der Körper uns nur durch sein Hauptträgheitsellipsoid um den festen Punkt gegeben ist, so hat die Betrachtung an dieses anzuknüpfen.

Seine Gleichung ist in Bezug auf das System A, B, C:

$$\mathsf{A}a^2 + \mathsf{B}b^2 + \Gamma c^2 = 1. \tag{95}$$

Die Richtung der augenblicklichen Drehungsaxe d gegen die Hauptträgheitsaxen ist gegeben durch

$$\cos(d,a) = \frac{\alpha'}{\omega}, \qquad \cos(d,b) = \frac{\beta'}{\omega}, \qquad \cos(d,c) = \frac{\gamma'}{\omega}.$$

Ein Radiusvector r ihr parallel durch den festen Punkt gelegt schneidet das Trägheitsellipsoid (95) in einem Punkt

$$a = \frac{r\alpha'}{\omega}, \qquad b = \frac{r\beta'}{\omega}, \qquad c = \frac{r\gamma'}{\omega}, \tag{95'}$$

den man den Pol der Drehung nennt; die Länge r heisst der Radius des Poles. Setzt man die Werthe (95′) in (95) ein, so resultirt:

$$\mathsf{A}\alpha'^2 + \mathsf{B}\beta'^2 + \Gamma\gamma'^2 = \frac{\omega^2}{r^2}. \tag{95''}$$

Vergleicht man dies mit unserem ersten Integral (91′), so folgt der Satz:

$$\omega^2 = r^2\Delta; \tag{96}$$

die Rotationsgeschwindigkeit ω ist in jedem Augenblick dem Radius des Poles im Trägheitsellipsoid proportional.

Zugleich werden die Gleichungen (95′) zu

$$a = \frac{\alpha'}{\sqrt{\Delta}}, \qquad b = \frac{\beta'}{\sqrt{\Delta}}, \qquad c = \frac{\gamma'}{\sqrt{\Delta}}; \tag{96'}$$

geben wir der $\sqrt{\Delta}$ das positive Vorzeichen, so ist dadurch dem Pol der Drehung die specielle Bedeutung gegeben, dass er die Seite der Drehungsaxe bezeichnet, um welche die Rotation in positivem Sinne stattfindet.

Führen wir die Coordinaten a, b, c des Poles in das zweite Integral (91″) ein, so ergiebt sich

$$\mathsf{A}^2a^2 + \mathsf{B}^2b^2 + \Gamma^2c^2 = \frac{\Theta^2}{\Delta}, \tag{97}$$

mithin die Gleichung eines zweiten Ellipsoides, auf welchem der Pol verharren muss. Es folgt daraus der Satz:

Der Pol der Drehung wandert auf der Schnittcurve der beiden concentrischen und gleichliegenden Ellipsoide (95) und (97), bewegt sich also in einer geschlossenen Curve.

Dass sich die beiden Ellipsoide stets schneiden müssen, ist einmal aus physikalischen Gründen klar, folgt aber auch aus der Ungleichung (91). Denn die Halbaxen des Ellipsoides (95) sind resp.

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{A}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathsf{B}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma}},$$

die von (97) resp.

$$\frac{\Theta}{\mathsf{A}\sqrt{\Delta}}, \quad \frac{\Theta}{\mathsf{B}\sqrt{\Delta}}, \quad \frac{\Theta}{\Gamma\sqrt{\Delta}},$$

und da nach (91) gilt:

$$\mathsf{A} \gtreqless \frac{\Theta^2}{\Delta} \gtreqless \Gamma,$$

jenachdem $\mathsf{A} \gtreqless \mathsf{B} \gtreqless \Gamma$ ist, so ergiebt sich, dass, wenn die grösste Axe des einen Ellipsoides kleiner ist als die grösste des andern, umgekehrt die kleinste für das erstere grösser ist als die kleinste für das letztere.

Die beiden Ellipsoide schneiden sich stets in zwei gleichen Curven, die symmetrisch zum Mittelpunkt liegen. Dies zeigt, dass mit denselben Werthen der Integrationsconstanten zwei zwar wesentlich gleiche, aber nach Lage des rotirenden Körpers gegen die positive Normale der invariabeln Ebene entgegengesetzte Bewegungen vereinbar sind.

Ein besonderes Interesse bieten einige specielle Fälle.

Gilt für die Hauptträgheitsmomente die Ungleichung $\mathsf{A} > \mathsf{B} > \Gamma$, so ist die C-Axe für beide Ellipsoide die grösste, die B- die mittlere, die A- die kleinste. Bestimmt sich dann durch den Anfangszustand das Verhältniss $\Theta^2/\Delta = \mathsf{A}$, so haben beide Ellipsoide gleiche A-Axen, das Trägheitsellipsoid (95) liegt jetzt vollständig innerhalb des andern (97) und beide berühren sich im Ende ihrer gemeinsamen A-Axe in einem sogenannten elliptischen Punkt; die Polcurve reducirt sich auf den Endpunkt der A-Axe, es tritt also eine permanente Rotation um diese ein. Weicht Θ^2/Δ nur sehr wenig von dem Werthe A ab — es kann nach (91) nur kleiner, nicht aber grösser sein — so wird die Polcurve elliptische Gestalt haben und ihr Mittelpunkt auf der A-Axe liegen. Die Rotationsaxe wandert also dauernd in sehr kleinem Winkelabstand um die A-Axe herum.

Ganz ähnliches gilt, wenn $\Theta^2/\Delta = \Gamma$ ist. Hier umschliesst das erste Ellipsoid (95) vollständig das zweite (97) und berührt es im Endpunkt der C-Axe; es tritt also permanente Rotation um die C-Axe ein. Ist Θ^2/Δ nur wenig grösser als Γ, so wandert die Rotationsaxe in einem engen elliptischen Kegel um die C-Axe.

Anders, wenn Θ^2/Δ den mittlern Werth B besitzt; dann hat das Trägheitsellipsoid parallel der A-Axe eine kleinere, parallel der B- die gleiche, parallel der C- eine grössere Axe, als das Ellipsoid (97), liegt also zum Theil ausserhalb, zum Theil innerhalb desselben. Hieraus ergeben sich für beide Ellipsoide Berührungen in den Enden der B-Axe und ausserdem zwei Schnittcurven, welche sich in jenen Punkten schneiden — die Berührung ist eine hyperbolische. Da nach den früheren Betrachtungen jede Hauptträgheitsaxe eine permanente Rotationsaxe ist, hat man dies so zu verstehen, dass der Pol zwar auf diesen Schnittcurven wandert, seine Geschwindigkeit in jenem Berührungspunkt aber verschwindet.

Ist Θ^2/Δ wenig kleiner oder grösser als B, so ergiebt sich eine Schnittcurve hyperbolischer Gestalt; bei einer kleinen Veränderung der Anfangsbedingungen verharrt demnach der Pol nicht in unmittelbarer Nähe der B-Axe, sondern wandert über das ganze Ellipsoid hin.

In diesem Sinne kann man die Rotation um die grösste und kleinste Trägheitsaxe durch den festen Punkt stabil, um die mittlere aber labil nennen.

Legt man an das Trägheitsellipsoid (95) in dem augenblicklichen Ort des Poles eine Tangentenebene und bezeichnet deren laufende Coordinaten mit a', b', c', so lautet ihre Gleichung:

$$\mathsf{A} a a' + \mathsf{B} b b' + \Gamma c c' = 1 . \tag{97'}$$

Hieraus folgt, dass der normale Abstand n dieser Ebene von dem festen Punkte oder dem Centrum des Trägheitsellipsoides gegeben ist durch

$$\frac{1}{n^2} = \mathsf{A}^2 a^2 + \mathsf{B}^2 b^2 + \Gamma^2 c^2$$

oder nach (97) durch

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\Theta^2}{\Delta};$$

es gilt daher ferner:

Die durch den Pol an das Trägheitsellipsoid gelegte Tangentenebene hat von dem festen Punkte den unveränderlichen Abstand

$$n = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Theta} . \tag{97''}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale n mit den Axen A, B, C einschliesst, sind nach (97'):

$$\cos(n, a) = \mathsf{A} a n, \qquad \cos(n, b) = \mathsf{B} b n, \qquad \cos(n, c) = \Gamma c n,$$

oder nach Einsetzen von a, b, c aus (96') und n aus (97'')

$$\cos(n, a) = \frac{\mathsf{A}\alpha'}{\Theta}, \qquad \cos(n, b) = \frac{\mathsf{B}\beta'}{\Theta}, \qquad \cos(n, c) = \frac{\Gamma\gamma'}{\Theta} . \tag{98}$$

Die Winkel von n mit den absolut festen Axen X, Y, Z bestimmen sich, indem man diese Formeln mit den Factoren α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 zusammenfasst zu:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{\mathsf{A}\,\alpha'\alpha_1 + \mathsf{B}\,\beta'\alpha_2 + \Gamma\gamma'\alpha_3}{\Theta}, \\ \cos(n, y) &= \frac{\mathsf{A}\,\alpha'\beta_1 + \mathsf{B}\,\beta'\beta_2 + \Gamma\gamma'\beta_3}{\Theta}, \\ \cos(n, z) &= \frac{\mathsf{A}\,\alpha'\gamma_1 + \mathsf{B}\,\beta'\gamma_2 + \Gamma\gamma'\gamma_3}{\Theta}. \end{aligned} \tag{98'}$$

Vergleicht man diese Werthe mit den Beziehungen (91''') und (92'), so erkennt man den Satz:

Die im Pol an das Trägheitsellipsoid gelegte Tangentenebene ist parallel mit der dem rotirenden Körper zugehörigen

invariabeln Ebene grössten Flächenmomentes und behält daher, ebenso wie ihre Normale, ihre Lage im Raume unverändert bei.

Da der Pol ein Punkt der augenblicklichen Rotationsaxe ist, so hat er keine Geschwindigkeit; demgemäss hat auch die Stelle des Trägheitsellipsoides, welche auf der invariabeln Ebene aufliegt, keine Geschwindigkeit. Daher gilt weiter:

Das Trägheitsellipsoid rollt, während es sich um sein Centrum dreht, ohne zu gleiten auf der festen Ebene.

Dies ist entsprechend dem auf p. 235 Gesagten jederzeit auf zwei Weisen möglich, welche auf der festen Ebene die gleiche Curve, aber auf dem Trägheitsellipsoid zwei symmetrisch zum Centrum gelegene Polcurven liefern.

Für die Componente ω_n der Rotationsgeschwindigkeit um die Normale n zur invariabeln Ebene gilt ein einfacher Satz, den man erhält, wenn man die Gleichungen (98) mit den Rotationscomponenten α', β', γ' um die Hauptträgheitsaxen multiplicirt und zusammen addirt. Es folgt:

$$\omega_n = \frac{\mathsf{A}\alpha'^2 + \mathsf{B}\beta'^2 + \Gamma\gamma'^2}{\Theta},$$

oder nach (91'):

$$\omega_n = \frac{\Delta}{\Theta}; \tag{98''}$$

die Componente der Rotationsgeschwindigkeit nach der Normalen auf der festen Ebene ist constant.

Besonders einfach werden die Verhältnisse in dem Falle, wo zwei der drei Hauptträgheitsmomente des Körpers um den festen Punkt einander gleich sind, jener etwa ein Rotationskörper ist, der um einen Punkt seiner Axe rotirt.

Sei $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, dann werden die Gleichungen (90):

$$\mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} = \beta'\gamma'(\mathsf{A} - \Gamma), \qquad \mathsf{A}\frac{d\beta'}{dt} = \gamma'\alpha'(\Gamma - \mathsf{A}), \qquad \Gamma\frac{d\gamma'}{dt} = 0. \tag{99}$$

Hieraus folgt, dass γ' constant ist, d. h. die Rotation um die ausgezeichnete Axe C mit constanter Geschwindigkeit geschieht. Setzen wir jetzt und später, falls γ' constant ist, $\gamma' = p$, ausserdem $(\Gamma - \mathsf{A})/\mathsf{A} = e$, so wird:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\beta' pe, \qquad \frac{d\beta'}{dt} = +\alpha' pe,$$

und daraus folgt:

$$\alpha' = q\cos pe(t - t_0), \qquad \beta' = q\sin pe(t - t_0), \qquad \gamma' = p, \tag{99'}$$

wobei, wie p, auch q und t_0 Constante sind.

Demgemäss ergiebt sich die gesammte Rotationsgeschwindigkeit:

$$\omega^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = p^2 + q^2, \tag{99''}$$

also ebenfalls constant.

Nennt man den Winkel, den die Rotations- mit der C-Axe einschliesst, δ, und denjenigen, der zwischen der AC-Ebene und der die C- und die Rotationsaxe enthaltenden Ebene liegt, ψ, so ist:

$$\frac{\alpha'}{\omega} = \sin\delta\cos\psi, \qquad \frac{\beta'}{\omega} = \sin\delta\sin\psi, \qquad \frac{\gamma'}{\omega} = \cos\delta.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg} pc(t - t_0), \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{q}{p},$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \Psi = pe = \frac{p(\Gamma - \mathsf{A})}{\mathsf{A}}. \tag{99'''}$$

Für einen Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten ist sowohl die Rotationsgeschwindigkeit γ' um die ausgezeichnete Axe als die resultirende Rotationsgeschwindigkeit ω constant, und die vom Pol auf dem Hauptträgheitsellipsoid, wie auf der festen Ebene beschriebene Curve ist ein Kreis, der vom Pol mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\Psi = \gamma'(\Gamma - \mathsf{A})/\mathsf{A}$ durchlaufen wird.

Der Winkel ϑ zwischen der ausgezeichneten C-Axe und der Normalen n der invariabeln Ebene, die wir zur Z-Axe gewählt haben, ist nach dem Vorstehenden von unveränderlicher Grösse, sein Cosinus γ_3, den wir hier und später, im Falle er constant ist, mit k bezeichnen wollen, findet sich aus (94):

$$\gamma_3 = k = \frac{\Gamma p}{\Theta}. \tag{100}$$

Der Winkel φ zwischen der XZ-Ebene und der durch die Z- und C-Axe gelegten ist nach (94''') unter den gemachten Voraussetzungen gegeben durch:

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Theta}{\mathsf{A}}. \tag{100'}$$

Φ ist hiernach also die constante Geschwindigkeit, mit welcher die C- um die Z-Axe rotirt.

Hierin lässt sich die Integrationsconstante Θ entweder nach (91'') durch die constanten Geschwindigkeiten p und q um die Haupt- und eine Nebenaxe nach der Formel

$$\Theta^2 = \mathsf{A}^2 q^2 + \Gamma^2 p^2, \tag{100''}$$

oder anschaulicher nach (100) durch die constante Geschwindigkeit p um die Hauptaxe und den constanten Cosinus k des Winkels zwischen dieser und der Z-Axe bestimmen, sodass man erhält:

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Gamma p}{\mathsf{A} k}. \tag{100'''}$$

Die Geschwindigkeit Φ, mit welcher die ausgezeichnete Hauptträgheitsaxe C um die Normale Z der invariabeln Ebene rotirt, ist indirect proportional dem Cosinus k des Winkels zwischen beiden und direct proportional der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die C-Axe.

Endlich fügen wir noch den nach den frühern Formeln sogleich einzusehenden Satz hinzu:

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich, so sind auch alle drei Rotationsgeschwindigkeiten α', β', γ' constant; die Drehung geschieht hier also mit constanter Geschwindigkeit um eine im Raume und im Körper feste Axe. —

II. Wir wollen nunmehr annehmen, dass der um einen festen Punkt drehbare Körper einer Kraft K unterworfen ist, die eine im Raume unveränderliche Richtung hat und in einem im Körper festen Punkte angreift, dessen Coordinaten in Bezug auf das System der Hauptträgheitsaxen a_1, b_1, c_1 sein mögen; im Falle die Schwere wirkt, ist K das Gewicht des Körpers und sind a_1, b_1, c_1 die Coordinaten seines Schwerpunktes.

Legen wir die Z-Axe der Kraft K parallel, so lauten unsere Gleichungen (89):

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} + (\Gamma - \mathsf{B})\beta'\gamma' &= K(b_1\gamma_3 - c_1\gamma_2), \\ \mathsf{B}\frac{d\beta'}{dt} + (\mathsf{A} - \Gamma)\gamma'\alpha' &= K(c_1\gamma_1 - a_1\gamma_3), \qquad (101) \\ \Gamma\frac{d\gamma'}{dt} + (\mathsf{B} - \mathsf{A})\alpha'\beta' &= K(a_1\gamma_2 - b_1\gamma_1); \end{aligned}$$

zugleich folgt aus (88'):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\alpha_1\alpha' + \mathsf{B}\,\alpha_2\beta' + \Gamma\,\alpha_3\gamma') &= +\,K(a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3), \\ \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\beta_1\alpha' + \mathsf{B}\,\beta_2\beta' + \Gamma\,\beta_3\gamma') &= -\,K(a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3), \qquad (101') \\ \frac{d}{dt}(\mathsf{A}\,\gamma_1\alpha' + \mathsf{B}\,\gamma_2\beta' + \Gamma\,\gamma_3\gamma') &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (101) mit den Factoren α', β', γ', addirt und berücksichtigt, dass nach (13''):

$$\gamma_2\gamma' - \gamma_3\beta' = \gamma_1', \qquad \gamma_3\alpha' - \gamma_1\gamma' = \gamma_2', \qquad \gamma_1\beta' - \gamma_2\alpha' = \gamma_3' \qquad (101'')$$

ist, so erhält man eine direct integrable Formel, welche liefert:

$$\mathsf{A}\alpha'^2 + \mathsf{B}\beta'^2 + \Gamma\gamma'^2 = 2K(a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3) + \Delta; \qquad (102)$$

diese Gleichung ist die der lebendigen Kraft, Δ die Integrationsconstante.

Ein zweites Integral giebt die letzte Formel (101'); dasselbe ist

$$\mathsf{A}\gamma_1\alpha' + \mathsf{B}\gamma_2\beta' + \Gamma\gamma_3\gamma' = \mathsf{K} \tag{102'}$$

und stellt nach (91''') den Flächensatz in Bezug auf die Ebene normal zur Kraft K dar. Da wir über die positive Richtung der Z-Axe bereits verfügt haben, so sind positive und negative Werthe von K zuzulassen.

Ein drittes Integral ist bisher nur für den speciellen Fall gefunden, dass der Angriffspunkt der Kraft K auf einer Hauptträgheitsaxe, z. B. der C-Axe, liegt und die Trägheitsmomente um die A- und B- und daher um alle zur C-Axe normalen Axen gleiche Werthe haben. Die erste Bedingung verlangt, dass

$$a_1 = b_1 = 0,$$

die zweite, dass

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

ist. In Folge dieser Beziehungen wird die letzte Gleichung (101) direct integrabel und liefert durch

$$\gamma' = p, \tag{102''}$$

worin p eine Constante bezeichnet, das Resultat, dass in diesem Falle die Rotationsgeschwindigkeit um die C-Axe constant ist.

Die ersten beiden Gleichungen (101) nehmen zugleich die Form an:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\frac{d\alpha'}{dt} + (\Gamma - \mathsf{A})p\beta' &= -Kc_1\gamma_2, \\ \mathsf{A}\frac{d\beta'}{dt} - (\Gamma - \mathsf{A})p\alpha' &= +Kc_1\gamma_1, \end{aligned} \tag{102'''}$$

die Integrale (102) und (102') werden zu:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(\alpha'^2 + \beta'^2) + \Gamma p^2 &= 2Kc_1\gamma_3 + \Delta, \\ \mathsf{A}(\gamma_1\alpha' + \gamma_2\beta') + \Gamma\gamma_3 p &= \mathsf{K}. \end{aligned} \tag{102''''}$$

Die Durchführung des Problems giebt für die Grössen $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$, welche die Lage des Körpers gegen das absolut feste System X, Y, Z in jedem Augenblick bestimmen, elliptische Functionen der Zeit.

Mit elementaren Hülfsmitteln ist hier nur wenig Aufklärung über den stattfindenden Vorgang zu erhalten.

Die Gesetze für die bekannten Kegelbewegungen, welche die Axen von Kreiseln oder Gyroscopen unter der Wirkung der Schwere ausführen, findet man, wenn man die Annahme in die vorstehenden Gleichungen einführt, dass der Winkel zwischen der C- oder Kreiselaxe und der Z-Axe, welche parallel der Richtung der Kraft durch den festen Punkt gelegt ist, constant bleibt.

Dies geschieht, indem man

$$\gamma_3 = k, \quad \text{also} \quad \gamma_3' = 0 \tag{103}$$

setzt, wo k wiederum eine Constante bezeichnet. Die letzte Gleichung (101″) und die Gleichung (94″) werden dann zu

$$\gamma_1\beta' - \gamma_2\alpha' = 0, \qquad \gamma_1\alpha' + \gamma_2\beta' = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\frac{d\varphi}{dt};$$

und aus ihnen folgt:

$$\alpha' = +\gamma_1\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \beta' = +\gamma_2\frac{d\varphi}{dt}. \tag{103'}$$

Hierin ist $d\varphi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit Φ, mit welcher die C- die Z-Axe umkreist.

Bildet man

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

und beachtet, dass

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - k^2,$$

also constant ist und auch $\alpha'^2 + \beta'^2$ unter den gemachten Voraussetzungen nach der ersten Formel (102⁗) einen constanten Werth q^2 hat, so erkennt man, dass auch Φ unveränderlich ist. Man erhält für dasselbe zunächst den Werth

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dt} = \pm\frac{q}{\sqrt{1-k^2}}, \tag{103''}$$

der indess, da q die Rotationsgeschwindigkeit um eine Nebenaxe ist, wenig Interesse hat.

Setzt man die Werthe von α' und β' in eine der beiden ersten Gleichungen (101), so erhält man in Rücksicht darauf, dass $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, $a_1 = b_1 = 0$ und $d\varphi/dt$ constant ist:

$$\mathsf{A}\gamma_1'\Phi + (\Gamma - \mathsf{A})p\gamma_2\Phi = -Kc_1\gamma_2,$$

oder, da nach (100″) und (103′)

$$\gamma_1' = \gamma_2 p - k\beta' = \gamma_2(p - k\Phi)$$

ist, auch

$$\gamma_2(\Gamma p\Phi - \mathsf{A}k\Phi^2 + Kc_1) = 0.$$

Hieraus folgt, da γ_2 nicht dauernd gleich Null sein kann, die Gleichung

$$\mathsf{A}k\Phi^2 - \Gamma p\Phi = Kc_1, \tag{104}$$

aus welcher sich bei demselben p und k zwei Werthe für Φ ergeben, nämlich:

$$\Phi = \frac{\Gamma p \pm \sqrt{4\mathsf{A}Kkc_1 + \Gamma^2p^2}}{2\mathsf{A}k}. \tag{104'}$$

Diese Werthe sind stets reell, wenn kc_1 positiv ist, d. h. die Projection der Entfernung c_1 zwischen dem festen Punkt und dem Angriffspunkt der Kraft auf die Richtung der Kraft K positiv ist; im andern Falle können sie bei hinreichend kleinem p complex werden, d. h. bei kleiner Rotationsgeschwindigkeit p kann unter der Wirkung der ge-

gebenen Kraft K, z. B. der Schwere, die verlangte Kegelbewegung nicht zu Stande kommen. Nimmt man p so gross an, dass man die Wurzelgrösse entwickeln kann, so erhält man die beiden angenäherten Werthe:

$$\Phi_1 = \frac{\Gamma p}{\mathrm{A} k} + \frac{K c_1}{\Gamma p} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = -\frac{K c_1}{\Gamma p}. \tag{104''}$$

Der erste Werth unterscheidet sich um so weniger von dem ohne Wirkung der äussern Kraft stattfindenden (100'''), je grösser die Rotationsgeschwindigkeit p um die C-Axe ist; er giebt daher eigentlich keine in Folge von K auftretende neue Erscheinung.

Anders der zweite Werth, der mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit p abnimmt und bei unendlicher verschwindet; dieser stellt offenbar die Kegelbewegung dar, welche bei Kreiseln regelmässig zu beobachten ist.

Es bleibt zu erklären, wie es möglich ist, dass für Φ hier bei Einwirkung einer Kraft zwei Werthe, oben ohne solche nur einer gefunden ist.

Denken wir, um die Vorstellung zu fixiren, die Z-Axe positiv nach unten gerechnet und den Körper um die C-Axe, welche den Winkel ϑ mit der Z-Axe einschliesst, mit der Geschwindigkeit p in Rotation gesetzt, ohne dass eine äussere Kraft K wirkt, so kann man dem Körper auf zwei Weisen die Neigung ϑ ungeändert erhalten: einmal, indem man ihm keine andere Bewegung als die Rotation p mittheilt, in welchem Falle die C-Axe als permanente Drehungsaxe im Raume ruht — sodann, indem man ihm noch eine Rotationsgeschwindigkeit q um eine Nebenaxe ertheilt von der aus (100) und (100'') folgenden Grösse

$$q^2 = \frac{\Gamma^2 p^2}{\mathrm{A}^2} \frac{1-k^2}{k^2},$$

vermöge deren nun die C-Axe in constanter Neigung um die Z-Axe kreist.

Diese beiden Fälle sind möglich, aber nur der zweite ist oben in Formel (100''') ausgedrückt, weil für jene die Z-Axe ausdrücklich als Normale der invariabeln Ebene vorausgesetzt war. Im ersten Falle ist aber die im Raume feste C-Axe selbst diese Normale.

Aus diesen beiden Bewegungen leiten sich nun offenbar, bei Einwirkung der Kraft K, die in (104'') enthaltenen beiden ab; ein Widerspruch ist daher nicht vorhanden. —

III. Wir wollen uns schliesslich noch mit der Rotation eines Körpers um seinen festen Schwerpunkt beschäftigen unter der Voraussetzung, dass er eine Anziehung von einem Massenpunkt m_1 erfährt, welcher in grosser Entfernung in einem Kreis um ihn herumwandert; dies Problem steht, wie wir sehen werden, in Zusammenhang mit

der Theorie der Einwirkungen von Sonne und Mond auf die Erde, welche die sogenannte Präcession und Nutation hervorbringen.

Sei der feste Schwerpunkt des Körpers wieder der Nullpunkt des XYZ-Systemes und wandere der anziehende Massenpunkt gleichförmig im constanten Abstand e_0 von ihm in der XY-Ebene.

Schliesst die Richtung von e_0 mit den Hauptträgheitsaxen Winkel ein, deren Cosinus resp. α, β, γ sind, so wird in einem spätern Abschnitt gezeigt werden, dass das Attractionscentrum auf den Körper Drehungsmomente F, G, H um die Hauptträgheitsaxen ausübt von der Grösse:

$$F = \frac{3m_1 f}{e_0^3}(\Gamma - \mathrm{B})\beta\gamma, \qquad G = \frac{3m_1 f}{e_0^3}(\mathrm{A} - \Gamma)\gamma\alpha,$$
$$H = \frac{3m_1 f}{e_0^3}(\mathrm{B} - \mathrm{A})\alpha\beta. \tag{105}$$

Hierin drücken wir α, β, γ durch die Winkel aus, welche die A-, B-, C- mit den X-, Y-, Z-Axen, und welche e_0 mit der X- und Y-Axe einschliesst; nennen wir φ den Winkel zwischen den Richtungen von e_0 und X, so wird:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi,\\ \beta &= \alpha_2 \cos\varphi + \beta_2 \sin\varphi,\\ \gamma &= \alpha_3 \cos\varphi + \beta_3 \sin\varphi.\end{aligned} \tag{105'}$$

Da der Punkt m_1 gleichförmig rotirt, so ist φ eine lineäre Function der Zeit.

Wir wollen annehmen, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes m_1 gross ist gegen die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Drehungsaxe innerhalb des Körpers bewegt, und zwar in einem Maasse, dass man an Stelle der wechselnden Werthe der Momente F, G, H ihre Mittelwerthe für die Dauer eines Umlaufes einführen kann — oder, anders ausgedrückt, dass man sich die Masse m_1 des Attractionscentrums auf einen Kreis vom Radius e_0 gleichmässig vertheilt denken darf.

Dann haben wir in (105) an Stelle von $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ resp. zu setzen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta\gamma\,d\varphi &= \frac{1}{2}(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) = -\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3,\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma\alpha\,d\varphi &= \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1) = -\frac{1}{2}\gamma_3\gamma_1,\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha\beta\,d\varphi &= \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2.\end{aligned} \tag{105''}$$

Kürzt man noch $3m_1 f/2e_0^3$ in f' ab, so erhält man die Momente F, G, H in der folgenden Gestalt:

$$F = -f'(\Gamma - B)\gamma_2\gamma_3, \qquad G = -f'(A - \Gamma)\gamma_3\gamma_1, \qquad H = -f'(B - A)\gamma_1\gamma_2 \tag{105'''}$$

und die Bewegungsgleichungen (89) werden zu:

$$\begin{aligned} A\frac{d\alpha'}{dt} + (\Gamma - B)\beta'\gamma' &= -f'(\Gamma - B)\gamma_2\gamma_3, \\ B\frac{d\beta'}{dt} + (A - \Gamma)\gamma'\alpha' &= -f'(A - \Gamma)\gamma_3\gamma_1, \\ \Gamma\frac{d\gamma'}{dt} + (B - A)\alpha'\beta' &= -f'(B - A)\gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{106}$$

Es ist leicht, drei erste Integrale dieser Gleichungen zu bilden.

Fasst man sie mit den Factoren α', β', γ' zusammen und berücksichtigt, dass

$$\gamma_1' = \gamma_2\gamma' - \gamma_3\beta', \qquad \gamma_2' = \gamma_3\alpha' - \gamma_1\gamma', \qquad \gamma_3' = \gamma_1\beta' - \gamma_2\alpha'$$

ist, so resultirt:

$$A\alpha'^2 + B\beta'^2 + \Gamma\gamma'^2 = \Delta + f'(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + \Gamma\gamma_3^2). \tag{106'}$$

Die Factoren $A\alpha'$, $B\beta'$, $\Gamma\gamma'$ geben aus demselben Grunde:

$$A^2\alpha'^2 + B^2\beta'^2 + \Gamma^2\gamma'^2 = \Theta^2 - f'(B\Gamma\gamma_1^2 + \Gamma A\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2); \tag{106''}$$

endlich die Factoren γ_1, γ_2, γ_3:

$$A\gamma_1\alpha' + B\gamma_2\beta' + \Gamma\gamma_3\gamma' = K. \tag{106'''}$$

Hierin sind Δ, Θ, K Integrationsconstanten.

Die Formel (106′) giebt die Gleichung der lebendigen Kraft, (106″) und (106‴) sind Flächensätze.

Wir wollen weiter nur den speciellen Fall behandeln, dass der Körper in Bezug auf seinen Schwerpunkt zwei gleiche Hauptträgheitsmomente $A = B$ besitzt und mit seiner ausgezeichneten Trägheitsaxe C einen Kreiskegel um die Z- als Axe beschreibt; wir fragen, wie sich dessen Oeffnung durch die ertheilten Geschwindigkeiten bestimmt.

Die erste gemachte Annahme lässt laut der dritten Gleichung (106)

$$\gamma' = p,$$

d. h. constant werden, die zweite giebt auch γ_3 einen constanten Werth:

$$\gamma_3 = k.$$

Hierdurch gehen die beiden ersten Gleichungen (106) über in:

$$\begin{aligned} A\frac{d\alpha'}{dt} + (\Gamma - A)p\beta' &= -f'(\Gamma - A)k\gamma_2, \\ A\frac{d\beta'}{dt} - (\Gamma - A)p\alpha' &= +f'(\Gamma - A)k\gamma_1, \end{aligned} \tag{107}$$

stimmen also mit (102‴) überein, nur dass an Stelle von Kc_1 dort hier $-f'k(\Gamma - \mathsf{A})$ steht.

In Folge dessen sind die dort erhaltenen Resultate bis auf den Werth der Constanten auch hier gültig.

Nimmt man die Rotationsgeschwindigkeit p des Körpers um die C-Axe und den Winkel zwischen der C- und der Z-Axe, also k, als gegeben an, so kann man nach (104″) durch zwei Werthe der Winkelgeschwindigkeit Φ, mit welcher die C- um die Z-Axe kreist, den Bedingungen des Problemes genügen, nämlich durch:

$$\Phi_1 = \frac{\Gamma p}{\mathsf{A} k} - \frac{3 m_1 f k (\Gamma - \mathsf{A})}{2 e_0^3 \Gamma p} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = + \frac{3 m_1 f k (\Gamma - \mathsf{A})}{2 e_0^3 \Gamma p}. \qquad (107')$$

Der erstere entspricht dem Falle, dass der rotirende Körper auch ohne Einwirkung der äussern Kraft bei dem gegebenen Anfangszustand mit seiner C-Axe eine Kegelbewegung um die Z-Axe beschrieben hätte, der zweite dem, dass unter diesen Umständen seine C-Axe geruht hätte.

Man kann die letztere Formel anwenden auf die Lagenänderung der Erdaxe in Folge der Einwirkung der Anziehung von Sonne und Mond, auf die sogenannte Präcession und Nutation. Die Erdaxe rotirt um die Normale auf der Ekliptik, während sie mit ihr den nahe constanten Winkel von 23° 27′ einschliesst, und vollendet einen Umlauf in ca. 25800 Jahren. Wie wir später sehen werden, kann für die Betrachtung der Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt letzterer als feststehend angenommen werden; wir können uns also für die Behandlung der Präcession den Erdmittelpunkt ruhend und Sonne und Mond ihn umkreisend denken. Deren Umlaufszeiten würden dann gegenüber der Umlaufszeit der Erdaxe als verschwindend klein anzusehen sein, wie bei der vorstehenden Rechnung vorausgesetzt ist.

Die Beobachtung zeigt, dass bei der Erde die zweite Wurzel Φ_2 Gültigkeit hat, die Erdaxe ohne äussere Einwirkung also im Raume ruhen würde. Betrachtet man die Erde als ein Rotationsellipsoid von den Halbaxen a und c und der Masse m, so ist nach (42′):

$$\mathsf{A} = \frac{m(a^2 + c^2)}{5}, \qquad \Gamma = \frac{2 m a^2}{5},$$

und es wird, wenn man die Wirkung von Sonne und Mond zusammenaddirt:

$$\Phi_2 = \frac{3 f k (a^2 - c^2)}{4 a^2 p} \left(\frac{m_1}{e_0^3} + \frac{m_1'}{e_0'^3} \right).$$

Den Werth der Constante f des Newton'schen Gesetzes werden wir weiter unten zu

$$f = \frac{g_0 r^2}{m}$$

bestimmen, worin r den mittlern Erdradius, g_0 die von dem Einfluss der Centrifugalkraft befreite Beschleunigung durch die Schwere bezeichnet; $(a^2 - c^2)/a^2 = \varepsilon^2$ ist das Quadrat der numerischen Excentricität des Erdmeridians.

Führt man noch die Umlaufszeit der Erde um ihre Axe $\tau = 2\pi/p$ und die der Erdaxe $T = 2\pi/\Phi_2$ ein, so erhält man auch:

$$\frac{1}{T} = \frac{3 g_0 k \tau}{16 \pi^2} \varepsilon^2 \left(\frac{m_1}{m} \cdot \left(\frac{r}{e_0}\right)^2 \frac{1}{e_0} + \frac{m_1'}{m} \left(\frac{r}{e_0'}\right)^2 \frac{1}{e_0} \right).$$

Soll T sich in Jahren finden, so ist

$$\tau = \frac{1}{365} \quad \text{und} \quad g_0 = 9{,}83 . (86400)^2 . (365)^2$$

zu setzen; ferner ist:

$$k = 0{,}9174, \qquad r = 6367 \text{ km},$$

und für den Mond:

$$\frac{m_1}{m} = 0{,}0125, \qquad e_0 = 384\,000 \text{ km}, \qquad \frac{e_0}{r} = 60,$$

für die Sonne:

$$\frac{m_1'}{m} = 324\,400, \qquad e_0' = 149\,000\,000 \text{ km}, \qquad \frac{e_0'}{r} = 23300.$$

Rechnet man mit diesen Zahlen T aus, so erhält man den Werth 24600 Jahre, der mit der aus der Beobachtung berechneten Zahl von 25800 Jahren soweit stimmt, als es bei den gemachten Vernachlässigungen zu erwarten ist.

§ 24. Bewegung eines freien starren Körpers unter der Wirkung äusserer Kräfte; ebene Bewegungen.

Ist kein Punkt des bewegten starren Körpers festgehalten und dadurch als Anfangspunkt des im Körper festen Coordinatensystemes empfohlen, so wird man in den allgemeinen Gleichungen (34) diesen Anfangspunkt passend in den Schwerpunkt des Körpers legen, also

$$x_0 = \xi, \qquad y_0 = \eta, \qquad z_0 = \zeta$$

setzen. Jene Formeln werden hierdurch:

$$m \frac{d\xi'}{dt} = \sum X_h, \qquad m \frac{d\eta'}{dt} = \sum Y_h, \qquad m \frac{d\zeta'}{dt} = \sum Z_h,$$

$$m \frac{d}{dt} (\zeta' \eta - \eta' \zeta - \lambda' (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \xi (\xi \lambda' + \eta \mu' + \zeta \nu')) \tag{108}$$

$$+ \frac{d}{dt} (\lambda' \Xi + \mu' \mathrm{Z}' + \nu' \mathrm{H}') = \sum (y_h Z_h - z_h Y_h),$$

$$
\begin{aligned}
&m\frac{d}{dt}\left(\xi'\zeta-\zeta'\xi-\mu'(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\eta(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')\right)\\
&+\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{Z}'+\mu'\mathrm{H}+\nu'\Xi')=\sum(z_hX_h-x_hZ_h),\\
&m\frac{d}{dt}\left(\eta'\xi-\xi'\eta-\nu'(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\zeta(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')\right)\\
&+\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{H}'+\mu'\Xi'+\nu'\mathrm{Z})=\sum(x_hY_h-y_hX_h).
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Setzt man in den letzten drei Gleichungen rechts

$$x_h=\xi+\xi_h,\qquad y_h=\eta+\eta_h,\qquad z_h=\zeta+\zeta_h,$$

wo nun ξ_h, η_h, ζ_h die relativen Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt sind, so wird:

$$
\begin{aligned}
\sum(y_hZ_h-z_hY_h)&=\sum(\eta_hZ_h-\zeta_hY_h)+\eta\sum Z_h-\zeta\sum Y_h\\
&=L_0+m\left(\eta\frac{d\zeta'}{dt}-\zeta\frac{d\eta'}{dt}\right),
\end{aligned}
\tag{108'}
$$

falls L_0 die Summe der Drehungsmomente um eine zur X-Axe parallele durch den Schwerpunkt bezeichnet; ebenso wird:

$$
\begin{aligned}
\sum(z_hX_h-x_hZ_h)&=M_0+m\left(\zeta\frac{d\xi'}{dt}-\xi\frac{d\zeta'}{dt}\right),\\
\sum(x_hY_h-y_hX_h)&=N_0+m\left(\xi\frac{d\eta'}{dt}-\eta\frac{d\xi'}{dt}\right).
\end{aligned}
\tag{108''}
$$

Bezeichnet man auch die Trägheits- und Deviationsmomente um zu den X, Y, Z- parallele Axen durch den Schwerpunkt mit dem untern Index $_0$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
&\Xi=\Xi_0+m(\eta^2+\zeta^2),\quad \mathrm{H}=\mathrm{H}_0+m(\zeta^2+\xi^2),\quad \mathrm{Z}=\mathrm{Z}_0+m(\xi^2+\eta^2),\\
&\Xi'=\Xi_0'-m\,\eta\zeta,\qquad \mathrm{H}'=\mathrm{H}_0'-m\,\zeta\xi,\qquad \mathrm{Z}'=\mathrm{Z}_0'-m\,\xi\eta.
\end{aligned}
\tag{108'''}
$$

Benutzt man alle diese Beziehungen, so verwandelt sich das System (108) in:

$$
\begin{aligned}
&m\frac{d\xi'}{dt}=\sum X_h,\qquad m\frac{d\eta'}{dt}=\sum Y_h,\qquad m\frac{d\zeta'}{dt}=\sum Z_h,\\
&\frac{d}{dt}(\lambda'\Xi_0+\mu'\mathrm{Z}_0'+\nu'\mathrm{H}_0')=L_0,\\
&\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{Z}_0'+\mu'\mathrm{H}_0+\nu'\Xi_0')=M_0,\\
&\frac{d}{dt}(\lambda'\mathrm{H}_0'+\mu'\Xi_0'+\nu'\mathrm{Z}_0)=N_0.
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Die Drehungsgeschwindigkeiten λ', μ', ν' beziehen sich, wie früher, auf die durch den Anfangspunkt des im Körper festen Coordinatensystemes (hier also durch den Schwerpunkt) gehenden Parallelen zu den XYZ-Axen, daher auf dieselben Richtungen wie die L_0, M_0, N_0, Ξ_0, H_0, Z_0, Ξ_0', H_0', Z_0'.

Vergleicht man diese Formeln mit den für einen Massenpunkt und den für einen um einen festen Punkt rotirenden Körper geltenden, so erhält man den Satz, der nur eine andere Fassung der in § 15 für die Bewegung des Massenmittelpunktes und für die Flächenmomente gefundenen Resultate ist:

Ein freier starrer Körper rotirt um seinen Schwerpunkt ebenso als wäre derselbe festgehalten und wirkten nur die Drehungsmomente der äussern Kräfte um Axen, die durch diesen Punkt gehen, während gleichzeitig der Schwerpunkt so fortschreitet, als wäre in ihm die ganze Masse concentrirt und griffen in ihm alle Kräfte mit der gegebenen Stärke an.

Die Formeln (109) gestatten uns nun auch, die Voraussetzungen genauer zu erkennen, welche zu erfüllen sind, damit ein Körper als materieller Punkt angesehen werden kann, das heisst, damit seine Bewegung oder, wie wir nunmehr präciser sagen, diejenige seines Schwerpunktes von seiner Gestalt und Zusammensetzung unabhängig ist.

In den drei ersten Gleichungen (109) kommt Gestalt und Zusammensetzung des Körpers nur in den auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücken vor, denn die Kräfte, welche ein Element des Körpers erfährt, sind im Allgemeinen als Functionen des Ortes und der Geschwindigkeit eben jenes Elementes zugelassen und geben daher andere Componentensummen, wenn ihre Angriffspunkte geänderte Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten erhalten.

Bezeichnen wir für die Kraft X_h, Y_h, Z_h die relativen Coordinaten des Angriffspunktes gegen den Schwerpunkt mit ξ_h, η_h, ζ_h, seine relativen Geschwindigkeitscomponenten mit ξ_h', η_h', ζ_h', so kann man setzen, da die Functionen X_h, Z_h, Y_h stets als stetig anzusehen sind:

$$\sum X_h = \sum (X_h)_0 + \sum \left(\xi_h \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \xi} + \eta_h \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \eta} + \zeta_h \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \zeta} \right)$$
$$+ \sum \left(\xi_h' \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \xi'} + \eta_h' \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \eta'} + \zeta_h' \frac{\partial (X_h)_0}{\partial \zeta'} \right) + \cdots$$

Hierin bedeutet $(X_h)_0$ den Werth von X_h, der resultirt, wenn man an Stelle der Coordinaten und Geschwindigkeiten des wirklichen Angriffspunktes von K_h diejenigen des Schwerpunktes einsetzt.

$\sum X_h$, $\sum Y_h$, $\sum Z_h$ sind von der Gestalt und Zusammensetzung des Körpers unabhängig, wenn dessen Dimensionen so klein sind, dass es innerhalb der geforderten Annäherung gestattet ist, die Reihen mit dem ersten Glied abzubrechen, und dieses selbst jene Grössen nicht enthält.

Ersteres setzt im Allgemeinen voraus, dass schon die in ξ_h, η_h, ζ_h und ξ_h', η_h', ζ_h' lineären Glieder vernachlässigt werden müssen; nur

in dem speciellen Falle, dass die Kräfte den Massen proportional sind, verschwinden die linearen Glieder wegen

$$\sum m_h \xi_h = \sum m_h \eta_h = \sum m_h \zeta_h = 0$$

von selbst und sind erst die Glieder zweiter Ordnung zu vernachlässigen.

Indess ist diese eine Bedingung nicht unter allen Umständen genügend, sondern versagt in den allerdings in der Praxis seltenen Fällen, dass die Kraft, welche ein Punkt des Körpers erfährt, von der Gestalt und Zusammensetzung des ganzen Körpers abhängig ist; hier kann auch bei verschwindenden Dimensionen der Einfluss dieser Umstände bestehen bleiben, sodass es unmöglich ist, den Körper in dem ausgesprochenen Sinne als einen materiellen Punkt anzusehen. Wir werden noch in diesem Abschnitt einige Beispiele behandeln, in welchen dies stattfindet. —

Da das Problem der Rotation eines Körpers um einen festen Punkt nur in gewissen speciellen Fällen der Analyse zugänglich ist, so gilt das Gleiche nach dem obigen Satz auch für seine durch die Gleichungen (109) gegebene „freie Bewegung", welche so allgemein aufgefasst werden kann, dass sie alle Fälle umfasst, in denen kein Punkt vollständig festgehalten ist.

Anders liegt der Fall, wenn wir uns auf die ebenen Bewegungen des Körpers beschränken, d. h. auf diejenigen, bei welchen alle Punkte des Körpers ebene Bahnen beschreiben.

Solche können in Wirklichkeit auf verschiedene Weise hervorgebracht werden, am einfachsten dadurch, dass man dem Körper eine Anfangsrotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Hauptträgheitsaxe und eine Translationsgeschwindigkeit normal zu derselben ertheilt, und weiter nur Kräfte wirken lässt, die in der zur Drehungsaxe normalen Ebene durch den Schwerpunkt liegen.

Da für die Bewegung dann nur dieser Querschnitt und das Trägheitsmoment um diese Drehungsaxe maassgebend ist, so kann man als Repräsentanten der ganzen Gattung von Erscheinungen die Bewegung einer ebenen Scheibe in ihrer Ebene betrachten, die wir zur XY-Ebene wählen.

Die für diese Probleme gültigen Gleichungen erhält man aus (109), indem man die Z_h, ζ_h, ferner auch Ξ' und H' gleich Null setzt; daraus folgt dann $\zeta = 0$, $L_0 = M_0 = 0$ und daher $\lambda_0' = \mu_0' = 0$, und es bleibt allein übrig:

$$m \frac{d\xi'}{dt} = \sum X_h, \quad m \frac{d\eta'}{dt} = \sum Y_h, \quad \frac{d}{dt}(\nu' \mathsf{Z}_0) = N_0. \qquad (109')$$

Hierin vertauschen wir

$$\xi' \text{ mit } \frac{d\xi}{dt}, \qquad \eta' \text{ mit } \frac{d\eta}{dt}, \qquad \nu' \text{ mit } \frac{d\varphi}{dt},$$

ersetzen das constante Z_0 durch M und haben dann die Schlussformeln:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_h, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_h, \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_0. \tag{110}$$

Verschwindet das äussere Moment N_0, wie z. B. wenn die Resultante aller äussern Kräfte durch den Schwerpunkt geht, so wird die Rotationsgeschwindigkeit constant. So z. B. wenn eine schwere verticale Scheibe um eine horizontale Axe durch ihren Schwerpunkt reibungsfrei drehbar in einer leichten Gabel befestigt ist, die ihrerseits als eine Pendelstange auf einer ebenfalls horizontalen Schneide aufliegt. Dies Pendel schwingt dann wie ein einfaches von einer Länge gleich dem Abstand der Drehungsaxe von der Schneide und die Rotation der Scheibe ist ohne Einfluss auf diese Oscillation.

Einige interessante Anwendungen der Gleichungen (110) sind im Folgenden besprochen; sie setzen zunächst Kreisscheiben von in concentrischen Ringen constanten Dichtigkeiten voraus, ihre Resultate sind aber nach dem Vorstehenden unmittelbar auf Kugeln oder Rotationsellipsoide von analogem Verhalten zu übertragen.

1. Rollen einer schweren Kreisscheibe auf einer vollkommen reibenden Bahn.

Vollkommen reibend nennen wir eine Bahn dann, wenn jegliches Gleiten auf ihr unmöglich ist, ein Körper auf ihr sich also nur durch Rollen fortbewegen kann; von einer rollenden Reibung werde zunächst abgesehen.

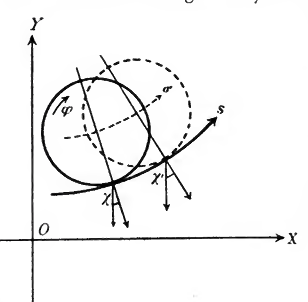


Fig. 27.

Habe die Scheibe den Radius R und sei $y = f(x)$ die Curve, auf der sie rollt, dann bewegt sich der Schwerpunkt auf der zu jener Curve parallelen im Abstand R. Während der Berührungspunkt den Weg ds zurücklegt, wandert der Schwerpunkt durch den Weg

$$d\sigma = ds - R\,d\chi, \tag{111}$$

falls $d\chi$ den Zuwachs des Winkels χ des Curvenelementes mit der X-Axe oder der Normalen mit der $-Y$-Axe auf der Strecke ds bezeichnet.

Damit ein vollkommenes Rollen stattfinde, ist nöthig, dass

$$ds = R\,(d\varphi + d\chi) \tag{111'}$$

ist; dabei ist der Drehungswinkel φ wie in der Figur 27 gezeichnet, also in negativem Sinne gezählt, und es muss das Drehungsmoment in demselben Sinne gerechnet werden. Die Summe beider Gleichungen giebt:

$$d\sigma = R\,d\varphi. \tag{111''}$$

Die Kräfte, welche die Scheibe erfährt, sind die Schwere $G = mg$, die parallel der $-Y$-Axe im Schwerpunkt angreift, der Reactionsdruck N der festen Bahn, der in der Berührungsstelle normal zur Bahn wirkt, also gleichfalls durch den Schwerpunkt geht, endlich die Reibungskraft ϱ, die mit unbekannter Grösse in der Berührungsstelle parallel der Bahn wirkt und die wir parallel mit s positiv rechnen.

Wir machen uns von allem Anfang von dem Reactionsdruck N frei, indem wir aus den beiden ersten Bewegungsgleichungen diejenige bilden, welche die Beschleunigung des Schwerpunkts längs des Bahnelementes $d\sigma$ bestimmt; sie lautet:

$$m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\,G\sin\chi + \varrho. \tag{112}$$

Ein Drehungsmoment liefert nur die Reibung; dasselbe wirkt bei unsern Annahmen über ϱ und φ der Drehung entgegen; wir haben also:

$$\mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,\varrho R. \tag{112'}$$

Eliminirt man hieraus die unbekannte Reibung ϱ, so erhält man in Rücksicht auf (111''):

$$\left(m + \frac{\mathsf{M}}{R^2}\right)\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \left(m + \frac{\mathsf{M}}{R^2}\right)R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,G\sin\chi. \tag{113}$$

Der Mittelpunkt der Kreisscheibe bewegt sich ebenso wie ein Massenpunkt von der Masse $(m + \mathsf{M}/R^2)$, der an die feste Bahn σ gebunden ist. Führt man den Trägheitsradius $\varkappa$ ein, so giebt dies auch:

$$m\left(\frac{R^2 + \varkappa^2}{R^2}\right)\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\,G\sin\chi. \tag{113'}$$

Man bemerkt, dass hier ein Fall vorliegt, bei welchem der Körper, auch wenn man seine Dimensionen beliebig klein wählt, sich niemals wie ein Massenpunkt verhält, in dem die ganze Masse m vereinigt ist, nämlich nie eine von seiner Gestalt und Zusammensetzung unabhängige Bewegung annimmt, denn das Verhältniss $\varkappa^2/R^2$ ist von dem absoluten Werth der Dimensionen vollständig unabhängig, z. B. für den Fall einer homogenen Kreisscheibe gleich $1/2$, für den einer Kugel gleich $2/5$.

Ist die Bahn eine schiefe Ebene, so ist χ constant gleich α und $d\sigma$ identisch mit ds; es folgt demgemäss:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{-gR^2}{\varkappa^2 + R^2} \sin\alpha.$$

Diese Formel enthält die Theorie der Fallversuche Galilei's auf der schiefen Ebene, vorausgesetzt, dass jene vollkommen reibend war, falls man darin für $\varkappa^2$ den Werth $2R^2/5$ setzt, der einer Kugel entspricht. Die Beschleunigung durch die Schwere ist also bei der rollenden Kugel zwar constant, aber nur der 5/7te Theil von der bei einem ohne Reibung gleitenden Punkt wirkenden.

Ist die Bahn eine verticale Kreislinie vom Radius $(L+R)$, so ist $ds = (L+R)\,d\chi$, also nach (111′):

$$R\,d\varphi = L\,d\chi,$$

daher auch nach (113):

$$(\mathsf{M} + mR^2)\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{R^2 G}{L}\sin\chi.$$

Man erkennt, dass man eine Pendelbewegung erhält mit der Dauer

$$T = \pi\sqrt{\frac{L(\mathsf{M} + mR^2)}{GR^2}} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}\,\frac{(\varkappa^2 + R^2)}{R^2}}$$

für die einfache Schwingung.

Die Grösse der Inanspruchnahme der gleitenden Reibung bestimmt sich aus (112) und (113):

$$\varrho = \frac{G\mathsf{M}\sin\chi}{\mathsf{M} + mR^2} = \frac{G\varkappa^2\sin\chi}{\varkappa^2 + R^2}; \tag{113''}$$

sie ist also von der Gestalt und Massenvertheilung des betrachteten Körpers abhängig, auch wenn derselbe unendlich klein ist, und hierdurch erklärt sich, dass die resultirende Bewegung sich ebenso verhält.

2. Bewegung einer schweren Kreisscheibe auf horizontaler Ebene unter der Wirkung der rollenden und gleitenden Reibung.

Wesentlich an der Fassung des Problemes ist wiederum, dass die Drehungsaxe horizontal und sich selbst parallel bleibt; wenn dies erfüllt ist, gilt die erhaltene Lösung auch für die Bewegung einer Kugel oder eines Rotationsellipsoides.

Von der gleitenden Reibung haben wir bereits im ersten Theil gehandelt und gesehen, dass dieselbe eine Kraft ist, welche in der Berührungsstelle der Bahn angreift, der factischen oder nur erstrebten Bewegung des Körpers relativ zur Bahn entgegenwirkt und eine Stärke besitzt, gegeben durch den Normaldruck des Körpers gegen die Bahn,

multiplicirt mit einem Factor ν, der zwischen den Grenzwerthen $\pm n$ jeden beliebigen Werth, je nach dem Grad der Inanspruchnahme, annehmen kann. n ist der der Natur der sich berührenden Körper individuelle Reibungscoëfficient.

Die rollende Reibung ist aufzufassen als eine Kraft, die dem Rollen eines Körpers entgegenwirkt, also zunächst ein seiner Rotation entgegenwirkendes Moment um eine Axe durch den Berührungspunkt ausübt, das man ebenfalls gleich dem Product aus dem Normaldruck N des Körpers gegen die Bahn in einen Factor π setzen kann, welcher zwischen den der Natur der sich berührenden Körper individuellen Grenzwerthen $\pm p$ je nach der Inanspruchnahme jeden Werth annehmen kann.

Da die gleitende Reibung an dem Hebelarm R angreifend ein Moment um den Schwerpunkt ausübt, so haben wir die folgenden beiden Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -N\nu, \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N(R\nu - \pi). \tag{114}$$

Hierbei ist φ in dem Sinne positiv gerechnet, dass es mit ξ wächst, falls der Körper rollt ohne zu gleiten; ξ rechnen wir positiv in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Wenn der Körper in positiver Richtung gleitet, so ist $\nu = +n$, wenn in negativer, so $\nu = -n$; bei reinem Rollen treten die zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe ein. Wenn der Körper in positivem Sinne rollt, ist $\pi = +p$, wenn im negativen, ist $\pi = -p$; bei reinem Gleiten treten die zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe auf.

Wir setzen nun $N = mg$, $\mathsf{M} = m\varkappa^2$ und haben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g\nu, \qquad \varkappa^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g(R\nu - \pi). \tag{114'}$$

Die erste Integration giebt:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = v_0 - g\nu t, \qquad \varkappa^2\omega = \varkappa^2\frac{d\varphi}{dt} = \varkappa^2\omega_0 + gt(R\nu - \pi), \tag{115}$$

falls v_0 die anfängliche immer positive Linear-, ω_0 die anfängliche positive oder negative Rotationsgeschwindigkeit bezeichnet. Rechnet man ξ und φ von den zur Zeit $t = 0$ stattfindenden Werthen an, so giebt die zweite Integration das Resultat:

$$\xi = v_0 t - g\nu\frac{t^2}{2}, \qquad \varkappa^2\varphi = \varkappa^2\omega_0 t + g\frac{t^2}{2}(R\nu - \pi). \tag{115'}$$

Für die Discussion nehmen wir specielle Fälle.

a) Sei zur Zeit $t = 0$ die Rotationsgeschwindigkeit ω_0 positiv, aber kleiner als v_0/R, sodass also an der Berührungsstelle

die Bewegung des Körpers in positiver Richtung stattfindet. Dann gilt zunächst:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = v_0 - gnt, \qquad R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega_0 + Rgt\frac{(Rn-p)}{\varkappa^2}; \qquad (116)$$

die gleitende und rollende Reibung wirkt im negativen Sinne mit voller Kraft.

Für den Fortgang ist wesentlich, ob im Laufe der Bewegung $d\xi/dt = v$ gleich oder kleiner als $R\,d\varphi/dt = R\omega$, d. h.

$$(v_0 - gnt) \leqq \left(R\omega_0 + Rgt\frac{Rn-p}{\varkappa^2}\right)$$

werden kann. Dies findet unter der gemachten Annahme $v_0 > \omega_0 R$ nur statt, wenn

$$n(\varkappa^2 + R^2) > Rp$$

ist; aber da die rollende Reibung in Wirklichkeit viel kleiner ist, als die gleitende, so kann man diese Beziehung als stets erfüllt ansehen.

Die Gleichungen (116) gelten also bis zu dem Augenblick t_1, wo $v = R\omega = v_1$ wird, der gegeben ist durch:

$$t_1 = \frac{(v_0 - R\omega_0)\varkappa^2}{g[n(\varkappa^2 + R^2) - Rp]}; \qquad (116')$$

zu diesem Zeitpunkt findet also ein Rollen ohne Gleiten statt. Die gleichzeitigen Werthe v_1 und ω_1 sind gegeben durch:

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{R[v_0(nR-p) + n\varkappa^2\omega_0]}{n(\varkappa^2 + R^2) - Rp}; \qquad (116'')$$

es ist bemerkenswerth, dass für verschwindende rollende Reibung ($p = 0$) dieser Ausdruck

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{R(Rv_0 + \varkappa^2\omega_0)}{\varkappa^2 + R^2}$$

frei von der gleitenden Reibung ist.

Da die Reibung als eine Widerstandskraft nur Geschwindigkeitsdifferenzen der reibenden Körper aufhebt, aber nicht solche hervorruft, so kann das Gleiten, nachdem es einmal aufgehört hat, nicht wieder beginnen, es muss also nun dauernd $v = R\omega$ bleiben und die gleitende Reibung einen zwischen $\pm n$ liegenden Werth ν besitzen, während die rollende Reibung mit voller Stärke wirkt, da ja das Rollen noch andauert. Wir haben also in der von $t = t_1$ beginnenden zweiten Periode die Beziehungen:

$$v = v_1 - g\nu(t - t_1) = R\omega = R\omega_1 + \frac{g(t-t_1)R(R\nu - p)}{\varkappa^2}, \qquad (117)$$

aus denen sich sowohl $v = R\omega$ als ν, d. h. die Inanspruchnahme der Reibung, ergiebt. Denn aus

$$-\nu\varkappa^2 = R(R\nu - p)$$

folgt

$$\nu = \frac{Rp}{R^2 + \varkappa^2}$$

und demgemäss wird:

$$v = R\omega = v_1 - \frac{g R p (t - t_1)}{R^2 + \varkappa^2}; \tag{117'}$$

die Geschwindigkeit nimmt gleichförmig bis zu Null ab und erreicht diesen Werth zur Zeit t_2, die gegeben ist durch:

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1 (R^2 + \varkappa^2)}{g R p}. \tag{117''}$$

Der ganze Vorgang stellt sich anschaulich dar in einem Coordinatensystem, das die zur Zeit t gehörigen Werthe von v und $R\omega$ enthält (Figur 28).

In der ersten Periode, wo $0 < t < t_1$ ist, nimmt v gleichförmig ab, $R\omega$ gleichförmig zu, und zwar wird, da $\varkappa^2$ erheblich kleiner als R^2 (für die Kugel gleich $\frac{2}{5} R^2$, für den Cylinder gleich $\frac{1}{2} R^2$) und p ebenfalls sehr klein neben Rn ist, die Schwerpunktsgeschwindigkeit v langsamer abnehmen, als die Rotationsgeschwindigkeit $R\omega$ eines Randpunktes zunimmt. Zur Zeit $t = t_1$ ist $R\omega = v$ und es nehmen von da ab beide gleichmässig, aber viel langsamer, als zuvor v, mit der Zeit ab.

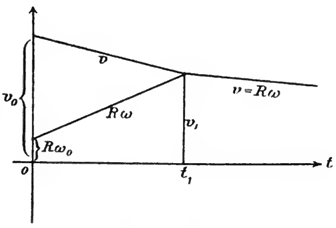


Fig. 28.

Ein specieller einfacher Fall liegt vor, wenn anfangs gar keine Rotation stattfindet, ω_0 also gleich Null ist, wie dies stattfindet, wenn die Bewegung durch einen horizontalen centrischen Stoss hervorgebracht ist. Dann gilt einfacher:

$$t_1 = \frac{v_0 \varkappa^2}{g[n(\varkappa^2 + R^2) - Rp]}, \qquad v_1 = R\omega_1 = \frac{v_0 R(nR - p)}{n(\varkappa^2 + R^2) - Rp}, \qquad t_2 - t_1 = \frac{v_1 (R^2 + \varkappa^2)}{g R p}, \tag{118}$$

und falls noch die rollende Reibung verschwindet:

$$t_1 = \frac{v_0 \varkappa^2}{g n (\varkappa^2 + R^2)}, \qquad v_1 = R\omega_1 = \frac{v_0 R^2}{\varkappa^2 + R^2}, \qquad t_2 = \infty.$$

Für eine nicht rollende, sondern nur gleitende Masse würde die Geschwindigkeit v nach einer Zeit $t' = v_0 / gn$ verschwinden; die Vergleichung dieses Resultates mit dem Vorstehenden giebt einige einfache Sätze über den Einfluss der Rotation.

b) Sei zur Zeit $t = 0$ die Rotationsgeschwindigkeit ω_0 positiv, aber grösser als v_0 / R, dann findet die Verschiebung der Elemente des Körpers an der Berühungsstelle nach der negativen Seite

hin statt; ν muss also gleich $-n$ werden, während π gleich $+p$ bleibt, da die Rotationsrichtung positiv ist.

Wir haben also:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = v_0 + gnt, \qquad R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega_0 - Rgt\frac{(Rn+p)}{\varkappa^2}; \quad (119)$$

demgemäss wird hier die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung verkleinert, die Schwerpunktsgeschwindigkeit vergrössert, und zwar erstere in höherem Grade als letztere. Zu einer Zeit

$$t_1 = \frac{(R\omega_0 - v_0)\varkappa^2}{g[n(\varkappa^2 + R^2) + Rp]} \quad (119')$$

ist $v = R\omega$ und besitzt den Werth:

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{R[v_0(Rn+p) + n\varkappa^2\omega_0]}{n(\varkappa^2 + R^2) + Rp}. \quad (119'')$$

Hier wechselt plötzlich ν Vorzeichen und Werth, es wird $\nu = Rp/(R^2 + \varkappa^2)$ und bleibt des Weiteren:

$$v = R\omega = v_1 - \frac{gRp(t - t_1)}{R^2 + \varkappa^2}, \quad (120)$$

wie in dem vorigen Falle. Figur 29 verdeutlicht den Verlauf.

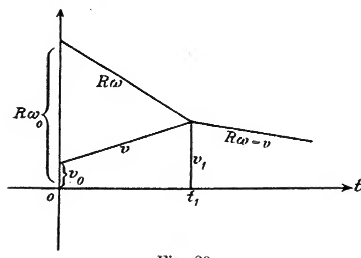


Fig. 29.

Als interessanter Specialfall bietet sich der, dass zur Zeit $t = 0$ nur eine Rotationsgeschwindigkeit ω_0 vorhanden, also $v_0 = 0$ ist. Es gilt dann:

$$t_1 = \frac{R\omega_0\varkappa^2}{g[n(\varkappa^2 + R^2) + Rp]},$$

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{Rn\omega_0\varkappa^2}{n(\varkappa^2 + R^2) + Rp}, \quad (120')$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1(R^2 + \varkappa^2)}{gRp}.$$

c) Sei zur Zeit $t = 0$ die Rotationsgeschwindigkeit negativ gleich $-\omega_0$, wo nun $\omega_0 > 0$ ist, so gelten die Hauptgleichungen aus a), nur ist ω_0 mit $-\omega_0$, p mit $-p$ zu vertauschen; also wird:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = v_0 - gnt, \qquad R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = -R\omega_0 + Rgt\frac{(Rn+p)}{\varkappa^2}. \quad (121)$$

Da v und $R\omega$ anfangs entgegengesetztes Vorzeichen haben, so muss, bevor sie einander gleich werden, entweder das eine oder das andere durch Null hindurchgehen und sein Vorzeichen wechseln. v wird gleich Null für

$$t' = \frac{v_0}{ng}, \quad (121')$$

ω wird gleich Null für

$$t'' = \frac{\omega_0 \varkappa^2}{g(Rn + p)}. \qquad (121'')$$

Sei zunächst $t'' < t'$, erreiche also ω zuerst den Werth Null, so kehrt im Zeitpunkt t'' mit der Rotation auch p sein Vorzeichen um, und es gilt von da ab:

$$v = v_0 - gnt, \qquad R\omega = g(t - t'')R\frac{(Rn - p)}{\varkappa^2}. \qquad (122)$$

Von der Zeit t_1 ab, für welche $v = R\omega$ ist, tritt dasselbe Phänomen ein, das unter a) discutirt ist (Figur 30).

Interessanter ist der Fall, dass $t' < t''$ ist, also v eher verschwindet, als ω. Hier kehrt sich mit der Richtung der Schwerpunktsgeschwindigkeit die Richtung der gleitenden Reibung nicht um, denn sie hängt nur ab von der Bewegungsrichtung der Theile des Körpers an der Berührungsstelle und diese ist positiv, so lange $v > R\omega$ ist. Es gelten also die Formeln (121) unverändert, bis $v = R\omega$ ist; dies findet statt zur Zeit:

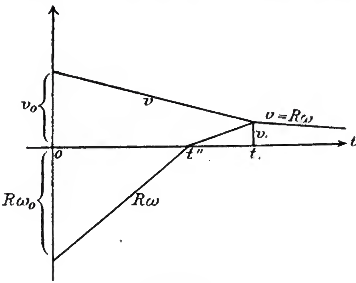


Fig. 30.

$$t_1 = \frac{\varkappa^2(v_0 + R\omega_0)}{g[n(\varkappa^2 + R^2) + Rp]}, \qquad (123)$$

während v den Werth hat

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{R[v_0(nR + p) - n\varkappa^2\omega_0]}{n(\varkappa^2 + R^2) + Rp}, \qquad (123')$$

der nach der gemachten Annahme $t' < t''$ negativ ist.

Von der Zeit t_1 ab findet die Bewegung nach dem Gesetz statt:

$$v = R\omega$$
$$= v_1 + \frac{gRp(t - t_1)}{R^2 + \varkappa^2}, \qquad (123'')$$

nämlich mit negativer bis zu Null abnehmender Geschwindigkeit.

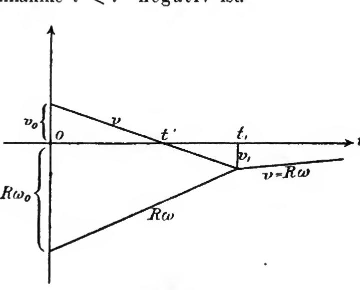


Fig. 31.

Der Vorgang ist in Figur 31 hinsichtlich des Gesetzes der Geschwindig-

keiten dargestellt. Von $t = 0$ bis $t = t'$ geht der Körper vorwärts mit rückwärts gerichteter Rotation, sowohl gleitend als rollend. Linear- und Rotationsgeschwindigkeit nehmen dabei ihrem absoluten Werth nach ab.

Zur Zeit $t = t'$ ist die Lineargeschwindigkeit v vernichtet, und die negative, noch andauernde Rotation bewirkt eine gleichförmig beschleunigte Fortschreitung in negativer Richtung, d. h. rückwärts, zusammengesetzt aus Gleiten und Rollen; um die Zeit t_1 hat die Lineargeschwindigkeit v_1 dem absoluten Werthe nach ihr Maximum erreicht und nimmt nun bei einfachem Rollen gleichförmig wieder ab bis zu Null.

Wird v und $R\omega$ gleichzeitig gleich Null, so bleibt zur Zeit t_1 der Körper stehen; die Bedingung dafür ist

$$n\varkappa^2\omega_0 = v_0(nR + p);$$

dieselbe wird für verschwindende rollende Reibung ($p = 0$) von der gleitenden Reibung ebenfalls unabhängig und giebt $\varkappa^2\omega_0 = Rv_0$.

§ 25. Anziehung und Potential räumlich vertheilter Massen nach dem Newton'schen Gesetz; Abhängigkeit der Schwerkraft vom Ort; Bestimmung der mittleren Dichte der Erde.

Das Newton'sche Gesetz für die gegenseitige Anziehung zweier Massenpunkte m und m_1 in der Entfernung e ergiebt die Grösse der wirkenden Kraft

$$K = \frac{f m m_1}{e^2}$$

und ihre Richtung zusammenfallend mit der Richtung von e; das Gesetz bleibt ungeändert, wenn die Massenpunkte ersetzt werden durch räumliche mit Masse erfüllte Volumenelemente dm und dm_1, die klein gegen ihre Entfernung sind.

Gehört dm einem endlichen Körper an, so ist die Resultirende aus den von allen seinen Elementen auf m_1 ausgeübten Kräften nach § 5 zu berechnen, indem man die parallelen Componenten aller Elementarwirkungen nach den Coordinatenaxen summirt und die so erhaltenen Gesammtcomponenten X, Y, Z nach dem Parallelogramm zusammensetzt gemäss dem Schema:

$$X = \sum K_h \cos(K_h, x), \qquad Y = \sum K_h \cos(K_h, y), \qquad Z = \sum K_h \cos(K_h, z),$$
$$K^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Für den Fall eines continuirlichen Körpers treten an Stelle der Summen Integrale über alle Volumenelemente.

Besitzt das Element dm die Coordinaten x, y, z, die Masse m_1 die Coordinaten x_1, y_1, z_1, so wird nach dem Gesagten gelten:

$$X = f m_1 \int \frac{(x - x_1)}{e^3} dm,$$
$$Y = f m_1 \int \frac{(y - y_1)}{e^3} dm, \qquad (124)$$
$$Z = f m_1 \int \frac{(z - z_1)}{e^3} dm.$$

Berücksichtigt man, dass

$$e^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

ist, dass also

$$\frac{\partial e}{\partial x_1} = -\frac{(x - x_1)}{e}, \quad \frac{\partial e}{\partial y_1} = -\frac{(y - y_1)}{e}, \quad \frac{\partial e}{\partial z_1} = -\frac{(z - z_1)}{e},$$

so erkennt man, dass man die Werthe X, Y, Z auch schreiben kann:

$$X = + f m_1 \int \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} dm,$$
$$Y = + f m_1 \int \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} dm, \qquad (124')$$
$$Z = + f m_1 \int \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} dm.$$

Hier kann man, wenn es sich um die Attraction von Punkten ausserhalb des Körpers handelt, also e niemals unendlich klein wird, das Differentialzeichen unbedenklich vor das Integral ziehen — im andern Falle bedarf es dafür eines besondern Beweises — und erhält so:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \qquad (125)$$

gleich den negativen partiellen Differentialquotienten eines Potentiales

$$\Phi = -f m_1 \int \frac{dm}{e}, \qquad (125')$$

das nach p. 97 die Summe aller Elementarpotentiale ist, welche die einzelnen Massenelemente dm auf m_1 ausüben.

I. Die Ausrechnung entweder der Integrale für X, Y, Z oder des einen Integrales für Φ bei gegebener Gestalt und Massenvertheilung des anziehenden Körpers ist nur in wenigen Fällen mit Strenge durchführbar. Ehe wir einige solche Fälle behandeln, geben wir eine Reihenentwickelung für jene Grössen, welche nur voraussetzt, dass die Dimensionen des Körpers klein sind gegen seine Entfernung von dem angezogenen Massenpunkt.

Legen wir den Coordinatenanfang in's Innere des Körpers, so sind die Coordinaten x, y, z von derselben Grössenordnung wie seine Dimen-

sionen, also klein gegen e, und wir können demgemäss in dem Werthe für Φ die Grösse $1/e$ nach dem Mac Laurin'schen Lehrsatz entwickeln.

Dabei beachten wir zur Vereinfachung der Rechnung, dass x, y, z in $1/e$ nur in den Verbindungen $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ vorkommen, und dass deshalb z. B.

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial x_1}$$

ist, falls mit dem Index $_0$ bezeichnet wird, dass in der betreffenden Function $x = y = z = 0$ zu setzen ist.

Demgemäss wird:

$$\begin{aligned}\Phi = -fm_1 \int \Bigg(& \frac{1}{e_0} - x\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial x_1} - y\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial y_1} - z\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial z_1} \\ & + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1^2} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1^2} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1^2} \\ & + yz\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1 \partial z_1} + zx\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1 \partial x_1} + xy\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1 \partial y_1} + \cdots \Bigg) dm.\end{aligned} \tag{126}$$

Benutzen wir die frühern Bezeichnungen ξ, η, ζ für die Schwerpunktscoordinaten, Ξ, H, Z und Ξ', H′, Z′ für die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers um die Coordinatenaxen, so giebt dies:

$$\begin{aligned}\Phi = -fm_1 \Bigg\{ & m\left(\frac{1}{e_0} - \xi\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial x_1} - \eta\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial y_1} - \zeta\frac{\partial \frac{1}{e_0}}{\partial z_1}\right) \\ & + \frac{1}{4}(\mathrm{H}+\mathrm{Z}-\Xi)\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4}(\mathrm{Z}+\Xi-\mathrm{H})\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1^2} + \frac{1}{4}(\Xi+\mathrm{H}-\mathrm{Z})\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1^2} \\ & - \Xi'\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1 \partial z_1} - \mathrm{H}'\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1 \partial x_1} - \mathrm{Z}'\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1 \partial y_1} \mp \cdots \Bigg\}.\end{aligned} \tag{126'}$$

Dieser Ausdruck wird vereinfacht, wenn man den Coordinatenanfangspunkt in den Schwerpunkt, die Axen in die zu ihm gehörigen Hauptträgheitsaxen legt, also

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \quad \Xi' = \mathrm{H}' = \mathrm{Z}' = 0, \quad \Xi = \mathrm{A}, \quad \mathrm{H} = \mathrm{B}, \quad \mathrm{Z} = \Gamma$$

setzt, unter A, B, Γ die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt verstanden. Benutzt man noch weiter, dass aus $e_0^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ folgt

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1^2} = \frac{3x_1^2}{e_0^5} - \frac{1}{e_0^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1^2} = \frac{3y_1^2}{e_0^5} - \frac{1}{e_0^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1^2} = \frac{3z_1^2}{e_0^5} - \frac{1}{e_0^3}, \tag{126''}$$

so findet man

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1^2} = 0 \tag{126'''}$$

und erhält dadurch endlich:

$$\Phi = -fm_1\left(\frac{m}{e_0} - \frac{\mathsf{A}}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial x_1^2} - \frac{\mathsf{B}}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial y_1^2} - \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{e_0}}{\partial z_1^2} \pm \cdots\right). \qquad (127)$$

Da A, B, Γ in Bezug auf die Dimensionen des Körpers von zweiter Ordnung sind, so ergiebt diese Formel den Satz:

Das Potential der Wirkung eines endlichen Körpers m auf einen äussern Massenpunkt m_1 wird, wenn man das Quadrat des Verhältnisses aus den Dimensionen des Körpers und der Entfernung seines Schwerpunktes von m_1 neben Eins vernachlässigt, gegeben durch $-fmm_1/e_0$; ist also dasselbe, als wäre die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt vereinigt.

Die hierbei ignorirten Glieder zweiter Ordnung enthalten die Hauptträgheitsmomente des Körpers um seinen Schwerpunkt als Factoren und zerstören sich nach (126'''), wenn diese gleich sind, sodass das obige Resultat für Körper, deren Hauptträgheitsellipsoid um den Schwerpunkt eine Kugel ist, z. B. für alle regulären Polyëder, bis auf Glieder dritter Ordnung exclusive, und wenn dieselben überdies in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen symmetrisch sind, gar bis auf solche vierter Ordnung exclusive gilt, da für solche alle die Factoren der Glieder dritter Ordnung, welche die Form $\int x^2 y\, dm, \int x^3 dm \ldots$ haben, verschwinden.

Dieselben Sätze, wie für das Potential Φ, gelten auch für die Kraftcomponenten X, Y, Z.

Behält man die Glieder zweiter Ordnung bei, so erhält man einen zweiten Grad der Annäherung, den wir jetzt näher betrachten wollen.

Führt man die Cosinus α, β, γ der Winkel ein, welche e_0 mit den Hauptträgheitsaxen einschliesst, setzt also $\alpha = x_1/e_0$, $\beta = y_1/e_0$, $\gamma = z_1/e_0$, so erhält man nach (126''):

$$\Phi = -fm_1\left(\frac{m}{e_0} - \frac{1}{2e_0^3}[\mathsf{A}(3\alpha^2-1) + \mathsf{B}(3\beta^2-1) + \Gamma(3\gamma^2-1)]\right). \qquad (127')$$

In Rücksicht auf den Werth, welchen das Trägheitsmoment M um die Richtung von e_0 nach Formel (37'') besitzt, schreibt sich dies auch:

$$\Phi = -f\frac{m_1}{e_0}\left(m + \frac{1}{2e_0^2}(\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma - 3\mathsf{M})\right), \qquad (127'')$$

oder unter Benutzung der Trägheitsradien:

$$= -f\frac{mm_1}{e_0}\left(1 + \frac{1}{2e_0^2}(\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_z^2 - 3\varkappa^2)\right). \qquad (127''')$$

Dies ergiebt, da M resp. $\varkappa$ mit der Richtung von e_0 variirt, sogleich den Satz:

Die Potentialflächen $\Phi =$ Const. der Wirkung eines Körpers m auf einen fernen Massenpunkt m_1 in zweiter Annäherung sind symmetrisch in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen des Körpers durch seinen Schwerpunkt. Sie schneiden auf einem Radiusvector um so kürzere Strecken ab, je grösser das auf diesen Radius bezogene Trägheitsmoment des Körpers m ist; der Unterschied ist um so geringer, je weiter vom Schwerpunkt ab die Potentialfläche liegt und verschwindet im Unendlichen. Daraus folgt, dass die Attraction des Körpers auf ferne Punkte ihre grössten resp. kleinsten Werthe parallel der Axe seines kleinsten resp. grössten Trägheitsmomentes um seinen Schwerpunkt besitzt.

Die Richtung der wirkenden Kraft weicht in dem entgegengesetzten Sinne von der Verbindungslinie des angezogenen Punktes mit dem Schwerpunkt des Körpers ab, als die Normale auf dem Trägheitsellipsoid des Körpers um den Schwerpunkt vom Radiusvector. —

II. Das Newton'sche Attractionsgesetz ist zunächst nur für Massenpunkte oder gegen ihre Entfernungen unendlich kleine massenerfüllte Volumina aufgestellt; es ist die Frage, in wie weit es einen endlichen Werth behält, wenn man die angezogene Masse der anziehenden unendlich nahe rücken lässt. Dieser Punkt ist deshalb von Wichtigkeit, weil man annimmt, dass unendlich grosse Kräfte in der Natur nicht vorkommen, und im Allgemeinen Kraftgesetze ausschliesst, welche, auf wirklich mögliche Verhältnisse angewandt, zu unendlichen Werthen führen.

Wir betrachten demgemäss einen endlichen mit beliebiger, aber endlicher Dichte erfüllten Körper und einen ihn berührenden Massenpunkt m_1. Es lässt sich zeigen, dass die von ersterem auf letzteren nach dem Newton'schen Gesetz ausgeübte Kraft immer endlich ist. Hierzu zerlegen wir den Körper in Raumelemente dk, indem wir von dem Massenpunkt m_1 aus unendlich feine Kegel von beliebigem Querschnitt durch ihn hindurch legen und diese durch unendlich viele um m_1 construirte Kugelflächen zerschneiden.

Möge einer dieser Kegel aus einer Kugel vom Radius Eins das Flächenelement $d\omega$ herausschneiden, das man seine Kegelöffnung nennt, so ist ein Raumelement im Abstand r von m_1 gegeben durch

$$dk = r^2 d\omega\, dr,$$

falls dr den Abstand der construirten Kugelflächen an der betrachteten Stelle bezeichnet. Man kann hiernach schreiben:

$$X = fm_1 \iint \varepsilon \cos(r, x)\, d\omega\, dr,$$
$$Y = fm_1 \iint \varepsilon \cos(r, y)\, d\omega\, dr, \tag{128}$$
$$Z = fm_1 \iint \varepsilon \cos(r, z)\, d\omega\, dr.$$

Ist die Dichtigkeit ε constant, so lässt sich die Integration nach r ausführen und giebt, da sie von $r = 0$ bis zu einem grössten Werth $r = \bar{r}$ zu erstrecken ist:

$$X = \varepsilon fm_1 \int \bar{r} \cos(\bar{r}, x)\, d\omega,$$
$$Y = \varepsilon fm_1 \int \bar{r} \cos(\bar{r}, y)\, d\omega, \tag{128'}$$
$$Z = \varepsilon fm_1 \int \bar{r} \cos(\bar{r}, z)\, d\omega.$$

Beide Werthsysteme zeigen, dass, wenn die wirkende Masse endliche Ausdehnung und Dichte hat, die Kraftcomponenten auf einen Massenpunkt niemals unendlich werden können, denn die zu integrirende Function zeigt sich als stets endlich; die Componenten werden sogar unendlich klein, wenn statt der endlichen Masse m_1 des Massenpunktes ein unendlich kleines Massenelement dm_1 angezogen wird.

Hieran ändert sich nichts, wenn man den anziehenden Körper den angezogenen Punkt vollständig umschliessen lässt, und man kann daher den Satz aussprechen:

Körper von endlichen Dimensionen und endlichen Dichtigkeiten üben nach dem Newton'schen Gesetz auf Massenpunkte von endlicher Masse, mögen dieselben ausserhalb, auf der Oberfläche oder innerhalb der Masse liegen, jederzeit Kraftcomponenten von endlicher Grösse aus.

Dieser Satz lässt sich ungeändert auf das Potential übertragen, da dasselbe die Entfernung e der auf einander wirkenden Massenelemente in einer noch niedrigeren Potenz im Nenner enthält, als die Kraft.

Demgemäss kann man auch zur Bestimmung der Anziehung endlicher Körper von endlicher Dichte unbedenklich stets den vereinfachenden Weg über das Potential einschlagen, denn da in dem Integral

$$\Phi = -fm_1 \int \frac{dm}{e}$$

die zu integrirende Function sich auf eine Form bringen lässt, welche endlich bleibt, auch wenn m_1 im Innern des Körpers liegt, so kann man auch für innere Punkte die oben für äussere gezogene Folgerung anwenden und setzen:

$$X = fm_1 \int \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} dm = fm_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dm}{e} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. — \tag{128''}$$

Wir wenden uns nun zur Bestimmung des Potentiales einer homogenen, unendlich dünnen Hohlkugel oder Kugelschicht auf einen im äussern und einen im innern Raume liegenden Massenpunkt m_1.

Sei ϱ der Radius der Kugelschicht, ϑ ihre constante Dicke, ε ihre constante Dichtigkeit, r_1 der Abstand des angezogenen Massenpunktes vom Kugelcentrum.

Wir zerlegen die Kugelschicht nach dem p. 158 angewandten Verfahren in Volumenelemente, deren Grösse

$$dk = \varrho^2 \vartheta \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi$$

ist, und erhalten, da die Entfernung e von dk nach m_1 gegeben ist durch

$$e^2 = \varrho^2 + r_1^2 - 2 \varrho r_1 \cos \varphi,$$

den Werth:

$$\Phi = - f m_1 \int \frac{dm}{e} = - f m_1 \varrho^2 \vartheta \varepsilon \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 + r_1^2 - 2 \varrho r_1 \cos \varphi}}. \qquad (129)$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Wurzelgrösse, als den Werth der Entfernung e darstellend, stets positiv zu nehmen ist.

Wir erhalten durch Integration:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \frac{2 \pi f m_1 \varrho \vartheta \varepsilon}{r_1} \left[\sqrt{\varrho^2 + r_1^2 - 2 \varrho r_1 \cos \varphi} \right]_{\varphi = 0}^{\varphi = \pi} \\ &= - \frac{2 \pi f m_1 \varrho \vartheta \varepsilon}{r_1} \left(\sqrt{(\varrho + r_1)^2} - \sqrt{(\varrho - r_1)^2} \right). \end{aligned} \qquad (129')$$

Bei Ausführung der Wurzelzeichen sind die Fälle zu unterscheiden, dass der Punkt m_1 ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegt, also $\varrho \lesseqgtr r_1$ ist.

Für äussere Punkte ist

$$r_1 > \varrho, \qquad \text{also} \qquad \Phi_a = - \frac{f m_1 4 \pi \varrho^2 \vartheta \varepsilon}{r_1} = - \frac{f m_1 m_s}{r_1}, \qquad (129'')$$

wenn m_s die Masse der homogenen Kugelschicht ist.

Für innere Punkte ist

$$r_1 < \varrho, \qquad \text{also} \qquad \Phi_h = - f m_1 4 \pi \varrho \vartheta \varepsilon, \qquad (129''')$$

demnach unabhängig vom Orte des angezogenen Punktes m_1.

Es gilt hiernach der Satz:

Das Potential einer homogenen unendlich dünnen Kugelschicht oder einer materiellen Kugelfläche auf äussere Punkte ist dasselbe, als wäre ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt, das auf innere Punkte ist constant.

Die negativen Kraftcomponenten bestimmen sich aus dem Potential durch Differentiation nach den Coordinaten des angezogenen Punktes m_1, die negative resultirende Kraft nach p. 92 durch Differentiation nach

der Normalen n auf der Fläche constanten Potentiales, welche durch m_1 hindurchgeht.

In unserem Falle sind die Potentialflächen mit der gegebenen concentrische Kugeln, ihre Normale fällt also in die Richtung von r_1; vertauschen wir einfach n mit r_1, so beziehen wir die Kraft zugleich auf die vom Kugelmittelpunkt hinweg positiv gerechnete Richtung.

Demgemäss erhalten wir die Grösse der Kraft für äussere Punkte, wo $r_1 > \varrho$:

$$K_a = -\frac{f m_1 m_s}{r^2};$$

für innere Punkte, wo $r_1 < \varrho$:

$$K_h = 0. \qquad (130)$$

Eine homogene unendlich dünne Kugelschicht wirkt auf einen äussern Punkt ebenso, als wäre ihre Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt, auf einen innern Punkt wirkt sie überhaupt nicht.

Hiernach erledigt sich sogleich auch die Wirkung einer in concentrischen Schichten homogenen Kugelschaale von endlicher Dicke, deren Radien wir mit R_i und R_a und deren Masse wir mit M_s bezeichnen; denn wir können sie in Schichten der vorhin betrachteten Art von der Dicke $\vartheta = d\varrho$ zerlegen und deren Potentiale und Attractionskräfte einfach summiren. Es ergiebt sich so:

$$\Phi_a = -\frac{f m_1 M_s}{r_1}, \qquad \Phi_h = -f m_1 4\pi \int_{R_i}^{R_a} \varepsilon \varrho \, d\varrho; \qquad (131)$$

$$K_a = -\frac{f m_1 M_s}{r_1^2}, \qquad K_h = 0. \qquad (131')$$

Vorstehender Satz gestattet für Punkte im äussern und im Hohlraum unmittelbar die Uebertragung auf Kugelschaalen von endlicher Dicke, welche in concentrischen Schichten homogen sind.

Anders, wenn der angezogene Punkt innerhalb der Masse selbst liegt.

In diesem Falle legt man durch ihn eine zu den gegebenen concentrische Kugelfläche, die also den Radius r_1 besitzt; für die innerhalb derselben liegende Masse m_i ist der Punkt m_1 dann ein äusserer, sie giebt also zu dem Potential einen Antheil $-f m_1 m_i / r_1$; für die ausserhalb liegende Masse m_a ist m_1 ein innerer Punkt, jene giebt also zu dem Potential einen Antheil:

$$-f m_1 4\pi \int_{r_1}^{R_a} \varepsilon \varrho \, d\varrho.$$

Also hat das Potential einer in concentrischen Schichten homogenen Hohlkugel für einen Punkt innerhalb der Masse den Werth:

$$\Phi_i = -fm_1\left(\frac{m_i}{r_1} + 4\pi\int_{r_1}^{R_a}\varepsilon\varrho\,d\varrho\right), \quad \text{wobei} \quad m_i = 4\pi\int_{R_i}^{r_1}\varepsilon\varrho^2\,d\varrho \qquad (131'')$$

ist; die auf ihn ausgeübte Kraft hat die Grösse:

$$K_i = -\frac{fm_1 m_i}{r_1^2}. \qquad (131''')$$

Besonders einfach werden die Resultate, wenn die ganze Kugelschaale von gleicher Dichtigkeit ist. Hier ist, falls M_s ihre Masse bezeichnet:

$$\Phi_a = -\frac{fm_1 M_s}{r_1}, \qquad \Phi_i = -\frac{fm_1\, 2\pi\varepsilon}{3}\left[3R_a^2 - \frac{2R_i^3}{r_1} - r_1^2\right],$$

$$\Phi_h = -fm_1\, 2\pi\varepsilon\,(R_a^2 - R_i^2), \qquad (132)$$

$$K_a = -\frac{fm_1 M_s}{r_1^2}, \qquad K_i = -\frac{fm_1\, 4\pi\varepsilon}{3}\left(r_1 - \frac{R_i^3}{r_1^2}\right), \qquad K_h = 0.$$

Die für eine homogene Vollkugel gültigen Werthe erhält man daraus, indem man R_a mit R, M_s mit M vertauscht und $R_i = 0$ setzt; sie lauten:

$$\Phi_a = -\frac{fm_1 M}{r_1}, \qquad \Phi_i = -\frac{fm_1\, 2\pi\varepsilon}{3}(3R^2 - r_1^2),$$

$$K_a = -\frac{fm_1 M}{r_1^2}, \qquad K_i = -\frac{fm_1\, 4\pi\varepsilon\, r_1}{3}. \text{ —} \qquad (132')$$

Es ist von Interesse, dass man die beiden Sätze für homogene unendlich dünne Kugelschaalen durch eine geometrische Betrachtung erweisen kann.

Dass alle von der Schaale auf einen Punkt m_1 in ihrem Hohlraum ausgeübten Kräfte sich zerstören, erkennt man, indem man in der oben besprochenen Weise die Schaale mittelst unendlich feiner durch den Punkt m_1 hindurch gelegter Elementarkegel in Volumenelemente zerlegt. Je zwei einander entsprechende Elemente dm_a und dm_b in Figur 32 geben dann gleiche und entgegengesetzte Wirkungen.

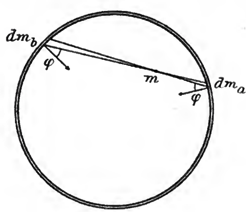


Fig. 32.

Denn von dm_a aus wird parallel der Axe des Kegels wirken die Kraft

$$K_{(a)} = \frac{fm_1 dm_a}{r_a^2}, \text{ von } dm_b \text{ aus } K_{(b)} = \frac{fm_1 dm_b}{r_b^2}$$

in der entgegengesetzten Richtung.

Nun ist aber ersichtlich

$$dm_a = r_a^2 d\omega\,\vartheta\,\varepsilon\cos\varphi,$$
$$dm_b = r_b^2 d\omega\,\vartheta\,\varepsilon\cos\varphi,$$

wo $d\omega$, die dem Kegel entsprechende Oeffnung, für beide Oberflächenelemente der Kugel gleiche Grösse besitzt. Sonach ist

$$K_{(a)} = K_{(b)},$$

und ebenso wie die Elemente dm_a und dm_b heben sich alle übrigen in ihrer Wirkung auf m_1 paarweise auf.

Um zu zeigen, dass für äussere Punkte die Wirkung der Schaale zu ersetzen ist durch diejenige ihrer ganzen im Centrum concentrirten Masse, ziehen wir von m_1 eine Tangente an die Kugelfläche und fällen von der Berührungsstelle ein Loth auf die Axe $\overline{om_1}$; um den Fusspunkt construiren wir eine Hülfskugel vom Radius Eins.

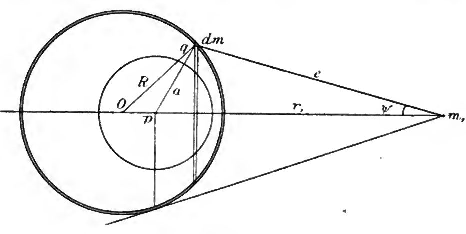


Fig 33.

Als Massenelement dm wählen wir die Masse einer unendlich schmalen Zone, die durch zwei Ebenen normal zur Axe $\overline{om_1}$ aus der Kugelschicht ausgeschnitten wird. Ist die Grösse ihrer Grundfläche dF, so wird $dm = \vartheta \varepsilon dF$, und die Kraft parallel $\overline{om_1}$ ist

$$K = fm_1 \vartheta \varepsilon \int \frac{dF}{e^2} \cos\psi.$$

Das Integral ist über alle Zonen dF zu nehmen.

Die Zone projiciren wir auf die Hülfskugel nach deren Centrum hin; die Grösse der Projection wird dann

$$d\omega = \frac{dF \cos(a, R)}{a^2}.$$

Nun ist

$$\triangle\, opq \backsim \triangle\, oqm_1,$$

also $\sphericalangle (a, R) = \psi$, und $a : R = e : r_1$, daher wird

$$d\omega = \frac{r_1^2\, dF \cos\psi}{R^2 e^2};$$

setzt man diesen Werth aber in den Ausdruck für K, so erhält man:

$$K_a = fm_1 \frac{\vartheta \varepsilon R^2}{r_1^2} \int d\omega,$$

oder, da über die ganze Kugel zu integriren ist,

$$K_a = fm_1 \frac{4\pi R^2 \vartheta \varepsilon}{r_1^2} = \frac{fm_1 M}{r_1^2}.$$

III. Von den oben gefundenen Werthen der Anziehung einer in concentrischen Schichten homogenen Kugel auf einen Massenpunkt kann man eine Anwendung machen, um die Gesetze abzuleiten, nach denen die Schwerkraft mit der Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdcentrum variirt. Denn jeder Körper, mit dem wir experimentiren, ist gegenüber der Grösse des Erdradius verschwindend klein und demgemäss als materieller Punkt zu behandeln. Wir betrachten hierbei die Erde als eine Kugel der beschriebenen Art und sehen von ihrer Rotation und der dadurch hervorgerufenen Centrifugalkraft ab.

Dann gilt für Stellen ausserhalb der Erde nach (132'), dass die Beschleunigung nach dem Erdcentrum hin

$$g_a = \frac{fM_e}{r_1^2} \tag{133}$$

ist, demnach ebenso mit der Entfernung variirt, als wäre die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt vereinigt. Ist $r_1 = R + h$, wo also h die Höhe über der Erdoberfläche bezeichnet, und ist h so klein gegen R, dass man $(h/R)^2$ neben Eins vernachlässigen kann, so ergiebt sich:

$$g_a = \frac{fM_e}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g^0\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \tag{133'}$$

falls $g^0 = fM/R^2$ die Grösse von g an der Erdoberfläche selbst — d. h. im Meeresniveau — bezeichnet.

Im Innern der Erde gilt unter den gemachten Voraussetzungen nach (131''):

$$g_i = f\frac{m_i}{r_1^2} = \frac{4\pi f}{r_1^2}\int_0^{r_1} \varepsilon \varrho^2 d\varrho, \tag{134}$$

worin m_i die Masse innerhalb der Kugel vom Radius r_1 bezeichnet. Setzt man hierin $r_1 = R - k$, wo also k die Tiefe unter Meeresniveau bedeutet, entwickelt nach Potenzen von k und beschränkt sich auf das erste Glied, so erhält man:

$$g_i = f\left(\frac{M}{R^2} + k\left[\frac{2M}{R^3} - 4\pi\,\varepsilon_0\right]\right); \tag{134'}$$

hierin bezeichnet M die ganze Erdmasse, ε_0 ihre Dichtigkeit an der Oberfläche. Unter Benutzung des Werthes $g^0 = fM/R^2$ lautet diese Gleichung:

$$g_i = g^0\left(1 + \frac{2k}{R}\left[1 - \frac{2\pi\varepsilon_0 R^3}{M}\right]\right). \tag{134''}$$

Sie zeigt, dass beim Eindringen in die Erde die Schwerkraft anfangs zu- oder abnimmt, jenachdem

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 R^3}{M} \lesseqgtr 1 \tag{135}$$

ist. Führt man eine mittlere Dichte ε_m der Erde durch die Beziehung

$$M = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_m R^3 \tag{135'}$$

ein, so lautet die obige Bedingung

$$\varepsilon_0 \lesseqgtr \tfrac{2}{3}\varepsilon_m, \tag{135''}$$

und diese sagt:

Jenachdem bei einer in concentrischen Schichten homogenen Kugel die Dichtigkeit der Oberflächenschicht kleiner oder grösser ist, als zwei Drittel der mittlern Dichtigkeit der ganzen Kugel, nimmt die Anziehung innerhalb der Oberflächenschicht von aussen nach innen zu oder ab.

Bei einer homogenen Kugel findet das Letztere statt, denn hier ist $\varepsilon_0 = \varepsilon_m$, in Folge dessen nimmt auch die Anziehung mit wachsender Tiefe unter der Oberfläche ab; bei der Erde gilt das Umgekehrte, also muss hier im Mittel $\varepsilon_0 < \frac{2}{3}\varepsilon_m$ sein.

Die Beobachtung der Zunahme der Schwerkraft beim Eindringen in die Erde kann zur Bestimmung des Verhältnisses $\varepsilon_0/\varepsilon_m$ benutzt werden. Nennt man den Werth von g, welcher der Tiefe k entspricht, g', so gilt nach den Formeln (134'') und (135'):

$$\frac{g'-g^0}{g^0} = \frac{2k}{R}\left(1 - \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_m}\right) \tag{136}$$

oder

$$\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_m} = 1 - \frac{g'-g^0}{g^0}\cdot\frac{R}{2k}. \tag{136'}$$

Der practischen Anwendung stellt sich die Schwierigkeit entgegen, dass die Tiefen, in welche man in die Erde eindringen kann, nicht so bedeutend sind, dass man ihnen gegenüber die Unregelmässigkeiten der Gestalt der Erdoberfläche vernachlässigen könnte, und dass gerade die Oberflächenschicht der Erde durch die Differenz der Dichte von Land und Meer weit entfernt ist, der bei der mathematischen Behandlung gemachten Voraussetzung einer constanten Dichte zu entsprechen. Es kann demgemäss die Benutzung der obigen Formel nur zu ganz rohen Annäherungen führen.

Airy hat in Harton die Beschleunigung durch die Schwere an der Erdoberfläche und auf dem Grunde eines 383 m tiefen Schachtes beobachtet und $(g'-g^0)/g^0 = 0{,}000\,052$ gefunden. Nimmt man hinzu, dass $R = 6\,367\,000$ m ist, so erhält man für $3\varepsilon_0/2\varepsilon_m$ den Werth 0,567. Um hieraus ε_m zu berechnen, muss man den Werth von ε_0 kennen; Airy nahm an, dass man hierfür die mittlere Dichtigkeit der Oberflächenschicht der Erde in der Nähe des Beobachtungsortes einsetzen dürfe, die er auf 2,5 schätzte. Wendet man diesen Werth an, so erhält man $\varepsilon_m = 6{,}62$ — eine Zahl, welche gegenüber den nach später zu besprechenden andern Methoden erhaltenen sehr gross erscheint.

Indessen ist die Berechtigung dieser Airy'schen Annahme mehr als zweifelhaft, da oben (p. 266) erwiesen ist, dass Volumenelemente, die durch denselben von einem innern Punkt aus nach beiden Seiten hin construirten Elementarkegel aus verschiedenen Stellen derselben homogenen Kugelschicht ausgeschnitten werden, auf den innern Punkt gleiche Wirkung üben, nicht etwa das nähere eine grössere. Will man also überhaupt für die Oberflächenschicht der Erde eine constante mittlere Dichte einführen, so wird dieselbe schon wegen der grossen vom Meere eingenommenen Bereiche erheblich kleiner als 2,5 zu wählen sein. Nimmt man z. B. $\varepsilon_0 = 2{,}0$, so findet sich $\varepsilon_m = 5{,}3$; in jedem Falle aber erhält man einen Werth, der darauf hinweist, dass im Erdinnern Stoffe von grösserer Dichte erheblich häufiger vorkommen, als an der Erdoberfläche.

Verbinden wir die soeben erhaltenen Resultate (133') und (134'') für die Aenderung der Beschleunigung der Schwere beim Fortschreiten längs des Radius nach aussen und innen, nämlich die Formeln

$$g_a = g^0\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \qquad g_i = g^0\left(1 + \frac{2k}{R}\left(1 - \frac{2\pi\varepsilon_0 R^3}{M}\right)\right),$$

mit der früher p. 53 erhaltenen, welche die in Folge der Centrifugalkraft an der Erdoberfläche stattfindende Aenderung mit der geographischen Breite ψ giebt, nämlich mit

$$g^0 = g_0\left(1 - \frac{R\varkappa^2\cos^2\psi}{g_0}\right),$$

so erhalten wir das Gesetz, nach welchem die Schwere auf einer kugelförmigen und in concentrischen Schichten homogenen, rotirenden Erde mit dem Ort variiren würde. $\varkappa$ stellt die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation dar, g_0 die Beschleunigung durch die Schwere im Meeresniveau am Pol, wo die Centrifugalkraft nicht wirkt.

Es ist dabei vorausgesetzt, dass in allen drei vorstehenden Formeln das in der Klammer neben Eins stehende Glied so klein ist, dass sein Quadrat vernachlässigt werden kann, also die wegen der Höhen- und Breitenänderung angebrachten Correctionen sich einfach addiren.

In derselben Annäherung kann man die letzte Formel auch schreiben:

$$g^0 = g_0\left(1 - \frac{R\varkappa^2}{g_0} + \frac{R\varkappa^2\sin^2\psi}{g_0}\right) = g_A\left(1 + \frac{R\varkappa^2\sin^2\psi}{g_0}\right),$$

worin g_A die Beschleunigung der Schwere unter dem Aequator bezeichnet.

Da die Erde die im Vorstehenden über Gestalt und Massenvertheilung gemachten Annahmen nicht streng erfüllt, so sind die aus

jenen folgenden Formeln auch nur Annäherungen; begreiflicher Weise zeigt sich besonders die letztere durch die Beobachtung nur unvollkommen bestätigt, da der Einfluss der geographischen Breite den der Höhe in der Praxis bedeutend überwiegt. Der Coëfficient von $\sin^2\psi$, nämlich

$$\frac{R\varkappa^2}{g_0} = \frac{4\pi^2 R}{g_0 T^2},$$

worin die Umdrehungszeit T 86164 Secunden beträgt, da die absolute Drehung und nicht die gegen die Sonne maassgebend ist, bestimmt sich zu etwa $1/283 = 0{,}00353$. Die Beobachtungen lassen sich angenähert wiedergeben durch die Formel:

$$g^0 = 9{,}781\,(1 + 0{,}00512 \sin^2\psi);$$

die Vergleichung mit dem nach der Formel berechneten Resultat zeigt, dass der von uns vernachlässigte Einfluss der ellipsoidischen Gestalt der Erde auf das Gesetz von g^0 ein sehr bedeutender ist. —

IV. Wir kehren nunmehr zu der allgemeineren Betrachtung der Anziehung nach dem Newton'schen Gesetz zurück.

Ist der von m angezogenene Massenpunkt m_1 ein mit Masse erfülltes Raumelement eines zweiten endlichen Körpers, so sind die Componenten der Kraft, welche dieser Körper von dem ersteren erfährt,

$$\begin{aligned}
(X) &= f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1},\\
(Y) &= f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1},\\
(Z) &= f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1},
\end{aligned} \tag{137}$$

ihre Drehungsmomente um Parallele zu den Coordinatenaxen durch die Stelle x_1^0, y_1^0, z_1^0

$$\begin{aligned}
(L) &= f\int dm_1 \int dm \left((y_1 - y_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} - (z_1 - z_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} \right),\\
(M) &= f\int dm_1 \int dm \left((z_1 - z_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} - (x_1 - x_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} \right),\\
(N) &= f\int dm_1 \int dm \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} - (y_1 - y_1^0) \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} \right).
\end{aligned} \tag{137'}$$

Diese Grössen lassen sich einfach ausdrücken durch eine Function (Φ), die wir aus dem Potential Φ der Wirkung des Körpers m auf

das Element dm_1 in derselben Weise bilden, wie die Componentensummen $(X), \ldots$ aus den Einzelcomponenten $X, \ldots$, nämlich durch Integration über dm_1; wir nennen sie das Potential der Wechselwirkung zwischen m und m_1, und definiren sie durch die Gleichung:

$$(\Phi) = -f\int dm_1 \int dm \frac{1}{e} \cdot \tag{138}$$

Bildet man die allgemeinste Variation dieser Function, welche durch eine Bewegung des starren Körpers m hervorgebracht wird, so lautet diese, da nur e variabel ist:

$$\delta(\Phi) = -f\int dm_1 \int dm \left(\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} \delta z_1 \right); \tag{138'}$$

$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ sind hierbei die allgemeinsten Werthe der Verschiebungscomponenten für das Massenelement dm_1, die bei einem starren Körper möglich sind. Wir haben in § 16 verschiedene Weisen besprochen, diese Verschiebungen durch sechs von einander unabhängige Bewegungen auszudrücken, und wollen nunmehr die in (9) gegebenen Werthe benutzen, welche lauten

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta x_1^0 + (z_1 - z_1^0)\,\delta\mu_1 - (y_1 - y_1^0)\,\delta\nu_1, \\ \delta y_1 &= \delta y_1^0 + (x_1 - x_1^0)\,\delta\nu_1 - (z_1 - z_1^0)\,\delta\lambda_1, \\ \delta z_1 &= \delta z_1^0 + (y_1 - y_1^0)\,\delta\lambda_1 - (x_1 - x_1^0)\,\delta\mu_1 \end{aligned} \tag{138''}$$

und $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ darstellen durch die Verschiebungen $\delta x_1^0, \delta y_1^0, \delta z_1^0$ eines in dem Körper willkürlich angenommenen Punktes x_1^0, y_1^0, z_1^0 parallel zu den Coordinatenaxen und durch die Drehungen $\delta\lambda_1, \delta\mu_1, \delta\nu_1$ um Parallele zu den Coordinatenaxen durch x_1^0, y_1^0, z_1^0.

Setzt man diese Werthe ein, so wird $\delta(\Phi)$ die Form annehmen:

$$\delta(\Phi) = \frac{\partial(\Phi)}{\partial x_1^0}\delta x_1^0 + \frac{\partial(\Phi)}{\partial y_1^0}\delta y_1^0 + \frac{\partial(\Phi)}{\partial z_1^0}\delta z_1^0 + \frac{\partial(\Phi)}{\partial \lambda_1}\delta \lambda_1 + \frac{\partial(\Phi)}{\partial \mu_1}\delta \mu_1 + \frac{\partial(\Phi)}{\partial \nu_1}\delta \nu_1,$$

worin die partiellen Differentialquotienten andeuten, dass nur je eine der sechs unabhängigen Variationen $\delta x_1^0, \delta y_1^0, \delta z_1^0, \delta\lambda_1, \delta\mu_1, \delta\nu_1$ stattfindend gedacht ist; es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \delta(\Phi) = -\Bigg[& \delta x_1^0 f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} + \delta y_1^0 f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} + \delta z_1^0 f\int dm_1 \int dm \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} \\ & + \delta\lambda_1 f\int dm_1 \int dm \left((y_1 - y_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} - (z_1 - z_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} \right) \\ & + \delta\mu_1 f\int dm_1 \int dm \left((z_1 - z_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} - (x_1 - x_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial z_1} \right) \\ & + \delta\nu_1 f\int dm_1 \int dm \left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial y_1} - (y_1 - y_1^0)\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial x_1} \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{139}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den Gleichungen für $(X), \ldots$ und $(L), \ldots$, so erkennt man, dass die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}(X) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial x_1^0}, & (Y) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial y_1^0}, & (Z) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial z_1^0}, \\ (L) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial \lambda_1}, & (M) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial \mu_1}, & (N) &= -\frac{\partial(\Phi)}{\partial \nu_1}.\end{aligned} \tag{139'}$$

Aus dem Potential der Wechselwirkung zweier Körper erhält man die Componentensummen, die der eine von ihnen erfährt, durch die negativen partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten eines beliebig in ihm fest angenommenen Punktes, die Drehungsmomente um Parallele zu den Coordinatenaxen durch diesen Punkt durch die negativen partiellen Differentialquotienten nach den Drehungswinkeln um diese Axen.

Diese Differentiationen sind zunächst nur geometrisch zu verstehen, als die Verhältnisse der Aenderungen von (Φ) bei gewissen Verschiebungen und Drehungen zu deren Grössen. Analytisch darstellbar sind sie erst, wenn man durch geeignete Umformungen (Φ) als Function der Grösse dargestellt hat, nach der differentiirt werden soll.

Da die ganze Betrachtung ungeändert bleibt, wenn statt des Newton'schen irgend ein anderes Potential angenommen wird, welches gestattet, mit den Differentialzeichen vor die Integrale zu gehen, so gilt der obige Satz für ein jedes von ihnen.

Die Componenten und Momente sind positiv, wenn (Φ) bei der Verschiebung oder Drehung des Körpers abnimmt, d. h. wirken in diesem Falle im Sinne der Verschiebungen oder Drehungen, im andern Falle ihnen entgegen. Die Componenten und Momente verschwinden, wenn (Φ) sich bei diesen Bewegungen nicht ändert.

Hieraus folgt der Satz:

Ein Körper, der unter der Wirkung eines Potentials (Φ) steht, ist im Gleichgewicht in einer Lage, welche (Φ) zu einem Maximum oder Minimum macht, und zwar ist das Gleichgewicht ein stabiles im Falle des Minimums, ein labiles im Falle des Maximums.

Wir haben bisher den Körper m_1 als den von m angezogenen betrachtet und die Componenten und Momente bestimmt, welche er erleidet, aber die vollkommene Symmetrie, welche die Function

$$(\Phi) = -f\iint \frac{dm\, dm_1}{e}$$

in Bezug auf die beiden Massen zeigt, ergiebt, dass wir auch umgekehrt hätten verfahren können. Wir können also aus (Φ) die Com-

ponenten und Momente ableiten, die beide Theile des Systemes erfahren, resp. ausüben. Dies erklärt den Namen „Potential der Wechselwirkung von m und m_1", den wir der Function (Φ) ertheilt haben.

Die Componenten und Momente, die m und m_1 in Bezug auf dieselben Axen erfahren, sind entgegengesetzt gleich, sodass die beiden Körper, starr mit einander verbunden, im Gleichgewicht verharren können.

V. Das Potential (Φ) der Wechselwirkung zwischen m und m_1 entwickeln wir vollständig zunächst wieder unter der Voraussetzung, dass die beiden Massen sich in einer gegenseitigen Entfernung befinden, die so gross gegen ihre Dimensionen ist, dass wir Glieder von der Ordnung der dritten Potenz ihres Verhältnisses neben Eins vernachlässigen können. Wir sprechen dies kurz aus in der Annahme, dass wir uns auf die zweite Annäherung beschränken wollen.

Wir erhalten dann, wenn wir mit ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten der Schwerpunkte beider Körper, mit ξ', η', ζ' und ξ_1', η_1', ζ_1' die relativen Coordinaten der Elemente dm und dm' gegen diese Schwerpunkte bezeichnen, für die Entfernung e zwischen ihnen:

$$\begin{aligned} e^2 = \big((\xi_1+\xi_1') - (\xi+\xi')\big)^2 + \big((\eta_1+\eta_1') - (\eta+\eta')\big)^2 \\ + \big((\zeta_1+\zeta_1') - (\zeta+\zeta')\big)^2, \end{aligned} \tag{140}$$

für die Entfernung E der beiden Schwerpunkte hingegen:

$$E^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2. \tag{140'}$$

Entwickeln wir im Potential (Φ) die Grösse $1/e$ nach Potenzen von ξ', η', ζ' und ξ_1', η_1', ζ_1' und beachten die Relationen, welche den Schwerpunkt definiren, nämlich:

$$\int \xi'\, dm = \int \eta'\, dm = \int \zeta'\, dm = 0,$$
$$\int \xi_1' dm' = \int \eta_1' dm' = \int \zeta_1' dm' = 0,$$

so erhalten wir innerhalb der festgesetzten Annäherung:

$$\begin{aligned} (\Phi) = -f\int dm_1 \int dm \Bigg(\frac{1}{E} + \frac{\xi'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta^2} + \frac{\zeta'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta^2} \\ + \eta'\zeta'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta\,\partial \zeta} + \zeta'\xi'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta\,\partial \xi} + \xi'\eta'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi\,\partial \eta} \\ + \frac{\xi_1'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\eta_1'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1^2} + \frac{\zeta_1'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1^2} \\ + \eta_1'\zeta_1'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1\,\partial \zeta_1} + \zeta_1'\xi_1'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1\,\partial \xi_1} + \xi_1'\eta_1'\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1\,\partial \eta_1} \Bigg). \end{aligned} \tag{141}$$

Nun ist aber nach dem Werthe von E

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta \, \partial \zeta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1 \, \partial \zeta_1}, \ldots$$

ferner

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

daher schreibt sich vorstehendes Resultat unter Einführung der Trägheits- und Deviationsmomente um die Parallelen zu den Coordinatenaxen durch die resp. Schwerpunkte auch:

$$(\Phi) = -f\left(\frac{m m_1}{E} - \frac{(m_1 \Xi + m \Xi_1)}{2} \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1^2} - \frac{(m_1 \mathrm{H} + m \mathrm{H}_1)}{2} \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1^2} - \frac{(m_1 \mathrm{Z} + m \mathrm{Z}_1)}{2} \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1^2} \right. \tag{141'}$$
$$\left. - (m_1 \Xi' + m \Xi_1') \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1 \, \partial \zeta_1} - (m_1 \mathrm{H}' + m \mathrm{H}_1') \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1 \, \partial \xi_1} - (m_1 \mathrm{Z}' + m \mathrm{Z}_1') \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_1}\right).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1^2} = \frac{3(\xi_1 - \xi)^2}{E^5} - \frac{1}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1^2} = \frac{3(\eta_1 - \eta)^2}{E^5} - \frac{1}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1^2} = \frac{3(\zeta_1 - \zeta)^2}{E^5} - \frac{1}{E^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1 \, \partial \zeta_1} = \frac{3(\eta_1 - \eta)(\zeta_1 - \zeta)}{E^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1 \, \partial \xi_1} = \frac{3(\zeta_1 - \zeta)(\xi_1 - \xi)}{E^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_1} = \frac{3(\xi_1 - \xi)(\eta_1 - \eta)}{E^5},$$

oder, wenn man die Cosinus α', β', γ' der Winkel einführt, welche E — gleichviel in welcher Richtung positiv gerechnet — mit den Coordinatenaxen einschliesst,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1^2} = \frac{3\alpha'^2 - 1}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1^2} = \frac{3\beta'^2 - 1}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1^2} = \frac{3\gamma'^2 - 1}{E^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \eta_1 \, \partial \zeta_1} = \frac{3\beta'\gamma'}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \zeta_1 \, \partial \xi_1} = \frac{3\gamma'\alpha'}{E^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_1} = \frac{3\alpha'\beta'}{E^3}.$$

Wir erhalten demgemäss:

$$(\Phi) = -f\left(\frac{m m_1}{E} \right.$$
$$- \frac{1}{2E^3}\left[(m_1 \Xi + m \Xi_1)(3\alpha'^2 - 1) + (m_1 \mathrm{H} + m \mathrm{H}_1)(3\beta'^2 - 1) + (m_1 \mathrm{Z} + m \mathrm{Z}_1)(3\gamma'^2 - 1)\right. \tag{141''}$$
$$\left.\left. + 2(m_1 \Xi' + m \Xi_1') 3\beta'\gamma' + 2(m_1 \mathrm{H}' + m \mathrm{H}_1') 3\gamma'\alpha' + 2(m_1 \mathrm{Z}' + m \mathrm{Z}_1') 3\alpha'\beta'\right]\right),$$

oder, wenn wir nach (36) die Trägheitsmomente M und M_1 der beiden Massen m und m_1 um die Richtung der Verbindungslinie E ihrer Schwerpunkte einführen und die Beziehung (38″) berücksichtigen,

$$(\Phi) = -\frac{f}{E}\Big(mm_1 + \frac{1}{2E^2}[m_1(\mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma) + m(\mathsf{A}_1+\mathsf{B}_1+\Gamma_1) - 3(m_1\mathsf{M} + m\mathsf{M}_1)]\Big), \qquad (141''')$$

worin nun A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 die Hauptträgheitsmomente der beiden Körper für ihren resp. Schwerpunkt, also von ihrer gegenseitigen Lage gänzlich unabhängige Constanten bezeichnen.

Die Trägheitsmomente M und M_1 lassen sich auch durch die Hauptträgheitsmomente ausdrücken, wenn man die Cosinus der Winkel der Hauptträgheitsaxen gegen die Richtung E unter der Bezeichnung α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 einführt. Es ist dann nämlich:

$$\begin{aligned}\mathsf{M} &= \mathsf{A}\alpha^2 + \mathsf{B}\beta^2 + \Gamma\gamma^2,\\ \mathsf{M}_1 &= \mathsf{A}_1\alpha_1^2 + \mathsf{B}_1\beta_1^2 + \Gamma_1\gamma_1^2.\end{aligned} \qquad (142)$$

Sonach ist jetzt (Φ) ausgedrückt durch die gegenseitige Entfernung E der Schwerpunkte von m und m_1 und durch die Winkel ihrer Trägheitsaxen gegen die Richtung von E.

Dreht man die Körper um die Richtung der Verbindungslinie, so ändert sich (Φ) nicht; dies giebt den Satz:

Zwei ferne Körper, welche nach dem Newton'schen Gesetz auf einander wirken, üben in zweiter Annäherung niemals ein Drehungsmoment um die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte auf einander aus.

Sind die beiden Körper um ihre festgehaltenen Schwerpunkte drehbar, oder einer fest, der andere drehbar, so werden sie nach einer gegenseitigen Lage hinstreben, welche das Potential (Φ) zu einem Minimum macht, d. h., da E constant angenommen ist, nach einer solchen, die $m_1\mathsf{M} + m\mathsf{M}_1$ zu einem Minimum macht. Daher folgt der weitere Satz:

Ein nach dem Newton'schen Gesetz von einer fernen Masse angezogener Körper, der um seinen Schwerpunkt drehbar ist, befindet sich im stabilen Gleichgewicht, wenn die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes in Bezug auf seinen Schwerpunkt in die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte fällt, — im labilen, wenn dasselbe mit der Axe des grössten Trägheitsmomentes stattfindet.

Geht der anziehende Körper m in einen materiellen Punkt über. so wird für ihn A, B, Γ und M verschwinden, und wir erhalten für diesen Fall:

$$(\Phi) = -\frac{fm}{E}\Big(m_1 + \frac{1}{2E^2}(\mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1 + \Gamma_1 - 3\mathsf{M}_1)\Big),$$

eine Formel, die mit (127″) identisch ist, wie ja selbstverständlich, nachdem wir erkannt haben, dass (Φ) das Potential der Wechsel-

wirkung zwischen den Körpern m und m_1 darstellt. Die vorstehenden Sätze sind auf diesen Fall einfach zu übertragen. —

VI. Die strenge Berechnung des Potentiales der Wechselwirkung zweier Körper ist nur in wenigen Fällen durchführbar.

Ist der eine der beiden Körper, z. B. m, eine in concentrischen Schichten homogene Voll- oder Hohlkugel, so ist das auf ihn bezügliche Integral in dem Werthe des Potentiales

$$(\Phi) = -f\int dm_1 \int \frac{dm}{e} \tag{143}$$

nach den früheren Rechnungen sogleich auszuführen, denn in Bezug auf diese Entwickelung ist es vollkommen gleichgültig, ob das Integralzeichen vor dem angezogenen Massenelement dm_1 steht oder nicht.

Wir erhalten demgemäss, wenn m_1 ganz ausserhalb m liegt:

$$(\Phi) = -fm\int \frac{dm_1}{e_1}, \tag{143'}$$

worin e_1 die Entfernung des Elementes dm_1 von dem Mittelpunkt der Kugel oder Kugelschaale und m deren ganze Masse bezeichnet.

Das Potential der Wechselwirkung einer in concentrischen Schichten homogenen Kugel oder Kugelschaale und eines beliebigen ausserhalb gelegenen Körpers ist dasselbe, als wäre die ganze Masse der ersteren in ihrem Mittelpunkt vereinigt; Gleiches gilt von den zwischen beiden wirkenden Kräften.

Betrachtet man also die Erde als eine in concentrischen Schichten homogene Kugel und abstrahirt von ihrer Rotation, so kann man die auf jeden beliebigen äussern Körper ausgeübte Kraft als vom Mittelpunkt ausgehend ansehen.

Ist auch die Masse m_1 eine solche Kugel oder Kugelschaale, so lässt sich auch die zweite Integration ausführen und ergiebt

$$(\Phi) = -f\frac{mm_1}{E},$$

worin E den Abstand der Mittelpunkte der beiden Kugeln bezeichnet.

Das Potential der Wechselwirkung zweier in concentrischen Schichten homogenen Kugeln oder Kugelschaalen ist dasselbe, als wäre die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkt vereinigt; Gleiches gilt für die zwischen ihnen wirkenden Kräfte.

Die Messung der gegenseitigen Anziehung zweier Metallkugeln hat zuerst Cavendish (1798), später Reich (1837 und 1849), Baily (1842), endlich neuestens Cornu und Baille (1873) benutzt, um die mittlere Dichtigkeit ε_m der Erde zu bestimmen.

Dies ist deshalb möglich, weil die Constante f des Newton'schen Gesetzes sich durch die Beschleunigung der Schwere, den Radius und die Dichte der Erde ausdrücken lässt. Die Anziehung, welche die Erde auf eine Masse μ an ihrer Oberfläche ausübt, ist nämlich gleich $fM\mu/R^2$, wenn M die Masse, R den Radius der Erde bezeichnet, die Beschleunigung g, die sie ihm ertheilt, daher gleich fM/R^2, also ist

$$f = g\frac{R^2}{M} = \frac{3g}{4\pi R\varepsilon_m}. \tag{144}$$

Die Anziehung K zwischen zwei Kugeln von den Massen m und m_1, deren Centra sich im Abstand E von einander befinden, ist demgemäss gegeben durch

$$K = \frac{3gmm_1}{4\pi\varepsilon_m RE^2},$$

woraus folgt:

$$\varepsilon_m = \frac{3gmm_1}{4\pi KRE^2}. \tag{144'}$$

Um die Kraft K zu messen, wurden zwei Bleikugeln mittelst eines leichten horizontalen Stabes an einem oder an zwei Drähten so aufgehangen, dass das ganze System um eine verticale Axe drehbar war. Bei einer Ablenkung um einen kleinen Winkel φ aus der Ruhelage, welche es, sich selbst überlassen, annahm, wurde in der Aufhängung ein mit φ proportionales Drehungsmoment $-D_1\varphi$ erregt; die Constante D_1 desselben liess sich nach der auf p. 201 besprochenen Methode durch Schwingungsbeobachtungen bestimmen.

Wurden nun grosse feste Kugeln in der Nähe der beweglichen geeignet aufgestellt, so übten sie ihrerseits ein Drehungsmoment N auf den beweglichen Theil aus, und die Ruhelage, die derselbe in Folge dieser Wirkung annahm, war dadurch bestimmt, dass die beiden Momente sich aufheben mussten, also

$$N = D_1\varphi$$

war. Die Messung des Ablenkungswinkels φ gestattete somit bei bekanntem D_1 das Moment der Attractionen N zu bestimmen, und, da die Hebelarme bekannt waren, an welchen sie wirkten, auch die Kräfte selbst.

Diese Beobachtungen haben für die mittlere Dichte ε_m der Erde Werthe zwischen 5,4 und 5,8 ergeben, sodass man 5,6 als eine ziemlich zuverlässige Zahl für diese Grösse ansehen kann. Abgesehen von dem directen Interesse, welches sie besitzt, ist sie von Wichtigkeit, da sie uns die Grösse der Constanten f des Newton'schen Gesetzes zu bestimmen gestattet. Ihre Dimension ist nach (144)

$$[f] = [l^3 t^{-2} m^{-1}],$$

ihr Zahlwerth bestimmt sich in (cm, g, sec.)

$$f = 0{,}000\,000\,065\,7.$$

Dritter Theil.

Mechanik nichtstarrer Körper.

---

§ 26. Unendlich kleine stetige Verrückungen in einem nichtstarren Körper; Deformationen.

Als starre Körper haben wir im vorigen Theile solche bezeichnet, deren Massenelemente oder Punkte ihre gegenseitige Lage während der Bewegung nicht ändern und daher nur Verrückungen von den bestimmten Eigenschaften erleiden konnten, welche wir im 16. Abschnitt entwickelt haben.

Unter nichtstarren Körpern werden wir dementsprechend zunächst allgemein solche verstehen, deren Massenelemente Aenderungen ihrer gegenseitigen Lage und daher Verrückungen auch anderer Art, als oben behandelt, gestatten; aber wir wollen, schon um einen Körper von einem System discreter Massenpunkte zu unterscheiden, die vorstehende Definition dahin einschränken, dass wir den Verrückungen die Eigenschaft beilegen, sich innerhalb des Körpers stetig mit dem Ort zu ändern. Dadurch sind dann zugleich alle die Fälle ausgeschlossen, wo in Folge der Bewegung im Innern des Körpers Spalten oder Hohlräume auftreten. Drücken wir die Verrückung eines Punktes p durch die Zuwachse δx, δy, δz seiner Coordinaten x, y, z aus, so enthält unsere Annahme die Festsetzung, dass δx, δy, δz stetige Functionen von x, y, z sind.

Für einen Punkt p_1 des Körpers, welcher die Coordinaten $x_1 = x + \xi$, $y_1 = y + \eta$, $z_1 = z + \zeta$ besitzt, haben die Verschiebungen andere Werthe δx_1, δy_1, δz_1, die wir als Functionen von $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ nach Potenzen von ξ, η, ζ entwickelt denken können, gemäss der Formel:

$$\delta x_1 = \delta x + \xi \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2} + \cdots \quad \text{u. s. f.}$$

Wir bezeichnen als das Bereich B des Punktes p ein um denselben abgegrenztes Volumen von solcher Grösse, dass in ihm innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze die

Glieder zweiter Ordnung dieser Reihen gegen die erster vernachlässigt werden können.

Je nach den Umständen kann das Bereich sehr verschiedene Ausdehnung haben. Sind die zweiten und höheren Differentialquotienten der δx, δy, δz nach den Coordinaten gleich Null, d. h. sind δx, δy, δz lineäre Functionen von x, y, z, so kann dem Bereich B eine beliebige endliche Grösse gegeben werden; findet dies aber nicht statt, so ist dasselbe unendlich klein von bestimmter Ordnung zu wählen. Demgemäss werden auch die weiterhin zu ziehenden Folgerungen je nach Umständen nur für ein unendlich kleines oder aber für ein endliches Bereich gelten.

Die nach dem Gesagten für das Bereich B des Punktes x, y, z geltenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta x + \xi \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta x}{\partial z}, \\ \delta y_1 &= \delta y + \xi \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta y}{\partial z}, \\ \delta z_1 &= \delta z + \xi \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta z}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

in welchen die $\partial \delta x / \partial x$, $\partial \delta x / \partial y, \ldots$ innerhalb B constant sind, bilden die Grundlage für die Untersuchung der Bewegungen in einem nichtstarren Körper.

Die Werthe der Verrückungscomponenten δx_1, δy_1, δz_1 lassen sich in Theile gleicher Form zerlegen, welche man so wählen kann, dass sie resp. drei Verschiebungen des Bereiches parallel den Coordinatenaxen, drei Drehungen um dieselben und drei gleichförmige Dehnungen nach drei zu einander normalen Richtungen von bestimmter Lage darstellen.

Was die ersten beiden Theile anbetrifft, so sind es diejenigen Bewegungen, welche bei starren Körpern allein möglich sind, und wir haben in § 16 gesehen, dass sie sich darstellen durch die Werthe der Coordinatenänderungen

$$(\delta x_1)_1 = \delta x_0, \qquad (\delta y_1)_1 = \delta y_0, \qquad (\delta z_1)_1 = \delta z_0 \tag{2}$$

für die Verschiebungen, und

$$(\delta x_1)_2 = \zeta\, \delta\mu - \eta\, \delta\nu, \quad (\delta y_1)_2 = \xi\, \delta\nu - \zeta\, \delta\lambda, \quad (\delta z_1)_2 = \eta\, \delta\lambda - \xi\, \delta\mu \tag{2'}$$

für die Drehungen; in letzteren Formeln sind $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ die Drehungswinkel um Parallele zu den Coordinatenaxen durch den Punkt p.

Was die Dehnungen oder Dilatationen anbetrifft, so sprechen wir zunächst folgende Definition aus:

Ein Körper heisst parallel einer Coordinatenaxe gleichförmig ausgedehnt, wenn die ihr parallelen Coordinaten aller seiner Punkte um denselben Bruchtheil ihrer Länge vergrössert sind.

Sind a, b, c die Coordinaten eines Punktes des Körpers bezogen auf ein ABC-Coordinatensystem, so stellen die Zuwachse

$$\delta a = a\varrho_1, \qquad \delta b = b\varrho_2, \qquad \delta c = c\varrho_3 \tag{2''}$$

ein System von Verschiebungen dar, welches dem Körper parallel A, B, C resp. die Dilatationen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ertheilt, denn die Coordinaten a, b, c werden dadurch in $a(1+\varrho_1)$, $b(1+\varrho_2)$, $c(1+\varrho_3)$ verwandelt. Negative Werthe der ϱ_h entsprechen Verkürzungen oder Compressionen.

Man bemerkt, wie auch bei gleichzeitiger Dehnung parallel allen drei Coordinatenaxen der Coordinatenanfang an seiner Stelle bleibt und Punkte der Coordinatenaxen auf diesen Linien verharren.

Liegt der Anfangspunkt des Systemes ABC an der Stelle x, y, z, deren Bereich wir untersuchen, und gelten demnach zwischen den auf das XYZ- und ABC-System bezogenen relativen Coordinaten der Stelle x_1, y_1, z_1 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi &= a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3, \\ \eta &= a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3, \\ \zeta &= a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3, \end{aligned} \tag{3}$$

so werden die Ausdehnungen parallel den Axen A, B, C Veränderungen der Coordinaten $x_1 = x + \xi$, $y_1 = y + \eta$, $z_1 = z + \zeta$ liefern, welche, da sie x, y, z und die $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ nicht berühren, gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (\delta x_1)_3 &= a\alpha_1\varrho_1 + b\alpha_2\varrho_2 + c\alpha_3\varrho_3, \\ (\delta y_1)_3 &= a\beta_1\varrho_1 + b\beta_2\varrho_2 + c\beta_3\varrho_3, \\ (\delta z_1)_3 &= a\gamma_1\varrho_1 + b\gamma_2\varrho_2 + c\gamma_3\varrho_3, \end{aligned} \tag{3'}$$

oder bei Einführung von ξ, η, ζ durch

$$\begin{aligned} (\delta x_1)_3 = {} & \xi(\alpha_1^2\varrho_1 + \alpha_2^2\varrho_2 + \alpha_3^2\varrho_3) + \eta(\alpha_1\beta_1\varrho_1 + \alpha_2\beta_2\varrho_2 + \alpha_3\beta_3\varrho_3) \\ & + \zeta(\alpha_1\gamma_1\varrho_1 + \alpha_2\gamma_2\varrho_2 + \alpha_3\gamma_3\varrho_3), \\ (\delta y_1)_3 = {} & \xi(\alpha_1\beta_1\varrho_1 + \alpha_2\beta_2\varrho_2 + \alpha_3\beta_3\varrho_3) + \eta(\beta_1^2\varrho_1 + \beta_2^2\varrho_2 + \beta_3^2\varrho_3) \\ & + \zeta(\beta_1\gamma_1\varrho_1 + \beta_2\gamma_2\varrho_2 + \beta_3\gamma_3\varrho_3), \\ (\delta z_1)_3 = {} & \xi(\gamma_1\alpha_1\varrho_1 + \gamma_2\alpha_2\varrho_2 + \gamma_3\alpha_3\varrho_3) + \eta(\gamma_1\beta_1\varrho_1 + \gamma_2\beta_2\varrho_2 + \gamma_3\beta_3\varrho_3) \\ & + \zeta(\gamma_1^2\varrho_1 + \gamma_2^2\varrho_2 + \gamma_3^2\varrho_3). \end{aligned} \tag{3''}$$

Diese Formeln zeigen, verglichen mit (2″), dass die angenommene Dilatation parallel den Axen A, B, C nicht zugleich eine Dilatation parallel den Axen X, Y, Z darstellt, denn die $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ sind nicht resp. nur je mit ξ, η, ζ proportional. Demgemäss nennt man die Richtungen A, B, C die den gegebenen Dehnungen entsprechenden Hauptdilatationsaxen und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Hauptdilatationen.

Bildet man die Summen aus den drei der Verschiebung, Drehung und Ausdehnung entsprechenden Verrückungscomponenten und setzt sie den durch (1) gegebenen gleich, nach dem Schema

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= (\delta x_1)_1 + (\delta x_1)_2 + (\delta x_1)_3,\\ \delta y_1 &= (\delta y_1)_1 + (\delta y_1)_2 + (\delta y_1)_3,\\ \delta z_1 &= (\delta z_1)_1 + (\delta z_1)_2 + (\delta z_1)_3,\end{aligned}$$

so erhält man, da diese Formeln für alle ξ, η, ζ gelten müssen, folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\delta x = \delta x_0, \qquad \delta y = \delta y_0, \qquad \delta z = \delta z_0,\\
&\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} = \alpha_1^2\varrho_1 + \alpha_2^2\varrho_2 + \alpha_3^2\varrho_3,\\
&\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} = \beta_1^2\varrho_1 + \beta_2^2\varrho_2 + \beta_3^2\varrho_3,\\
&\frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = \gamma_1^2\varrho_1 + \gamma_2^2\varrho_2 + \gamma_3^2\varrho_3,\\
&\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} = \beta_1\gamma_1\varrho_1 + \beta_2\gamma_2\varrho_2 + \beta_3\gamma_3\varrho_3 - \delta\lambda,\\
&\frac{\partial\,\delta z}{\partial y} = \beta_1\gamma_1\varrho_1 + \beta_2\gamma_2\varrho_2 + \beta_3\gamma_3\varrho_3 + \delta\lambda,\\
&\frac{\partial\,\delta z}{d x} = \gamma_1\alpha_1\varrho_1 + \gamma_2\alpha_2\varrho_2 + \gamma_3\alpha_3\varrho_3 - \delta\mu,\\
&\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} = \gamma_1\alpha_1\varrho_1 + \gamma_2\alpha_2\varrho_2 + \gamma_3\alpha_3\varrho_3 + \delta\mu,\\
&\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} = \alpha_1\beta_1\varrho_1 + \alpha_2\beta_2\varrho_2 + \alpha_3\beta_3\varrho_3 - \delta\nu,\\
&\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} = \alpha_1\beta_1\varrho_1 + \alpha_2\beta_2\varrho_2 + \alpha_3\beta_3\varrho_3 + \delta\nu.
\end{aligned} \tag{4}$$

Diese Formeln zeigen, dass das Problem der Zerlegung der allgemeinsten Verrückung für das Bereich B in Verschiebung, Drehung und Ausdehnung eindeutig bestimmt ist.

Die ersten drei Formeln (4) geben nämlich die Verschiebungscomponenten parallel den willkürlichen Coordinatenaxen

$$\delta x_0 = \delta x, \qquad \delta y_0 = \delta y, \qquad \delta z_0 = \delta z \tag{4'}$$

gleich den Verschiebungen, welche die Stelle x, y, z selbst erleidet; für die Drehungswinkel folgt aus den letzten sechs Gleichungen nach Elimination der ϱ_h

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta y}{\partial z}\right), \quad \delta\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} - \frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \quad \delta\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} - \frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\right), \tag{4''}$$

und für die Grösse der Dilatationen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und die Lage ihrer Richtungen gelten die nach Elimination der $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ erhaltenen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} &= \alpha_1^2\varrho_1 + \alpha_2^2\varrho_2 + \alpha_3^2\varrho_3,\\
\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} &= \beta_1^2\varrho_1 + \beta_2^2\varrho_2 + \beta_3^2\varrho_3,\\
\frac{\partial\,\delta z}{\partial z} &= \gamma_1^2\varrho_1 + \gamma_2^2\varrho_2 + \gamma_3^2\varrho_3,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) &= \beta_1\gamma_1\varrho_1 + \beta_2\gamma_2\varrho_2 + \beta_3\gamma_3\varrho_3,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) &= \gamma_1\alpha_1\varrho_1 + \gamma_2\alpha_2\varrho_2 + \gamma_3\alpha_3\varrho_3,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right) &= \alpha_1\beta_1\varrho_1 + \alpha_2\beta_2\varrho_2 + \alpha_3\beta_3\varrho_3,
\end{aligned}
\tag{4'''}
$$

welche mit den sechs zwischen den α_h, β_h, γ_h bestehenden Relationen

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0,\\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0
\end{aligned}
$$

sämmtliche zwölf Grössen ϱ_h, α_h, β_h, γ_h bestimmen. —

Nachdem wir im Vorstehenden den Nachweis erbracht haben, dass eine unendlich kleine stetige Verrückung der Punkte eines nicht-starren Körpers innerhalb des Bereiches B eines beliebigen Punktes p stets und nur auf eine Art in eine gewisse Verschiebung, eine Drehung und eine gleichförmige Ausdehnung zerlegt werden kann, wenden wir uns, da wir die ersten beiden Theile schon früher behandelt haben, zur Untersuchung der Eigenschaften des letzteren.

Die gleichförmige Dehnung des Bereiches B drückt sich in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem durch die Zuwachse $(\delta x_1)_3$, $(\delta y_1)_3$, $(\delta z_1)_3$ der Coordinaten aus, welche sich durch die Werthe der gegebenen Gesammtzuwachse δx, δy, δz darstellen lassen. Dazu setzen wir die Werthe (4″) unter Benutzung der Abkürzungen

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} = x_x, \qquad \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} = y_y, \qquad \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = z_z,\\
\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y} = y_z = z_y, \quad \frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z} = z_x = x_z, \quad \frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x} = x_y = y_x
\end{gathered}
\tag{5}
$$

in die Gleichungen (3″) ein und erhalten so:

$$
\begin{aligned}
(\delta x_1)_3 &= \xi x_x + \tfrac{1}{2}\eta x_y + \tfrac{1}{2}\zeta x_z,\\
(\delta y_1)_3 &= \tfrac{1}{2}\xi y_x + \eta y_y + \tfrac{1}{2}\zeta y_z,\\
(\delta z_1)_3 &= \tfrac{1}{2}\xi z_x + \tfrac{1}{2}\eta z_y + \zeta z_z.
\end{aligned}
\tag{5'}
$$

Diese Formeln geben die gesuchten Beziehungen zwischen den gesammten Verrückungen und den allein von der Dilatation herrührenden Theilen.

Wenn wir letztere weiterhin für sich betrachten, so beziehen wir damit das Bereich B auf ein Coordinatensystem, welches mit dem

Bereich diejenige parallele Verschiebung und diejenige Drehung erfährt, welche durch die Antheile $(\delta x_1)_1$, $(\delta y_1)_1$, $(\delta z_1)_1$ und $(\delta x_1)_2$, $(\delta y_1)_2$, $(\delta z_1)_2$ der gesammten Verrückung gegeben sind.

Die relativen Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes p_1 gegen p, welcher letztere ein ganz beliebiger Punkt von B ist, werden in Folge der Dilatationsverrückungen $(\delta x_1)_2$, $(\delta y_1)_2$, $(\delta z_1)_2$ die Werthe ξ', η', ζ' annehmen, gegeben durch:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 + x_x) + \tfrac{1}{2}\eta x_y + \tfrac{1}{2}\zeta x_z, \\ \eta' &= \tfrac{1}{2}\xi y_x + \eta(1 + y_y) + \tfrac{1}{2}\zeta y_z, \\ \zeta' &= \tfrac{1}{2}\xi z_x + \tfrac{1}{2}\eta z_y + \zeta(1 + z_z). \end{aligned} \tag{5''}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich zunächst leicht die geometrische Bedeutung der Grössen $x_x \ldots$.

Ein Punkt $(r_1, 0, 0)$ der Ξ-Axe besitzt nach der Deformation die Coordinaten:

$$\xi_1' = r_1(1 + x_x), \qquad \eta_1' = \tfrac{1}{2} r_1 y_x, \qquad \zeta_1' = \tfrac{1}{2} r_1 z_x,$$

ein zweiter $(0, r_2, 0)$ der H-Axe die Coordinaten:

$$\xi_2' = \tfrac{1}{2} r_2 x_y, \qquad \eta_2' = r_2(1 + y_y), \qquad \zeta_2' = \tfrac{1}{2} r_2 z_y,$$

ein dritter $(0, 0, r_3)$ der Z-Axe die Coordinaten:

$$\xi_3' = \tfrac{1}{2} r_3 x_z, \qquad \eta_3' = \tfrac{1}{2} r_3 y_z, \qquad \zeta_3' = r_3(1 + z_z).$$

Die Radienvectoren nach den neuen Lagen haben die Längen r_1', r_2', r_3', welche gegeben sind durch

$$\begin{aligned} r_1'^2 &= r_1^2\left((1 + x_x)^2 + \tfrac{1}{4}(y_x)^2 + \tfrac{1}{4}(z_x)^2\right), \\ r_2'^2 &= r_2^2\left(\tfrac{1}{4}(x_y)^2 + (1 + y_y)^2 + \tfrac{1}{4}(z_y)^2\right), \\ r_3'^2 &= r_3^2\left(\tfrac{1}{4}(x_z)^2 + \tfrac{1}{4}(y_z)^2 + (1 + z_z)^2\right), \end{aligned}$$

und welche sich in Rücksicht auf die Kleinheit von $x_x \ldots$ in erster Annäherung auch schreiben lassen:

$$r_1' = r_1(1 + x_x), \qquad r_2' = r_2(1 + y_y), \qquad r_3' = r_3(1 + z_z). \tag{6}$$

Die drei Grössen x_x, y_y, z_z geben also die Dehnungen der Längeneinheit an, wenn dieselbe im Bereich B parallel der X-, Y- oder Z-Axe liegt.

Die Cosinus der Winkel zwischen den Radienvectoren r_1', r_2', r_3' sind

$$\cos(r_2', r_3') = \frac{\frac{1}{4} x_y x_z + \frac{1}{2}(1 + y_y) y_z + \frac{1}{2}(1 + z_z) z_y}{(1 + y_y)(1 + z_z)} \quad \text{u. s. f.},$$

oder wegen der Kleinheit der $x_x \ldots$ auch

$$\cos(r_2', r_3') = y_z, \qquad \cos(r_3', r_1') = z_x, \qquad \cos(r_1', r_2') = x_y. \tag{6'}$$

Bedenkt man, dass je zwei der Richtungen r_h vor der Deformation den Winkel $\pi/2$ mit einander einschlossen, so kann man $\cos(r_h', r_k')$

mit $\sin[(r_h, r_k) - (r_h', r_k')]$ oder auch mit $(r_h, r_k) - (r_h', r_k')$ selbst vertauschen und erhält durch

$$(r_2', r_3') - (r_2, r_3) = -y_z, \qquad (r_3', r_1') - (r_3, r_1) = -z_x, \qquad (r_1', r_2') - (r_1, r_2) = -x_y \tag{6''}$$

das folgende Resultat gegeben:

Die drei Grössen y_z, z_x, x_y sind die negativen Werthe der in Folge der Deformation stattfindenden Aenderungen der Winkel zwischen den Richtungen, welche ursprünglich in die Coordinatenaxen fielen.

Daher bezeichnen wir die sechs Grössen $x_x, \ldots x_y$ kurz als die Deformationen an der Stelle x, y, z oder im Bereich B und nennen specieller

$$x_x, \; y_y, \; z_z$$

die Axendehnungen,

$$y_z, \; z_x, \; x_y$$

die Axenwinkeländerungen.

Lösen wir die Gleichungen (5″) nach ξ, η, ζ auf, was wegen der Kleinheit der $x_x \ldots$ einfach dadurch geschieht, dass man in den mit ihnen multiplicirten Gliedern ξ, η, ζ mit ξ', η', ζ' vertauscht, so erhält man:

$$\begin{aligned} \xi &= +\xi'(1 - x_x) - \tfrac{1}{2}\eta' x_y - \tfrac{1}{2}\zeta' x_z, \\ \eta &= -\tfrac{1}{2}\xi' y_x + \eta'(1 - y_y) - \tfrac{1}{2}\zeta' y_z, \\ \zeta &= -\tfrac{1}{2}\xi' z_x - \tfrac{1}{2}\eta' z_y + \zeta'(1 - x_z). \end{aligned} \tag{7}$$

Für die nächsten Anwendungen wollen wir diese Gleichungen abkürzen zu

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' p_1 + \eta' q_3 + \zeta' q_2, \\ \eta &= \xi' q_3 + \eta' p_2 + \zeta' q_1, \\ \zeta &= \xi' q_2 + \eta' q_1 + \zeta' p_3, \end{aligned} \tag{7'}$$

und bemerken, dass in ihnen die p_h stets positiv und zwar nahe gleich Eins sind.

Erfüllt ein in dem Bereich B gelegenes System von Punkten vor der Verschiebung irgend eine Oberfläche, sodass für ihre Coordinaten

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

ist, so liegt dasselbe nach der Bewegung auf einer andern Fläche, deren Gleichung mittelst der Substitution (7′) aus $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ hervorgeht.

Hieraus folgt eine Reihe von einfachen Sätzen.

Ebenen und Gerade bleiben innerhalb B auch nach der Deformation Ebenen und Gerade.

Dies folgt daraus, dass eine lineäre Gleichung ihren Grad durch eine lineäre Substitution nicht ändert.

Parallele Ebenen und Gerade bleiben innerhalb B auch nach der Deformation einander parallel.

Zwei parallele Ebenen sind nämlich gegeben durch die Gleichungen

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \nu, \qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \nu_1,$$

und die Substitution (6) führt dieselben auf die gleiche Form zurück. Zwei parallele Gerade sind aber gegeben durch die Schnittcurven zweier Paare paralleler Ebenen.

Eine Kugelfläche innerhalb B verwandelt sich in ein dreiaxiges Ellipsoid.

In der That wird aus der Gleichung einer Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \tag{8}$$

durch die Substitution (7') die Gleichung eines Ellipsoides:

$$(\xi' p_1 + \eta' q_3 + \zeta' q_2)^2 + (\xi' q_3 + \eta' p_2 + \zeta' q_1)^2 + (\xi' q_2 + \eta' q_1 + \zeta' p_3)^2 = R^2; \tag{8'}$$

man nennt dasselbe das erste Dilatationsellipsoid. Setzt man

$$\xi' = r'\alpha', \qquad \eta' = r'\beta', \qquad \zeta' = r'\gamma',$$

worin α', β', γ' die Cosinus der Winkel sind, welche der Radiusvector r' mit den Coordinatenaxen einschliesst, so erhält man

$$(\alpha' p_1 + \beta' q_3 + \gamma' q_2)^2 + (\alpha' q_3 + \beta' p_2 + \gamma' q_1)^2 + (\alpha' q_2 + \beta' q_1 + \gamma' p_3)^2 = \frac{R^2}{r'^2}, \tag{8''}$$

was wir abkürzen in

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{R^2}{r'^2}. \tag{8'''}$$

Um die Richtungen der Hauptaxen zu bestimmen, haben wir die Bedingungen des Maximums und Minimums von r' oder R^2/r'^2 in Bezug auf α', β', γ' aufzustellen, während die Beziehung gilt, dass

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Demgemäss fügen wir

$$-\varrho'(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - 1)$$

zu R^2/r'^2 hinzu, wobei ϱ' einen unbekannten Factor bezeichnet, und differentiiren das Resultat, als wären α', β', γ' unabhängig. Wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} p_1 A + q_3 B + q_2 C - \varrho'\alpha' &= 0, \\ q_3 A + p_2 B + q_1 C - \varrho'\beta' &= 0, \\ q_2 A + q_1 B + p_3 C - \varrho'\gamma' &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} A + \varrho\alpha' &= 0, \\ B + \varrho\beta' &= 0, \qquad \varrho' = +\varrho^2, \\ C + \varrho\gamma' &= 0; \end{aligned} \tag{9'}$$

denn setzt man die hieraus folgenden Werthe für A, B, C in (9) ein, so reduciren sich die Gleichungen (9) auf (9').

Diese letzteren Gleichungen bestimmen aber die Hauptaxen des Ellipsoides

$$p_1\alpha'^2 + p_2\beta'^2 + p_3\gamma'^2 + 2q_1\beta'\gamma' + 2q_2\gamma'\alpha' + 2q_3\alpha'\beta' = \frac{R^2}{r'^2}, \qquad (10)$$

welches das zweite Dilatationsellipsoid genannt wird.

Das erste und das zweite Dilatationsellipsoid haben also gleiche Axenrichtungen.

Das System (9') hat auch noch eine andere als die oben ausgesprochene Bedeutung.

Fasst man nämlich von den Gleichungen (4''') die erste, sechste, fünfte, die sechste, zweite, vierte und die fünfte, vierte, dritte mit den Factoren α_h, β_h, γ_h zusammen, wobei $h = 1, 2, 3$ sein kann, so erhält man unter Rücksicht auf (5) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_h(x_x - \varrho_h) + \tfrac{1}{2}\beta_h x_y + \tfrac{1}{2}\gamma_h x_z &= 0, \\ \tfrac{1}{2}\alpha_h y_x + \beta_h(y_y - \varrho_h) + \tfrac{1}{2}\gamma_h y_z &= 0, \\ \tfrac{1}{2}\alpha_h z_x + \tfrac{1}{2}\beta_h z_y + \gamma_h(z_z - \varrho_h) &= 0, \end{aligned}$$

welche mit

$$\alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 = 1$$

zusammen die Richtung und Grösse der Hauptdilatation ϱ_h bestimmen.

Diese Gleichungen sind aber nach der Bedeutung der p_h und q_h in (7') mit den obigen (9') identisch und daraus folgt:

Die Axen der beiden Dilatationsellipsoide fallen in die Hauptdilatationsaxen; daher bleiben die Punkte dieser Axen bei der Dilatation auf den betreffenden Richtungen.

Die Gleichungen der beiden Dilatationsellipsoide erscheinen auf die Hauptaxen bezogen, wenn durch die Wahl der Coordinaten die Factoren q_h der Producte $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$ und $\alpha'\beta'$ zum Verschwinden gebracht werden. Die Einführung dieses Coordinatensystemes sei durch die Anbringung des Index ^{0} an den dadurch geänderten Grössen angedeutet. Hieraus folgt wegen der Werthe der Grössen q_h der weitere Satz, welcher auch direct einzusehen ist:

Bezieht man die Dilatationen auf das System der Hauptdilatationsaxen, so sind die Winkeländerungen y_z^0, z_x^0 und x_y^0 gleich Null. Die Gleichungen der beiden Dilatationsellipsoide werden demgemäss resp.:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \alpha'^2(1 - x_x^0)^2 + \beta'^2(1 - y_y^0)^2 + \gamma'^2(1 - z_z^0)^2 = \frac{R^2}{r'^2}, \\ \text{II.} \quad & \alpha'^2(1 - x_x^0) + \beta'^2(1 - y_y^0) + \gamma'^2(1 - z_z^0) = \frac{R^2}{r'^2}; \end{aligned} \qquad (11)$$

dafür lässt sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \frac{\xi'^2}{R^2(1+x_x^0)^2} + \frac{\eta'^2}{R^2(1+y_y^0)^2} + \frac{\zeta'^2}{R^2(1+z_z^0)^2} = 1, \\ &\text{II.} \quad \frac{\xi'^2}{R^2(1+x_x^0)} + \frac{\eta'^2}{R^2(1+y_y^0)} + \frac{\zeta'^2}{R^2(1+z_z^0)} = 1. \end{aligned} \tag{11'}$$

Die Hauptaxen des zweiten Dilatationsellipsoides sind also den Quadratwurzeln aus denjenigen des ersten proportional.

Da x_x, y_y, z_z als neben 1 sehr klein vorausgesetzt sind, so degeneriren die beiden Dilatationsellipsoide niemals zu Hyperboloiden.

Es erübrigt noch die Untersuchung, welche Wege die einzelnen Punkte der Kugel (9) bei der Deformation zurückgelegt haben, oder welche Punkte des ersten Dilatationsellipsoides und der Kugel einander entsprechen. Bei der Beantwortung dieser Frage gewinnt die Einführung des zweiten Dilatationsellipsoides erst ihre rechte Begründung.

Unter der Voraussetzung, dass die Coordinaten- in die Hauptdilatationsaxen gelegt sind, wird das System (5'') zu:

$$\xi' = \xi(1+x_x^0), \qquad \eta' = \eta(1+y_y^0), \qquad \zeta' = \zeta(1+z_z^0), \tag{12}$$

oder unter Einführung von Polarcoordinaten zu:

$$r'\alpha' = r\alpha(1+x_x^0), \quad r'\beta' = r\beta(1+y_y^0), \quad r'\gamma' = r\gamma(1+z_z^0); \tag{12'}$$

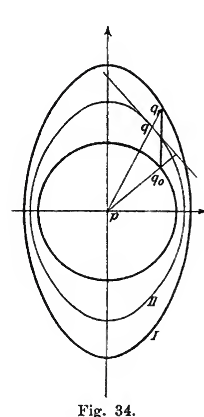


Fig. 34.

daraus folgt für die Cosinus der Winkel, welche der Radiusvector vor und nach der Deformation mit den Hauptdilatationsaxen einschliesst, die Beziehung:

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \alpha(1+x_x^0) : \beta(1+y_y^0) : \gamma(1+z_z^0). \tag{12''}$$

Dies ist dieselbe Relation, welche die analogen Cosinus α', β', γ' eines Radiusvectors nach einem beliebigen Punkt q des zweiten Dilatationsellipsoides verbindet mit den Cosinus α, β, γ für die Normale auf der durch q an dieses Ellipsoid gelegten Tangentenebene. Hieraus folgt die Regel, welche Figur 34 verdeutlicht:

Um die Stelle zu finden, welche ein Punkt q_0 der in dem Bereich B construirten Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

nach der Deformation des Körpers einnimmt, construire man die zugehörigen beiden Dilatationsellipsoide I und II, lege an das zweite eine Tangentenebene, welche normal steht zu

dem Radius $\overline{pq_0}$ und ziehe durch den Berührungspunkt q einen Radiusvector $\overline{pq}$, welcher das erste Dilatationsellipsoid in q_1 schneidet; dann ist dieser Schnittpunkt q_1 der gesuchte Ort.

Diese Construction lässt erkennen, dass das ganze System Verschiebungen symmetrisch in Bezug auf die Hauptdilatationsaxen liegt, und dass, wenn die Hauptdilatationen verschieden gross sind, nur die Punkte der Hauptaxen in dem Radiusvector selbst verschoben werden.

Wir wenden weiter die Formeln (5″) noch dazu an, die Vergrösserung einer im Bereich B liegenden Strecke, einer Fläche und eines Volumens zu berechnen.

Legen wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit enthält, den Punkt x, y, z in den einen Endpunkt der Strecke r, und sind $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ die Coordinaten des andern, so verwandelt sich

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

durch die Deformation in

$$r'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

Es ist dann

$$\frac{r' - r}{r} = \varrho, \tag{13}$$

die Dilatation der Längeneinheit, durch Entwickelung von r' nach den Formeln (5″) in erster Annäherung gegeben durch:

$$\varrho = \frac{1}{r^2}(\xi^2 x_x + \eta^2 y_y + \zeta^2 z_z + \eta\,\zeta y_z + \zeta\,\xi z_x + \xi\,\eta x_y). \tag{13'}$$

Führt man die Cosinus α, β, γ der Winkel ein, welche r, also die ursprüngliche Richtung der Strecke, mit den Coordinatenaxen bildet, so findet sich:

$$\varrho = \alpha^2 x_x + \beta^2 y_y + \gamma^2 z_z + \beta\gamma\, y_z + \gamma\alpha\, z_x + \alpha\beta\, x_y. \tag{13''}$$

Das Flächenstück, welches wir betrachten, sei ein Rechteck mit den Kanten a und b; wir legen den Punkt xyz in die eine Ecke, die X- und Y-Axe in zwei Kanten. Durch die Deformation sind die Längen der Kanten nach dem letzten Satz (13″) zu

$$a' = a(1 + x_x), \qquad b' = b(1 + y_y)$$

geworden, der Cosinus des zwischen ihnen liegenden Winkels ist nach (6′)

$$\cos(a', b') = x_y.$$

Da parallele Gerade innerhalb des Bereiches B sich parallel bleiben, so ist aus dem Rechteck von der Fläche $f = ab$ ein Parallelogramm von der Fläche $f' = a'b' \sin(a', b')$ geworden, und die Ver-

grösserung σ der Flächeneinheit findet sich bei Beschränkung auf die niedrigste Ordnung:

$$\sigma = \frac{f' - f}{f} = x_x + y_y. \tag{14}$$

Da jedes andere ebene Flächenstück innerhalb des Bereiches B sich in rechteckige Elemente zerlegen lässt, so giebt $(x_x + y_y)$ die Grösse der specifischen Dilatation auch für dieses, wenn die XY-Ebene des Coordinatensystems der Fläche parallel gelegt wird.

Die Richtung der X- und Y-Axe in der Ebene ist dabei gleichgültig und man erhält somit nebenbei den Satz, dass die Combination $x_x + y_y$ ihren Werth nicht ändern kann, wenn man die X- und Y-Axe in der XY-Ebene beliebig verschiebt und dreht.

Liegt das Flächenstück nicht in der XY-Ebene, so kann man den Werth seiner Vergrösserung bestimmen, indem man ein $X'Y'Z'$-System einführt, dessen $X'Y'$-Ebene mit der Ebene des Flächenstückes zusammenfällt; es ist dann wieder $\sigma = x_x' + y_y'$ und indem man diesen Ausdruck auf das System XYZ transformirt, erhält man auch σ auf letzteres System bezogen. Die hierzu nöthigen Formeln sind weiter unten zusammengestellt.

Als Volumen, dessen specifische Dilatation wir bestimmen wollen, wählen wir ein rechteckiges Prisma von den Kanten a, b, c und legen die Coordinatenaxen seinen Kanten parallel. Die beiden letzten Betrachtungen ergaben, dass die Deformation das Prisma in ein schiefes Parallelepipedon verwandelt von den Kanten

$$a' = a(1 + x_x), \qquad b' = b(1 + y_y), \qquad c' = c(1 + z_z),$$

welche Winkel einschliessen, gegeben durch

$$\cos(b', c') = y_z, \qquad \cos(c', a') = z_x, \qquad \cos(a', b') = x_y.$$

Während das ursprüngliche Volumen

$$k = abc$$

ist, beträgt das neue

$$k' = a'b'c'\sqrt{1 - \cos^2(a',b') - \cos^2(b',c') - \cos^2(c',a') + 2\cos(a',b')\cos(b',c')\cos(c',a')}.$$

Setzt man die obigen Werthe ein und beschränkt sich hinsichtlich der unendlich kleinen Grössen auf die niedrigste Ordnung, so findet sich die Aenderung ϑ der Grösse der Volumeneinheit

$$\vartheta = \frac{k' - k}{k} = x_x + y_y + z_z. \tag{15}$$

Da man jedes andere innerhalb B liegende Volumen in prismatische Elemente mit Flächen parallel zu den Coordinatenebenen zerlegen kann, so giebt die obige Formel den Werth der specifischen Volumenänderung auch für dieses an; $x_x + y_y + z_z$ muss demgemäss von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sein. —

Für gewisse Anwendungen ist es erwünscht, die Deformationsgrössen

$$x_x = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \qquad y_y = \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \qquad z_z = \frac{\partial \delta z}{\partial z},$$

$$y_z = \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}, \qquad z_x = \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}, \qquad x_y = \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

auf ein neues Coordinatensystem X', Y', Z' zu transformiren; dabei ist zu beachten, dass die Umformung sowohl im Zähler als im Nenner der bezüglichen Differentialquotienten vorzunehmen ist.

Setzen wir

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, & x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, & y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, & z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z', \end{aligned} \tag{16}$$

so gilt auch

$$\begin{aligned} \delta x &= \alpha_1 \delta x' + \beta_1 \delta y' + \gamma_1 \delta z', \\ \delta y &= \alpha_2 \delta x' + \beta_2 \delta y' + \gamma_2 \delta z', \\ \delta z &= \alpha_3 \delta x' + \beta_3 \delta y' + \gamma_3 \delta z', \end{aligned} \tag{16'}$$

und demgemäss wird zu bilden sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x}{\partial x} &= \alpha_1 \frac{\partial \delta x'}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \delta y'}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial \delta z'}{\partial x} \\ &= \alpha_1 \left(\frac{\partial \delta x'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \delta x'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \delta x'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \right) \\ &+ \beta_1 \left(\frac{\partial \delta y'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \delta y'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \delta y'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \right) \\ &+ \gamma_1 \left(\frac{\partial \delta z'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \delta z'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \delta z'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

hieraus folgt unter Rücksicht auf (16):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_1^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \gamma_1^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}$$

$$+ \beta_1 \gamma_1 \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \gamma_1 \alpha_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + \alpha_1 \beta_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right).$$

Führt man die Bezeichnungen x_x', y_y', z_z', y_z', z_x', x_y' für die vollständig transformirten Grössen ein, so erhält man durch eine der vorstehenden analoge Rechnung leicht folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_x &= \alpha_1^2 x_x' + \beta_1^2 y_y' + \gamma_1^2 z_z' + \beta_1 \gamma_1 y_z' + \gamma_1 \alpha_1 z_x' + \alpha_1 \beta_1 x_y', \\ y_y &= \alpha_2^2 x_x' + \beta_2^2 y_y' + \gamma_2^2 z_z' + \beta_2 \gamma_2 y_z' + \gamma_2 \alpha_2 z_x' + \alpha_2 \beta_2 x_y', \\ z_z &= \alpha_3^2 x_x' + \beta_3^2 y_y' + \gamma_3^2 z_z' + \beta_3 \gamma_3 y_z' + \gamma_3 \alpha_3 z_x' + \alpha_3 \beta_3 x_y', \\ y_z &= 2 \alpha_2 \alpha_3 x_x' + 2 \beta_2 \beta_3 y_y' + 2 \gamma_2 \gamma_3 z_z' \\ &\quad + (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) y_z' + (\gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2) z_x' + (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_y', \\ z_x &= 2 \alpha_3 \alpha_1 x_x' + 2 \beta_3 \beta_1 y_y' + 2 \gamma_3 \gamma_1 z_z' \\ &\quad + (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3) y_z' + (\gamma_3 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_3) z_x' + (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) x_y', \\ x_y &= 2 \alpha_1 \alpha_2 x_x' + 2 \beta_1 \beta_2 y_y' + 2 \gamma_1 \gamma_2 z_z' \\ &\quad + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) y_z' + (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) z_x' + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) x_y'. \end{aligned} \tag{17}$$

Da in den nach x', y', z' aufgelösten Formeln (16) α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$ dieselbe Stelle einnehmen wie in den nach x, y, z aufgelösten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\ldots$, so fügt man leicht zu (17) ein analoges System von der Gestalt:

$$x_x' = \alpha_1^2 x_x + \alpha_2^2 y_y + \alpha_3^2 z_z + \alpha_2\alpha_3 y_z + \alpha_3\alpha_1 z_x + \alpha_1\alpha_2 x_y \quad \text{u. s. f.} \quad (17')$$

Man erkennt aus diesen Systemen die Richtigkeit der oben gemachten Behauptungen, dass $x_x + y_y$ von der Lage der X- und Y-Axe in der XY-Ebene und $x_x + y_y + z_z$ überhaupt von der Lage des Coordinatensystemes unabhängig ist. —

Wir stellen schliesslich noch eine Betrachtung an über das Verhalten der Verschiebungen an der Oberfläche eines nichtstarren Körpers.

Aus der zu Grunde gelegten Annahme, dass die Verrückungen stetige Functionen der Coordinaten sind, folgt, dass die Oberfläche des Körpers immer von denselben Massentheilchen gebildet werden muss. Denn um jeden der Oberfläche beliebig nahen innern Punkt p können wir uns ein Bereich B und darin eine unendlich kleine Kugel um p als Centrum construirt denken; diese verwandelt sich, wie wir oben gesehen, stets in ein Ellipsoid mit p als Centrum — ein innerer Punkt kann also nie an die Oberfläche gelangen.

Ist also die Gleichung der im allgemeinsten Falle mit der Zeit veränderlichen Oberfläche

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

so muss, wenn der Punkt x, y, z zur Zeit $t + \delta t$ nach der Stelle $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ gerückt ist, auch dieses System von Variabeln der Gleichung $F = 0$ genügen.

Hieraus folgt, dass auch

$$\frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 \quad (18)$$

sein muss. Diese Gleichung bestimmt, wenn δx, δy, δz als Functionen von t gegeben sind, eine Fläche, welche dem bewegten Körper als Begrenzung zu dienen vermag.

Ist die Form der Oberfläche und ihre Bewegung gegeben, so giebt (18) eine Bedingung für die Geschwindigkeiten $\delta x/\delta t$, $\delta y/\delta t$, $\delta z/\delta t$ an der Oberfläche. Enthält F die Zeit nicht, d. h. ist die Oberfläche unveränderlich, so lässt sich nach Division durch:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

die vorstehende Gleichung schreiben:

$$\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z) = 0, \quad (18')$$

worin n die Normale auf der festen Fläche bezeichnet und der ganze

Ausdruck links die Componente der Verschiebung in der Grenze nach dieser Normalen bedeutet.

Haben zwei nichtstarre Körper ein Stück ihrer Oberfläche gemeinsam, so muss für die Verschiebungen $\delta_h x$, $\delta_h y$, $\delta_h z$ und $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$ in beiden die Bedingung (18) gelten. Die Differenz giebt wie vorstehend behandelt:

$$(\delta_h x - \delta_k x)\cos(n, x) + (\delta_h y - \delta_k y)\cos(n, y) + (\delta_h z - \delta_k z)\cos(n, z) = 0 \quad (18'')$$

und sagt aus, dass in diesem Falle die Bewegungscomponenten nach der Normalen in beiden Medien an der Grenze gleich werden müssen. Die Componenten parallel der Grenze können im Allgemeinen verschieden sein; nur in dem speciellen Falle, dass die Körper fest zusammenhängen, wie z. B. zwei zusammengelöthete Metalle, müssen die Verrückungen zu beiden Seiten völlig übereinstimmen; die letzte Bedingung ist in diesem Falle mit

$$\delta_h x = \delta_k x, \qquad \delta_h y = \delta_k y, \qquad \delta_h z = \delta_k z \quad (18''')$$

zu vertauschen.

§ 27. **Druckkräfte in nichtstarren Körpern.**

Dass die Theile eines Körpers in der eigenthümlichen Verbindung mit einander stehen, die wir wahrnehmen, erklären wir durch die Annahme von Kräften, welche sie auf einander ausüben. Bei den starren Körpern, deren Theile in unveränderlicher gegenseitiger Lage verharren, sodass die Bewegung eines Elementes diejenige des Ganzen bestimmt, gelang es, zu den vollständigen Gesetzen der Bewegung unter Elimination jener Wechselwirkungen aus den Bewegungsgleichungen zu gelangen; bei den nichtstarren Körpern, deren Theile gegen einander innerhalb gewisser Grenzen verschiebbar sind, sodass durch die Bewegung eines Elementes das Verhalten der übrigen nicht bestimmt ist, müssen sie in Rechnung gezogen werden. Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der Eigenschaften, welche wir ihnen beilegen, und der Gesetze, welche hieraus für sie folgen.

Die Beobachtung zeigt, dass die Kräfte, welche ponderable Massen auf einander ausüben, bei grosser Annäherung derselben viel schneller wachsen, als das Newton'sche Gesetz der Gravitation ergiebt, dass die Körper, in Flächen zu inniger Berührung gebracht, mit einer gewissen Festigkeit an einander haften, der Annäherung über eine gewisse Grenze hinaus aber einen Widerstand entgegensetzen. Wir schliessen aus diesen Erscheinungen, dass die Gravitation nur den einen Theil der Wechselwirkung darstellt, welcher in merklicher Entfernung allein merklich ist, dass aber noch andere Theile existiren, die bei unmerklicher Entfernung jenen weitaus überwiegen. Diese nennen wir die

molecularen Wirkungen, ohne mit diesem Namen eine bestimmte Hypothese über die Constitution der Materie aussprechen zu wollen, blos um dadurch Kräfte anzudeuten, welche ausschliesslich zwischen den einander unendlich nahen kleinsten Theilen der Materie stattfinden.

Welchen Gesetzen diese Wechselwirkungen folgen, ist uns durchaus unbekannt; aber für die Anwendungen, die wir in der Mechanik der nichtstarren Körper von ihnen machen, genügen die Annahmen, dass die Wechselwirkung zwischen zwei kleinsten Massentheilchen erstens dem Gesetz der Gleichheit von Action und Reaction folgt, zweitens in der Verbindungslinie liegt und drittens nur in Entfernungen merklich ist, welche unendlich klein zweiter Ordnung sind. Letzteres kann man auch so fassen, dass man ihre Wirkungssphäre von derselben Ordnung unendlich klein gegen die Volumenelemente der Körper annimmt, auf welche wir die Bewegungsgleichungen für Massenpunkte anwenden, als diese selbst unendlich klein gegen die Dimensionen der Körper sind.

In Folge dessen betreffen die Molecularwirkungen, welche ein Volumenelement von der umgebenden Masse erleidet, nur dessen unendlich dünne Oberflächenschicht, dasselbe erleidet, wie man kürzer sagt, Oberflächendrucke von den Nachbarelementen.

Construirt man über einem beliebig durch den willkürlichen Punkt p des Körpers gelegten ebenen Flächenelement f einen geraden Cylinder nach der Seite, in welcher man die Normale n zu f positiv rechnet, und nennt man ein Massenelement innerhalb dieses Cylinders δm_1, eines jenseits der Grundfläche f aber δm, so bezeichnet man als Componenten des Moleculardruckes gegen die durch die Coordinaten x, y, z und die Normale n in ihrer Lage definirte Fläche f die Summen über die bezüglichen Componenten für alle Kräfte, welche die Massen δm_1 von den Massen δm erfahren. Dividirt man diese Summen noch durch die Grösse des Flächenelementes f, so erhält man diejenigen Werthe, die stattfinden würden, wenn die Massenvertheilung über der ganzen Flächeneinheit dieselbe wäre, wie über dem Flächenelement f, und die Summe sich auf den Cylinder über dieser Flächeneinheit bezöge.

Die so bestimmten reducirten Werthe, welche eigentlich specifische Druckcomponenten heissen müssten, nennt man kurz Druckcomponenten oder Molecularcomponenten, indem man den Zusatz „bezogen auf die Flächeneinheit" unterdrückt, und bezeichnet sie durch X_n, Y_n, Z_n, wenn sie den Coordinatenaxen X, Y, Z parallel genommen sind. Der Index n deutet nach dem Obigen diejenige Seite der Normalen an, auf welcher die Masse liegt, gegen welche der Druck stattfindet.

Ist $\delta m \, \delta m_1 \, F(r)$ das Elementargesetz der Wechselwirkung, welche in der Richtung der Verbindungslinie r zwischen δm und δm_1 stattfindet, so ist nach dieser Definition:

$$
\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{f} \sum \delta m \sum \delta m_1 \, F(r) \cos(r, x), \\
Y_n &= \frac{1}{f} \sum \delta m \sum \delta m_1 \, F(r) \cos(r, y), \\
Z_n &= \frac{1}{f} \sum \delta m \sum \delta m_1 \, F(r) \cos(r, z).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Der resultirende Druck P_n bestimmt sich durch

$$P_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2,$$

seine Richtung ist gegeben durch

$$\cos(P, x) = \frac{X_n}{P_n}, \qquad \cos(P, y) = \frac{Y_n}{P_n}, \qquad \cos(P, z) = \frac{Z_n}{P_n}. \tag{19'}$$

Es fällt also die Richtung des Druckes P_n keineswegs immer mit der Normalen n zusammen.

Die Dimensionen der specifischen Drucke $P_n \ldots$ sind nach dem Vorstehenden die einer Kraft, dividirt durch eine Fläche, das heisst, es ist

$$[P_n] = [X_n] = [Y_n] = [Z_n] = [m l^{-1} t^{-2}];$$

die Einheit des Druckes ist diejenige, die erhalten wird, wenn die Krafteinheit auf die Flächeneinheit ausgeübt wird. Die in der Technik gebrauchte Einheit, nämlich der Druck eines Gewichtes von 1 Kilogramm auf die Fläche eines Quadratmillimeters, ist, da das Gewicht eines Grammes 981 unserer Krafteinheiten beträgt, gleich 98 100 000 unserer Druckeinheiten. Eine andere practische Druckeinheit werden wir weiter unten kennen lernen.

Die Componenten X_n, Y_n, Z_n sind zwar zunächst nur Rechnungsgrössen ohne die mechanische Bedeutung von Gesammtcomponenten, da die Einzelwirkungen, die sie zusammensetzen, nicht auf die Theile eines starren Körpers ausgeübt werden; da aber die Massentheilchen, auf welche dieselben stattfinden, dem Flächenelement q unendlich nahe liegen, treten sie in die Bewegungsgleichungen doch ebenso ein, als hätten sie einen gemeinsamen Angriffspunkt und könnten demgemäss für jede Stelle zu einer Resultirenden zusammengefasst werden.

Wir gehen wiederum von den sechs Bewegungsgleichungen für ein Punktsystem aus, welche die Sätze über die Bewegung des Schwerpunktes und über die Flächenmomente enthalten und in § 15 mit (101) und (102) bezeichnet sind, und wenden sie auf einen beliebigen Theil des betrachteten Körpers an.

Die innern Kräfte dieses Theiles sind, wie p. 122 und p. 124 entwickelt, aus diesen Gleichungen verschwunden in Folge der Annahme,

dass für sie die Gleichheit von Action und Reaction gilt, und dass ihre Richtung in die Verbindungslinie der wechselwirkenden Massen fällt. Aus unsern Voraussetzungen folgt also, dass für die Bewegung wie für das Gleichgewicht eines nichtstarren Körpers oder eines Theiles von einem solchen nur die von aussen einwirkenden Kräfte massgebend sein. Es können also auch von Molecularwirkungen nur diejenigen auftreten, welche von ausserhalb liegenden Massen ausgeübt werden. Diese wirken nur auf die Oberflächenschicht und kommen daher nur in den oben eingeführten Combinationen X_n, Y_n, Z_n vor, wo n die innere Normale auf dem Oberflächenelement bedeutet.

Bezeichnen wir noch die auf die Masseneinheit an der Stelle x, y, z wirkenden äussern Kräfte mit X, Y, Z, benutzen diese Buchstaben also in einem andern Sinn, als in den ersten beiden Theilen, und nennen die Dichtigkeit an derselben Stelle ε, so schreibt sich jenes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}\int \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} dk &= \int \varepsilon X dk + \int X_n do,\\ \int \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} dk &= \int \varepsilon Y dk + \int Y_n do,\\ \int \varepsilon \frac{d^2 z}{dt^2} dk &= \int \varepsilon Z dk + \int Z_n do,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\int \varepsilon \left(z \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dk &= \int \varepsilon (z Y - y Z) dk + \int (z Y_n - y Z_n) do,\\ \int \varepsilon \left(x \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dk &= \int \varepsilon (x Z - z X) dk + \int (x Z_n - z X_n) do,\\ \int \varepsilon \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dk &= \int \varepsilon (y X - x Y) dk + \int (y X_n - x Y_n) do;\end{aligned} \tag{21}$$

dk bezeichnet hierin, wie früher, das Körper-, do das Oberflächenelement des betrachteten Theiles.

Die Kraftcomponenten X_n, Y_n, Z_n variiren, wenn wir Ort und Lage des Flächenelementes ändern, auf welche sie sich beziehen. Wir können in Bezug hierauf eine Reihe von Sätzen ableiten, indem wir die vorstehenden Gleichungen auf Bereiche von bestimmter Form innerhalb des Körpers anwenden. Für diese Untersuchungen ist der folgende Hülfssatz von Nutzen.

Bezeichnet φ eine eindeutige stetige Function der Coordinaten x, y, z, so lässt sich das über einen beliebigen Raum k zu erstreckende Integral

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dk = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

nach x ausführen und giebt

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dk = \iint dy\,dz\,(-\varphi_{a_1} + \varphi_{b_1} - \varphi_{a_2} + \varphi_{b_2} \pm \cdots),$$

wo die Werthe φ sämmtlich für dasselbe y und z, aber diejenigen Werthe x zu nehmen sind, welche die Integrationsgrenzen bilden (Fig. 35). Diejenigen, welche sich auf die untern Grenzen $a_1, a_2 \ldots$ beziehen, sind mit negativem, die, welche sich auf die obern $b_1, b_2 \ldots$ beziehen, sind mit positivem Vorzeichen versehen. Die erste Summation hat alle Volumenelemente zusammengefasst, die einem parallel der X-Axe verlaufenden Elementarfaden vom Querschnitt $dy\,dz$ angehören; die beiden noch übrigen betreffen alle Elementarfäden, in die sich der ganze Raum zerlegen lässt. Man kann das Doppelintegral in die Form eines Oberflächenintegrales bringen.

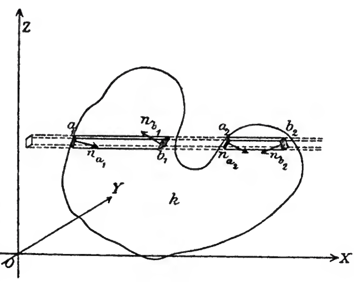


Fig. 35.

Führt man nämlich die Richtung der innern Normale n ein und beachtet, dass dieselbe mit der $+X$-Richtung an den untern Grenzen a einen spitzen, an den obern Grenzen b einen stumpfen Winkel einschliesst, so kann man $dy\,dz$ als die Projection von Oberflächenelementen do_a und do_b, welche an allen Stellen a und b durch den betrachteten Elementarfaden aus der Oberfläche ausgeschnitten werden, betrachten und setzen

$$\begin{aligned} dy\,dz &= +\,do_a \cos(n_a, x) \\ &= -\,do_b \cos(n_b, x) \end{aligned}$$

und erhält so:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dk = -\int \left(\sum do_a\,\varphi_a \cos(n_a, x) + \sum do_b\,\varphi_b \cos(n_b, x)\right).$$

Hier stehen rechts alle nach der $-X$-Seite liegenden Oberflächenelemente do_a und alle nach der $+X$-Seite liegenden do_b, die Summe erstreckt sich demnach auf die gesammte Oberfläche und lässt sich schreiben

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dk = -\int \bar{\varphi} \cos(n, x)\, do,$$

wo $\bar{\varphi}$ kurz den in dem Oberflächenelement do stattfindenden Werth von φ bezeichnet. Denkt man eine der vorstehenden entsprechende Operation mit $\partial\varphi/\partial y$ und $\partial\varphi/\partial z$ vorgenommen, so gelangt man zu dem gesuchten Hülfssatz:

Für eine eindeutige stetige Function φ der Coordinaten x, y, z gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Integralen über einen beliebigen Raum k und denen über seine Oberfläche o, in welchen n die innere Normale bezeichnet:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dk = -\int \overline{\varphi} \cos(n, x)\, do,$$
$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dk = -\int \overline{\varphi} \cos(n, y)\, do, \tag{22}$$
$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial z} dk = -\int \overline{\varphi} \cos(n, z)\, do.$$

Vertauschen wir in diesen drei Gleichungen φ resp. mit $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$, $\partial \varphi / \partial z$, addiren sie darnach und setzen hier, wie weiterhin, immer kurz

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi, \tag{22'}$$

so erhalten wir:

$$\int \Delta \varphi\, dk = -\int \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \cos(n, x) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \cos(n, y) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \cos(n, z) \right) do.$$

Nun ist die Klammer auf der linken Seite die Aenderung, welche φ erleidet, wenn man von do in der Richtung der Normale um dn fortschreitet, diese durch dn dividirt; bezeichnet man diesen Werth, wie früher, durch $\partial \varphi / \partial n$, so kann man das letztere Resultat auch schreiben:

$$\int \Delta \varphi\, dk = -\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\, do. \tag{22''}$$

Diese Folgerung aus unserem Hülfssatz, welche voraussetzt, dass $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$, $\partial \varphi / \partial z$ innerhalb k eindeutig und stetig sind, ist von vielfachem Nutzen. —

Wir wenden nun die drei Gleichungen (20) auf ein Volumen an, welches die Form eines geraden Cylinders hat, dessen Höhe dh unendlich klein gegen seine Querdimension ist. Setzen wir $dk = dh\, do$, so erkennen wir, dass die Raumintegrale, endliche Werthe der Beschleunigungen und Kräfte vorausgesetzt, wegen des Factors dh unendlich klein werden. Es folgt daraus, dass die Oberflächenintegrale ebenfalls einen von der Ordnung dh unendlich kleinen Werth besitzen müssen. Dieselben zerfallen in drei Theile, die sich auf die Cylinder- und die beiden Grundflächen erstrecken. Der erste ist mit dh proportional, es müssen demnach die letzten beiden, für sich endlichen, zusammen ebenfalls von der Ordnung von dh sein. Da die inneren Normalen für die beiden Grundflächen entgegengesetzte Richtung haben, so können wir die eine mit $+n$, die andere mit $-n$ bezeichnen und erhalten, wenn wir mit f_k einen endlichen Factor bezeichnen:

$$\int (X_{+n} + X_{-n})\, do = f_1\, dh,$$
$$\int (Y_{+n} + Y_{-n})\, do = f_2\, dh,$$
$$\int (Z_{+n} + Z_{-n})\, do = f_3\, dh;$$

das Flächenintegral ist über die eine Grundfläche zu erstrecken.

Da über Gestalt und Grösse der Grundfläche o gar nichts vorausgesetzt ist, so müssen diese Gleichungen bei jeder Veränderung derselben bestehen bleiben, d. h. es müssen, für je zwei sich entsprechende Punkte der beiden Grundflächen genommen, die Summen der im allgemeinen endlichen Druckcomponenten

$$(X_{+n} + X_{-n}), \qquad (Y_{+n} + Y_{-n}), \qquad (Z_{+n} + Z_{-n})$$

von der Ordnung ihres Abstandes dh sein.

Hieraus schliessen wir, indem wir unendlich Kleines neben Endlichem vernachlässigen, den Satz:

G e g e n z w e i F l ä c h e n e l e m e n t e, w e l c h e d u r c h d e n s e l b e n P u n k t m i t e n t g e g e n g e s e t z t e r R i c h t u n g d e r p o s i t i v e n N o r m a l e n g e l e g t s i n d, w i r k e n g l e i c h g r o s s e u n d e n t g e g e n g e s e t z t g e r i c h t e t e D r u c k e; e s i s t n ä m l i c h:

$$X_{+n} = -X_{-n}, \qquad Y_{+n} = -Y_{-n}, \qquad Z_{+n} = -Z_{-n}. \tag{23}$$

Die Gleichungen (21), auf dasselbe Volumen angewandt, führen zu denselben Beziehungen.

Wenden wir ferner das System (20) auf ein kleines Tetraëder an, das begrenzt wird durch drei durch x, y, z gelegte Parallele zu den Coordinatenebenen und eine jene schneidende Ebene, deren äussere Normale mit n und deren Grösse mit o_n bezeichnet werden mag, so sind die Raumintegrale proportional mit der normal zu o_n gemessenen Höhe dh des Tetraëders, die Oberflächenintegrale aber nicht, und letztere müssen demnach in der Summe sich gegenseitig bis auf Glieder von dieser Ordnung zerstören.

Da die innern Normalen auf den vier Seitenflächen resp. $+x$, $+y$, $+z$, $-n$ sind, so geben die Integrale über dieselben

$$o_x X_x + o_y X_y + o_z X_z + o_n X_{-n} = o_n f\, dh$$

u. s. f., oder da

$$o_x = o_n \cos(n, x), \qquad o_y = o_n \cos(n, y), \qquad o_z = o_n \cos(n, z)$$

und

$$X_{-n} = -X_n, \qquad Y_{-n} = -Y_n, \qquad Z_{-n} = -Z_n$$

ist, bei Vernachlässigung von unendlich Kleinem neben Endlichem:

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) &= X_n, \\ Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) &= Y_n, \\ Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) &= Z_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Druckcomponenten gegen ein Flächenelement mit der Normale n bestimmen sich durch die parallelen Componenten, welche gegen Flächenelemente wirken, deren Normalen in die X-, Y-, Z-Axe fallen, indem man Repräsentanten der letzteren auf den bezüglichen Axen aufträgt und ihre Projectionen auf die Richtung von n summirt.

Dieser Satz bestimmt die gegen ein beliebiges Flächenelement in xyz wirkenden Drucke nach Grösse und Richtung durch die neun für dieselbe Stelle gegebenen speciellen Druckcomponenten X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z. Diese Kräfte betrachten wir als innerhalb desselben Körpers eindeutig und stetig und können deshalb den Hülfssatz (22) auf sie anwenden. Bildet man also:

$$\int X_n\,do = \int \left(X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z)\right) do$$

für die Oberfläche eines beliebigen Raumes innerhalb des Körpers, so kann man die rechte Seite schreiben

$$= -\int \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dk$$

und erhält beim Einsetzen in die erste Gleichung (20):

$$\int \left(\varepsilon\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dk = 0.$$

Da die Gleichung für jedes Volumen gelten soll, muss der Factor von dk unter dem Integralzeichen verschwinden, und man erhält, indem man $\int Y_n\,do$ und $\int Z_n\,do$ in gleicher Weise behandelt, hierdurch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z},\\
\varepsilon\frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z},\\
\varepsilon\frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Die Componenten der Beschleunigungen nach den Coordinatenaxen, multiplicirt mit der Dichte ε, sind für jeden Punkt des nichtstarren Körpers gegeben durch die auf die Volumeneinheit bezogenen Componenten der äussern Kräfte, weniger den Differentialquotienten der parallel wirkenden Drucke gegen die Coordinatenebenen nach deren Normalen.

Dieses System liefert, wie wir sehen werden, die Bewegungsgleichungen für nichtstarre Körper.

Es ist nützlich, schon hier zu beachten, dass in den Gleichungen (25) die Differentiale der Coordinaten x, y, z in doppeltem Sinne

auftreten, links als die Aenderungen der Coordinaten des Massenelementes in Folge der Bewegung, rechts als willkürliche Zuwachse, denen Aenderungen der von Ort und Zeit abhängig gedachten Druckcomponenten entsprechen. Bei der Integration der Gleichungen wird dieser doppelten Bedeutung Rechnung zu tragen sein.

Setzt man die durch (25) gelieferten Werthe von $\varepsilon\, d^2y/dt^2$ und $\varepsilon\, d^2z/dt^2$ in die erste der Gleichungen (21) ein, so erhält man:

$$0 = \int \left[y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\right] dk + \int (z\, Y_n - y\, Z_n)\, do,$$

oder, anders geschrieben:

$$0 = \int \left(\frac{\partial y Z_x}{\partial x} + \frac{\partial y Z_y}{\partial y} + \frac{\partial y Z_z}{\partial z} - \frac{\partial z Y_x}{\partial x} - \frac{\partial z Y_y}{\partial y} - \frac{\partial z Y_z}{\partial z}\right) dk$$
$$+ \int (z\, Y_n - y\, Z_n)\, do - \int (Z_y - Y_z)\, dk.$$

Das erste Raumintegral lässt sich nach dem Hülfssatz (22) umformen und giebt dann gerade das folgende Oberflächenintegral mit negativem Vorzeichen. Es bleibt demgemäss

$$0 = \int (Z_y - Y_z)\, dk,$$

eine Gleichung, die für jedes beliebige Volumen k nur dann erfüllt sein kann, wenn der Factor von dk verschwindet. Hierdurch und durch ähnliche Behandlung der zweiten und dritten Gleichung (21) erhält man das Resultat:

$$Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z, \qquad X_y = Y_x. \tag{26}$$

F ü r z w e i d u r c h d e n s e l b e n P u n k t n o r m a l z u e i n a n d e r g e l e g t e F l ä c h e n e l e m e n t e s i n d d i e j e n i g e n T a n g e n t i a l d r u c k e , w e l c h e n o r m a l z u d e r S c h n i t t l i n i e d e r b e i d e n F l ä c h e n e l e m e n t e s t e h e n , u n t e r e i n a n d e r g l e i c h .

Die Bedeutung dieses zunächst überraschenden Satzes wird klar, wenn man überlegt, wie sich nach den Formeln (21) ein prismatisches unendlich kleines Volumen innerhalb des Körpers hinsichtlich der wirkenden Drehungsmomente verhält. Wiederum sind die Raumintegrale, endliche Beschleunigungen und Kräfte vorausgesetzt, als in Bezug auf die Dimensionen des Prismas vom dritten Grade, unendlich klein gegen jedes der Oberflächenintegrale, sodass diese sich gegenseitig bis auf ein Glied niederer Ordnung zerstören müssen, wenn nicht die Rotationsbeschleunigungen unendlich gross werden sollen. In den Oberflächenintegralen heben sich aber die auf gegenüberliegende Flächen wirkenden Normaldrucke gegenseitig auf, da sie an gleichen Hebelarmen wirken und entgegengesetzt gleich sind, die bezüglichen Tangentialdrucke aber haben verschiedene Hebelarme und können sich

demnach nicht in derselben Weise zerstören; damit nicht unendliche Beschleunigung eintritt, müssen sich daher die auf verschiedene Flächenpaare wirkenden Drucke, welche um dieselbe Axe drehen, compensiren.

Durch den letzten Satz wird die Anzahl der für einen beliebigen Punkt von einander unabhängigen Druckcomponenten auf sechs reducirt.

Sind also für eine Stelle x, y, z die sechs Componenten

$$X_x, \ Y_y, \ Z_z, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z, \qquad X_y = Y_x$$

gegeben, so ist dadurch der gegen ein beliebig durch x, y, z gelegtes Flächenelement wirkende Druck nach Grösse und Richtung bestimmt.

Wir wollen schliesslich voraussetzen, dass das körperliche System aus mehreren homogenen Theilen bestehe, welche zum Theil eine gemeinschaftliche Grenzfläche besitzen, und wollen die Formeln (20) auf ein Volumen anwenden, das begrenzt wird durch zwei Oberflächen, welche beiderseitig in sehr kleinen Abständen parallel der Grenzfläche zwischen zwei solchen Theilen gelegt sind, und durch irgend eine auf beiden normal stehende Mantelfläche. Unterscheidet man die Werthe der Componenten für beide Medien durch die Indices h und k und versteht unter den Normalen n die innern bezüglich des betrachteten Volumenelementes, so erhält man durch Anwendung der p. 298 benutzten Betrachtungsweise

$$(\overline{X}_n)_h + (\overline{X}_n)_k = 0, \qquad (\overline{Y}_n)_h + (\overline{Y}_n)_k = 0, \qquad (\overline{Z}_n)_h + (\overline{Z}_n)_k = 0, \tag{27}$$

wo der über die Buchstaben gesetzte Strich andeuten soll, dass der Werth unendlich nahe an der Grenzfläche zu nehmen ist; die Normalen sind für die zusammenstossenden Körper die äussern.

In der Grenze zweier Medien müssen die Drucke, welche von beiden Seiten gegen das Grenzflächenelement ausgeübt werden, sich zerstören.

Ein häufiger Fall ist der, dass die Kraft, welche von der einen Seite gegen das Oberflächenelement ausgeübt wird, direct gegeben ist, so, wenn eine Flüssigkeit in einem Cylinder durch einen belasteten Kolben comprimirt oder ein Draht durch ein angehängtes Gewicht gedehnt wird. In diesem Falle bezeichnen wir die, ebenso wie X_n, Y_n, Z_n auf die Einheit der Fläche bezogenen, gegebenen äussern Druckcomponenten mit $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ und haben dann statt (27) die Form:

$$\overline{X}_n + \overline{X} = 0, \qquad \overline{Y}_n + \overline{Y} = 0, \qquad \overline{Z}_n + \overline{Z} = 0. \tag{27'}$$

In den Flächenelementen, für welche die äussern Druckcomponenten $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ gegeben sind, müssen diese die Werthe der innern Druckcomponenten $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$, $\overline{Z}_n$, unter n die äussere Normale des Körpers verstanden, zu Null ergänzen.

Wir wollen nun den Beweis führen, dass in den vorstehend abgeleiteten Sätzen (23) bis (27) über die Druckcomponenten Alles enthalten ist, was sich aus den Gleichungen (20) und (21) durch Anwendung auf irgend welche einfache oder zusammengesetzte Körper finden lässt. Dies leisten wir, indem wir zeigen, dass die Gleichungen (20) und (21) so vollständig in unseren Sätzen aufgegangen sind, dass wir sie im denkbar allgemeinsten Falle aus ihnen mit Strenge wieder ableiten können.

Wir betrachten dazu ein aus beliebig vielen homogenen Theilen bestehendes körperliches System und wenden auf einen Punkt desselben die erste Gleichung (25) an, multipliciren sie mit dem Raumelement dk, integriren sie über den ganzen homogenen Theil k_i und summiren sie darnach über alle Theile.

Wir erhalten so:

$$\sum_i \int_{(i)} \varepsilon \frac{d^2x}{dt^2}\, dk = \sum_i \int_{(i)} \varepsilon X\, dk - \sum_i \int_{(i)} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dk;$$

die Anwendung des Hülfssatzes (22) auf das letzte Integral ergiebt in Rücksicht auf (24)

$$= \sum_i \int_{(i)} \varepsilon X\, dk + \sum_i \int_{(i)} \overline{X}_n\, do,$$

wo das Oberflächenintegral sämmtliche Oberflächenelemente aller Theile betrifft und n die innere Normale auf ihnen bezeichnet. Diejenigen Elemente do, welche der Grenze zwischen zwei Theilen angehören, kommen auch zweimal vor, und die sie betreffenden Glieder heben sich nach (27) hinweg; es bleiben sonach nur die Glieder, welche sich auf die äussere Begrenzung des betrachteten körperlichen Systemes beziehen. Damit ist aber die erste Gleichung (20) in allgemeinster Fassung zurückgewonnen, und in gleicher Weise lässt sich die zweite und dritte bilden.

Fassen wir hingegen die zweite und dritte Gleichung (25) mit den Factoren $+z$ und $-y$ zusammen und integriren sie über das betrachtete körperliche System, so ergiebt sich:

$$\sum_i \int_{(i)} \varepsilon \left(z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2}\right) dk = \sum_i \int_{(i)} \varepsilon (zY - yZ)\, dk$$
$$- \sum_i \int_{(i)} \left[z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) - y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right] dk,$$

oder wegen (26) auch:

$$= \sum_i \int_{(i)} \varepsilon (zY - yZ)\, dk$$
$$- \sum_i \int_{(i)} \left[\left(\frac{\partial zY_x}{\partial x} + \frac{\partial zY_y}{\partial y} + \frac{\partial zY_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial yZ_x}{\partial x} + \frac{\partial yZ_y}{\partial y} + \frac{\partial yZ_z}{\partial z}\right)\right] dk.$$

Hier lässt sich das letzte Integral durch den Hülfssatz (22) umformen, sodass man unter Rücksicht auf (24) erhält:

$$\sum_i \int_{(i)} \varepsilon \left(z \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \sum_i \int_{(i)} \varepsilon (z Y - y Z) dk + \sum_i \int_{(i)} (z Y_n - y Z_n) do.$$

Von dem Oberflächenintegral bleibt wegen (27) nur der Theil, welcher sich auf die äussere Begrenzung des betrachteten Systemes bezieht und demnach stellt die erhaltene Gleichung die erste des Systemes (21) in allgemeinster Fassung dar; ebenso können die übrigen gebildet werden.

Hiernach sind die Gleichungen (20) und (21) in der That vollständig in die Sätze (23) bis (27) aufgegangen, und diese enthalten Alles, was allgemein über die Druckcomponenten ausgesagt werden kann. —

Wir ziehen aus denselben nun einige Folgerungen, welche die Art der Vertheilung der Druckkräfte um einen Punkt zu veranschaulichen geeignet sind.

Sei durch die Stelle x, y, z, die wir kurz den Punkt p nennen wollen, ein Flächenelement gelegt, dessen Lage durch die Cosinus $\cos(n, x) = \alpha$, $\cos(n, y) = \beta$, $\cos(n, z) = \gamma$ der Winkel bestimmt ist, welche seine, wie oben festgesetzt, positiv gerechnete Normale n mit den Coordinatenaxen einschliesst; der Druck P_n, welcher gegen dasselbe ausgeübt wird, schliesst dann Winkel mit den Coordinatenaxen ein, deren Cosinus α', β', γ' gegeben sind durch:

$$\alpha' = \frac{X_n}{P_n}, \qquad \beta' = \frac{Y_n}{P_n}, \qquad \gamma' = \frac{Z_n}{P_n}.$$

Denkt man sich eine mit P_n proportionale Länge (P_n) als seinen Repräsentanten auf der Richtung des Druckes aufgetragen, so hat der Endpunkt dieser Strecke nach den letzten Formeln die Coordinaten $\xi' = (X_n)$, $\eta' = (Y_n)$, $\zeta' = (Z_n)$. Wechseln wir die Lage des Flächenelementes, d. h. die Richtung von n, so ändern sich X_n, Y_n, Z_n und demnach die Coordinaten ξ', η', ζ' in gesetzmässiger Weise; der Endpunkt von (P_n) beschreibt eine Oberfläche, deren Gestalt wir jetzt untersuchen wollen.

Wir haben nach (24):

$$\begin{aligned} \alpha'(P_n) &= \xi' = (X_x)\alpha + (X_y)\beta + (X_z)\gamma, \\ \beta'(P_n) &= \eta' = (Y_x)\alpha + (Y_y)\beta + (Y_z)\gamma, \\ \gamma'(P_n) &= \zeta' = (Z_x)\alpha + (Z_y)\beta + (Z_z)\gamma, \end{aligned} \tag{28}$$

worin (X_x), (Y_y), (Z_z), (Y_z), (Z_x), (X_y), die Repräsentanten der sechs Drucke gegen die Coordinatenebenen, mit dem Zustand des Körpers für die Stelle p gegebene Grössen sind.

Die Gleichung der Oberfläche erhalten wir daraus, wenn wir α, β, γ, die sich auf eine bestimmte Lage von n beziehen, unter Zuhülfenahme der Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

hieraus eliminiren.

Dies geschieht, indem wir die Gleichungen (28) nach α, β, γ auflösen, wodurch wir zu dem System

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi' p_1 + \eta' q_3 + \zeta' q_2, \\ \beta &= \xi' q_3 + \eta' p_2 + \zeta' q_1, \\ \gamma &= \xi' q_2 + \eta' q_1 + \zeta' p_3 \end{aligned} \tag{28'}$$

gelangen, und die Summe ihrer Quadrate addiren. Wir erhalten so die Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 = (p_1\xi' + q_3\eta' + q_2\zeta')^2 + (q_3\xi' + p_2\eta' + q_1\zeta')^2 \\ + (q_2\xi' + q_1\eta' + p_3\zeta')^2 \end{aligned} \tag{29}$$

und damit den folgenden Satz:

Legt man in einem nichtstarren Körper durch einen gegebenen Punkt Flächenelemente in allen möglichen Lagen und trägt für die gegen sie wirkenden Druckkräfte P_n Repräsentanten (P_n) auf deren Richtungen auf, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken ein dreiaxiges Ellipsoid, welches man als das erste Druckellipsoid bezeichnet.

Richtungen und Grössen der Drucke verhalten sich hiernach symmetrisch in Bezug auf drei zu einander normale Richtungen, in welchen sie die grössten, resp. kleinsten Werthe annehmen; diese Richtungen heissen die Hauptdruckaxen für den gegebenen Punkt.

Die Lage der Hauptdruckaxen bestimmt sich durch dasselbe Verfahren, welches p. 286 zur Bestimmung der Hauptdilatationsaxen angewandt worden ist.

Führt man Polarcoordinaten durch die Substitution

$$\xi' = r'\alpha', \qquad \eta' = r'\beta', \qquad \zeta' = r'\gamma'$$

ein, so erhält man aus (29):

$$(\alpha' p_1 + \beta' q_3 + \gamma' q_2)^2 + (\alpha' q_3 + \beta' p_2 + \gamma' q_1)^2 + (\alpha' q_2 + \beta' q_1 + \gamma' p_3)^2 = \frac{1}{r'^2}, \tag{29'}$$

was wieder abgekürzt werde in

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{r'^2}. \tag{29''}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (8″) und (8‴) nur dadurch, dass auf der rechten Seite 1 an Stelle von R^2 steht.

Die α', β', γ', welche die Richtungen der Hauptdruckaxen bestimmen, berechnen sich demgemäss, wie oben, aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 A + q_3 B + q_2 C - \varrho'\alpha' &= 0, \\ q_3 A + p_2 B + q_1 C - \varrho'\beta' &= 0, \\ q_2 A + q_1 B + p_3 C - \varrho'\gamma' &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

unter Rücksicht auf die Beziehung:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Letztere Gleichungen werden identisch erfüllt durch

$$\begin{aligned} A + \varrho\alpha' &= 0, \\ B + \varrho\beta' &= 0, \qquad \varrho' = +\varrho^2, \\ C + \varrho\gamma' &= 0, \end{aligned} \tag{30'}$$

sie bestimmen demgemäss zugleich die Lage der Hauptaxen für die Fläche zweiten Grades

$$p_1\alpha'^2 + p_2\beta'^2 + p_3\gamma'^2 + 2q_1\beta'\gamma' + 2q_2\gamma'\alpha' + 2q_3\alpha'\beta' = \pm\frac{R}{r'^2}, \tag{31}$$

welche kurz das zweite Druckellipsoid genannt wird, obgleich sie nicht stets ein Ellipsoid zu sein braucht, da p_1, p_2, p_3 grösser und kleiner als Null sein können; R bezeichnet eine willkürliche Constante.

Das erste und zweite Druckellipsoid sind also coaxial.

Das zweite Druckellipsoid erscheint auf seine Hauptaxen bezogen, wenn durch die Wahl des Coordinatensystemes, was wir wieder durch den Index ^{0} andeuten wollen, $q_1^0 = q_2^0 = q_3^0 = 0$ gemacht ist.

Setzen wir dies voraus, so wird das System (28′) zu:

$$\alpha = p_1^0\xi', \qquad \beta = p_2^0\eta', \qquad \gamma = p_3^0\zeta'; \tag{31'}$$

die Einführung dieser Werthe in (28) ergiebt:

$$\begin{aligned} \xi' &= (X_x^0)p_1^0\xi' + (X_y^0)p_2^0\eta' + (X_z^0)p_3^0\zeta', \\ \eta' &= (Y_x^0)p_1^0\xi' + (Y_y^0)p_2^0\eta' + (Y_z^0)p_3^0\zeta', \\ \zeta' &= (Z_x^0)p_1^0\xi' + (Z_y^0)p_2^0\eta' + (Z_z^0)p_3^0\zeta', \end{aligned}$$

und daraus folgt, da dies System für alle ξ', η', ζ' gelten soll, dass bei Einführung eines mit dem System der Hauptdruckaxen zusammenfallenden Coordinatensystemes:

$$p_1^0 = \frac{1}{(X_x^0)}, \qquad p_2^0 = \frac{1}{(Y_y^0)}, \qquad p_3^0 = \frac{1}{(Z_z^0)}, \tag{31''}$$

aber

$$(Y_z^0) = (Z_x^0) = (X_y^0) = 0 \quad \text{ist.} \tag{31'''}$$

Fallen die Coordinatenaxen in die Hauptdruckaxen, so verschwinden die gegen die Coordinatenebenen wirkenden tangentialen Druckcomponenten und bleiben nur die normalen übrig.

Auf die Hauptdruckaxen bezogen werden daher die Gleichungen der beiden Hauptdruckellipsoide:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \qquad \frac{\xi'^2}{(X_x^0)^2} + \frac{\eta'^2}{(Y_y^0)^2} + \frac{\zeta'^2}{(Z_z^0)^2} = 1, \\ &\text{II.} \qquad \frac{\xi'^2}{(X_x^0)} + \frac{\eta'^2}{(Y_y^0)} + \frac{\zeta'^2}{(Z_z^0)} = \pm R; \end{aligned} \qquad (32)$$

die Axen des zweiten sind also den Quadratwurzeln aus denen des ersten proportional.

Man erkennt, dass das sogenannte zweite Druckellipsoid zu einem Hyperboloid wird, wenn eine der Grössen X_x^0, Y_y^0, Z_z^0 negativ ist. Damit auch in diesem Falle der Punkt p rings von der bezüglichen Fläche umhüllt werde, ist erforderlich, dass man die beiden Vorzeichen von R benutzt, also die Druckfläche aus dem ein- und zweischaaligen Hyperboloid zusammensetzt.

Das zweite Druckellipsoid gewinnt seine eigentliche Wichtigkeit erst bei Beantwortung der Frage nach der Lage der resultirenden Druckkraft, welche gegen ein gegebenes Flächenelement wirkt.

Denkt man die Hauptdruckaxen zu Coordinatenaxen gewählt, so gelten zwischen den Richtungscosinus α, β, γ der Normalen auf dem Flächenelement und den Richtungscosinus α', β', γ' der Druckkraft nach (28) und (31''') die Beziehungen:

$$\alpha'(P_n) = \alpha(X_x^0), \qquad \beta'(P_n) = \beta(Y_y^0), \qquad \gamma'(P_n) = \gamma(Z_z^0), \qquad (33)$$

aus denen folgt:

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \alpha(X_x^0) : \beta(Y_y^0) : \gamma(Z_z^0). \qquad (33')$$

Diese Formeln haben dieselbe Gestalt wie (12''), und man kann also, das aus jenen gezogene Resultat den hier vorliegenden Umständen anpassend, folgende Regel aussprechen, welche die p. 288 gegebene Figur 34 erläutert.

Um die Richtung und die Grösse des Druckes zu finden, welcher in einem gegebenen Medium an der Stelle p gegen ein gegebenes Flächenelement wirkt, construire man die der betreffenden Stelle entsprechenden beiden Druckellipsoide, lege an das zweite eine Tangentenebene parallel dem gegebenen Flächenelement und ziehe durch die Berührungsstelle q einen Radiusvector von p bis zu dem ersten Druckellipsoid; die hierdurch abgegrenzte Strecke $\overline{pq_1}$ repräsentirt nach Richtung und Grösse die gesuchte Druckkraft.

Diese Construction ergiebt unmittelbar, dass im Allgemeinen nur gegen Flächenelemente, welche normal zu den Hauptdruckaxen stehen, die Drucke senkrecht wirken.

Ueber den Sinn, in welchem man hierbei die Druckkraft rechnen muss, entscheidet am einfachsten die Anwendung auf die speciellen Fälle, dass die Normale in eine Hauptdruckaxe fällt. Ist z. B. $X_x^0 < 0$, so wirkt, wenn die Normale in die $+X$-Richtung fällt, die Druckkraft parallel der $-X$-Axe und das Flächenelement erleidet eine Zugkraft; ist $X_x^0 > 0$, so wirkt im gleichen Fall die Druckkraft parallel der $+X$-Axe und das Flächenelement erleidet eine Druckkraft.

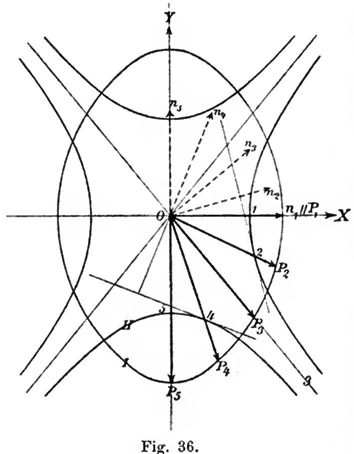


Fig. 36.

Die Anwendung dieser Regel wollen wir an der Betrachtung des Schnittes beider Druckflächen mit der XY-Ebene zeigen für den Fall, dass $X_x^0 > 0$, $Y_y^0 < 0$ ist, also die Schnittcurve des zweiten sogenannten Druckellipsoides zwei Hyperbeln giebt (Figur 36).

Wir gehen von der Lage der Normale in der $+X$-Axe aus, welcher eine der Normalen n_1 parallele Kraft P_1 entspricht; der zugehörige Schnittpunkt ist in der Figur mit (1) bezeichnet. Drehen wir die Normale in positiver Richtung, so wandert der Berührungspunkt der zu ihr senkrechten Tangentenebene und mit ihr die Richtung der Kraft in entgegengesetzter Richtung; P_2 und n_2 entsprechen dem Berührungspunkt (2). Wird das Flächenelement der Asymptote parallel, so rückt der Schnittpunkt (3) in's Unendliche; ihm entspricht P_3 und n_3. Bei weiterer Drehung gelangt man zu dem Punkte (4), zu welchem P_4 und n_4 gehört. Liegt endlich die Normale n_5 in der $+Y$-Richtung, so fällt der Schnittpunkt (5) in die $-Y$-Axe und ihr parallel wird die Kraft P_5 in Uebereinstimmung mit der Annahme, dass $Y_y^0 < 0$ sein soll.

Eine besondere Behandlung verlangen die speciellen Fälle, dass eine oder zwei der Hauptdruckkräfte verschwinden.

Sei zunächst nur $Z_z^0 = 0$, so folgt aus $\xi' = \alpha'(P_n)$, $\eta' = \beta'(P_n)$, $\zeta' = \gamma'(P_n)$ und aus den Gleichungen (33):

$$\alpha'(P_n) = \alpha(X_x^0), \qquad \beta'(P_n) = \beta(Y_y^0), \qquad \gamma'(P_n) = \gamma(Z_z^0),$$

dass ζ' und γ' gleich Null, aber

$$\frac{\zeta'}{(Z_z^0)} = \gamma$$

von Null verschieden ist.

Demgemäss lauten die Gleichungen der beiden Druckellipsoide:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \qquad \frac{\xi^2}{(X_x^0)^2} + \frac{\eta^2}{(Y_y^0)^2} = 1 - \gamma^2, \\ &\text{II.} \qquad \frac{\xi^2}{(X_x^0)} + \frac{\eta^2}{(Y_y^0)} = \pm R. \end{aligned} \tag{34}$$

Das erste Druckellipsoid wird also zu einer elliptischen Scheibe in der XY-Ebene, deren Centrum dem Werthe $\gamma = 1$, deren Peripherie dem Werthe $\gamma = 0$ entspricht, während der äussern ähnliche Ellipsen mit kleineren Axen für andere Werthe gelten. Das zweite Druckellipsoid verwandelt sich je nach dem Vorzeichen von X_x^0 und Y_y^0 in eine Ellipse oder Hyperbel in der XY-Ebene von willkürlichen absoluten Dimensionen. Diese Hülfscurve ist dann folgendermaassen zu benutzen, um die Richtung und Grösse des gegen ein gegebenes Flächenelement wirkenden Druckes zu finden.

Man legt parallel der Schnittgeraden des Flächenelementes mit der XY-Ebene eine Tangente an jene Curve (II) und zieht vom Centrum durch den Berührungspunkt einen Radiusvector bis zu derjenigen Ellipse (I), welche durch das dem gegebenen Flächenelement entsprechende γ bestimmt ist. Die so erhaltene Strecke repräsentirt nach Grösse und Richtung die gesuchte Druckkraft.

Hieraus folgt, dass, wenn eine Hauptdruckkraft verschwindet, für jede Lage des Flächenelementes der Druck in der Ebene der beiden übrigen liegt, sowie ferner, dass für alle Flächenelemente, welche jene Ebene in derselben Geraden schneiden, die Drucke gleiche Richtung, aber um so grössere Stärke besitzen, je mehr ihre Normale gegen die Richtung des verschwindenden Hauptdruckes geneigt ist.

Verschwinden zwei Hauptdrucke, z. B. X_x^0 und Y_y^0, so muss ξ', η' und α', β' gleich Null, also $\gamma' = 1$, aber

$$\frac{\xi'}{(X_x^0)} = \alpha, \qquad \frac{\eta'}{(Y_y^0)} = \beta$$

von Null verschieden sein.

Die Gleichungen der beiden Druckellipsoide werden also:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \qquad \frac{\zeta'^2}{(Z_z^0)^2} = 1 - \alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2, \\ &\text{II.} \qquad \frac{\zeta'^2}{(Z_z^0)} = \pm R. \end{aligned} \tag{34'}$$

Die erste Gleichung giebt ein System von Strecken parallel der Z^0-Axe und schreibt sich, da ζ' hier wegen $\gamma' = 1$ mit (P_n) identisch ist:

$$(P_n) = \pm (Z_z^0)\gamma.$$

Hieraus folgt, dass, wenn zwei Hauptdrucke verschwinden, der gegen ein beliebig gelegenes Flächenelement wirkende Druck stets in die Richtung des nicht verschwindenden Hauptdruckes fällt und mit dem Cosinus des Winkels, den dessen Richtung mit der Richtung der Normale zum Flächenelement einschliesst, proportional ist. —

Sollen aus den Werthen der Druckcomponenten X_x', Y_y', ... für ein Coordinatensystem X', Y', Z' die entsprechenden X_x, Y_y, ... für ein anderes X, Y, Z berechnet werden, so hat man folgendermassen zu verfahren.

Ist

$$\begin{aligned} x' &= x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3, & x &= x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1, \\ y' &= x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3, & y &= x'\alpha_2 + y'\beta_2 + z'\gamma_2, \\ z' &= x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3, & z &= x'\alpha_3 + y'\beta_3 + z'\gamma_3, \end{aligned} \tag{35}$$

so ist auch:

$$\begin{aligned} X &= X'\alpha_1 + Y'\beta_1 + Z'\gamma_1, \\ Y &= X'\alpha_2 + Y'\beta_2 + Z'\gamma_2, \\ Z &= X'\alpha_3 + Y'\beta_3 + Z'\gamma_3. \end{aligned} \tag{35'}$$

Wir haben also, wenn wir mit $(X')_x$, $(Y')_x$, ... die Componenten bezeichnen, die parallel den Axen X', Y', Z' aber auf Flächenelemente normal zu X, Y, Z wirken, zunächst:

$$X_x = (X')_x\alpha_1 + (Y')_x\beta_1 + (Z')_x\gamma_1$$

u. s. f., und hieraus unter Rücksicht auf (24):

$$\begin{aligned} X_x = &\big(X_x'\cos(x, x') + X_y'\cos(x, y') + X_z'\cos(x, z')\big)\,\alpha_1 \\ &+ \big(Y_x'\cos(y, x') + Y_y'\cos(y, y') + Y_z'\cos(y, z')\big)\,\beta_1 \\ &+ \big(Z_x'\cos(z, x') + Z_y'\cos(z, y') + Z_z'\cos(z, z')\big)\,\gamma_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach (35) auch:

$$\begin{aligned} X_x = &(X_x'\alpha_1 + X_y'\beta_1 + X_z'\gamma_1)\,\alpha_1 \\ &+ (Y_x'\alpha_1 + Y_y'\beta_1 + Y_z'\gamma_1)\,\beta_1 \\ &+ (Z_x'\alpha_1 + Z_y'\beta_1 + Z_z'\gamma_1)\,\gamma_1. \end{aligned}$$

Führt man diese Rechnung bei allen Componenten durch, so gelangt man zu folgendem System:

$$\begin{aligned} X_x &= \alpha_1^2 X_x' + \beta_1^2 Y_y' + \gamma_1^2 Z_z' + 2\beta_1\gamma_1 Y_z' + 2\gamma_1\alpha_1 Z_x' + 2\alpha_1\beta_1 X_y', \\ Y_y &= \alpha_2^2 X_x' + \beta_2^2 Y_y' + \gamma_2^2 Z_z' + 2\beta_2\gamma_2 Y_z' + 2\gamma_2\alpha_2 Z_x' + 2\alpha_2\beta_2 X_y', \\ Z_z &= \alpha_3^2 X_x' + \beta_3^2 Y_y' + \gamma_3^2 Z_z' + 2\beta_3\gamma_3 Y_z' + 2\gamma_3\alpha_3 Z_x' + 2\alpha_3\beta_3 X_y', \end{aligned} \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
Y_z &= \alpha_2\alpha_3 X_x' + \beta_2\beta_3 Y_y' + \gamma_2\gamma_3 Z_z' \\
&\quad + (\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) Y_z' + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) Z_x' + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) X_y', \\
Z_x &= \alpha_3\alpha_1 X_x' + \beta_3\beta_1 Y_y' + \gamma_3\gamma_1 Z_z' \\
&\quad + (\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1) Y_z' + (\gamma_3\alpha_1 + \alpha_3\gamma_1) Z_x' + (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) X_y', \\
X_y &= \alpha_1\alpha_2 X_x' + \beta_1\beta_2 Y_y' + \gamma_1\gamma_2 Z_z' \\
&\quad + (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) Y_z' + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) Z_x' + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) X_y'.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Dies System zeigt eine grosse Aehnlichkeit mit dem für die Deformationen geltenden (17) und lässt sich wie jenes umkehren.

Man gelangt dadurch zu dem neuen System:

$$X_x' = \alpha_1^2 X_x + \alpha_2^2 Y_y + \alpha_3^2 Z_z + 2\alpha_2\alpha_3 Y_z + 2\alpha_3\alpha_1 Z_x + 2\alpha_1\alpha_2 X_y, \tag{36'}$$

u. s. f.

§ 28. Mechanik idealer Flüssigkeiten; Gestalt und Druck einer ruhenden Flüssigkeit.

I. Die Erscheinungen des Gleichgewichts und der Bewegung von nichtstarren Körpern zerfallen hinsichtlich der Anwendung, welche die in den beiden letzten Abschnitten abgeleiteten allgemeinen Resultate auf sie finden, in mehrere Gruppen je nach den Annahmen über den Zusammenhang zwischen den Druckkräften und den Deformationen, welche ihre Erklärung nöthig macht.

Diese Annahmen sind am einfachsten in den Gebieten, welche man als die gewöhnliche Hydrostatik und Hydrodynamik bezeichnet. Zu diesen rechnet man die Phänomene des Gleichgewichts und der Bewegung von solchen tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeiten, welche zwar einer Volumen-, nicht aber einer Gestaltänderung einen von der Trägheit unabhängigen Widerstand entgegensetzen. Da die in der Natur vorhandenen Flüssigkeiten ein solches Verhalten nicht in aller Strenge zeigen, kann man diejenigen, mit welchen sich die gewöhnliche Hydrodynamik beschäftigt, auch ideale Flüssigkeiten nennen.

Um diese Eigenschaften zur Bestimmung der Druckkräfte zu verwerthen, betrachten wir ein unendlich niedriges cylindrisches Volumenelement innerhalb der Flüssigkeit und überlegen, dass, wenn auf dessen Grundflächen tangentiale Drucke wirken, diese nach (23) beiderseitig gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, also die ihnen anliegenden Flüssigkeitstheile an einander hin zu schieben bestrebt sind, ohne ihr Volumen zu ändern. Findet nun eine solche Bewegung keinen Widerstand in der Flüssigkeit, so erleiden die Theilchen, auf welche die Kräfte wirken, wegen ihrer unendlich kleinen Masse unendliche Beschleunigungen. Da wir solche aber als in der Natur unmöglich betrachten, so gelangen wir zu dem Satz:

Innerhalb einer Flüssigkeit, welche einer Verschiebung ihrer Theile, die ohne Volumenänderung vor sich geht, keinen Widerstand entgegensetzt, müssen die tangentialen Druckkräfte z. B. Y_z, Z_x, X_y, Y_z', Z_x', X_y' verschwinden.

Verbinden wir diesen Satz mit den Formeln (36), so folgt aus ihnen, dass die normalen Drucke in einem jeden Punkt von der Lage des Flächenelementes unabhängig sind, gegen welches sie wirken, z. B. $X_x = Y_y = Z_z = X_x' = Y_y' = Z_z'$ ist. Der Normaldruck gegen die Flächeneinheit, den wir weiter kurz mit p bezeichnen, ist hier also nur eine Function des Ortes, nicht der Lage der Fläche.

Nach diesen Resultaten reduciren sich die allgemeinen Bewegungsgleichungen (25), in denen wir passend die Geschwindigkeitscomponenten

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

einführen, auf:

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = \varepsilon X - \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \varepsilon \frac{dv}{dt} = \varepsilon Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \varepsilon \frac{dw}{dt} = \varepsilon Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{37}$$

Da in ihnen fünf Unbekannte, nämlich u, v, w, ε und p, vorhanden sind, so genügen sie noch nicht zu deren Bestimmung.

Indess besteht eine ganz allgemeine Beziehung zwischen der Dichte ε und den Geschwindigkeiten u, v, w. Wie auch immer ein räumliches Element k bei seiner Bewegung deformirt werde, stets muss seine ganze Masse $m = \varepsilon k$ unverändert bleiben, also:

$$d(\varepsilon k) = \varepsilon\, dk + k\, d\varepsilon = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dk}{k} + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = 0$$

sein, falls das Zeichen d die in der Zeit dt stattfindende Aenderung bezeichnet. Nun ist aber nach (15):

$$\frac{dk}{k} = \vartheta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial dx}{\partial x} + \frac{\partial dy}{\partial y} + \frac{\partial dz}{\partial z},$$

wir erhalten also, wenn wir die Geschwindigkeiten u, v, w einführen, die Beziehung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \tag{38}$$

und damit den gesuchten Zusammenhang zwischen u, v, w und ε. Die gefundene Formel trägt den Namen der Continuitätsgleichung.

Die letzte noch fehlende Beziehung wird je nach den Umständen verschiedene Gestalt annehmen.

Aendert sich die Dichte der Flüssigkeit bei den betrachteten Bewegungen nicht merklich, so ist

$$\varepsilon = \text{Const.} \tag{38'}$$

zu setzen; ändert sie sich nur in Folge der mit dem Ort in gegebener Weise wechselnden Temperatur oder chemischen Zusammensetzung, so wird

$$\varepsilon = f(x, y, z) \tag{38''}$$

sein; ist sie endlich als Function des Druckes p allein gegeben und variirt also mit dem Ort nur in so weit, als anderen Orten anderer Druck entspricht, so ist

$$\varepsilon = F(p). \tag{38'''}$$

Ausser diesen einfachsten Fällen und ihren Combinationen sind noch complicirtere möglich, wie z. B. der, dass die Strömung selbst auf das Gesetz der Temperatur und dadurch auf die Dichtigkeit Einfluss hat. Wir wollen dergleichen weiterhin ausschliessen.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten betrachtet man für viele Anwendungen die Dichte als constant, für andere stellt man ihre Abhängigkeit vom Druck p und der Temperatur τ durch Interpolationsformeln dar, am einfachsten durch lineäre, z. B. durch

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \beta\tau)(1 + \gamma p) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1 - \beta\tau + \gamma p), \tag{39}$$

in welchen ε_0 die Dichte bei dem Druck und der Temperatur bezeichnet, von welchen aus p und τ gerechnet werden, und β und γ Constante sind.

Bei gasförmigen Flüssigkeiten ist für die meisten Anwendungen die entsprechende Abhängigkeit in genügender Schärfe durch das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac dargestellt, welches lautet:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{p}{p_0} \frac{1 + \alpha\tau}{1 + \alpha\tau_0}; \tag{39'}$$

hierin ist ε_0 die dem speciellen Druck p_0 und der speciellen Temperatur τ_0 entsprechende Dichte.

Das Gesetz, dem die Temperatur innerhalb der Flüssigkeit folgt, bestimmt sich im Zustand der Ruhe ziemlich einfach nach den Grundsätzen der Wärmetheorie durch die äussern Umstände, denen die Flüssigkeit unterworfen ist.

Für den Fall der Bewegung compliciren sich besonders bei den Gasen die Verhältnisse in Folge einer Eigenthümlichkeit, deren hier, gewisser Anwendungen wegen, Erwähnung gethan werden muss. Während bei tropfbaren Flüssigkeiten die Temperatur sich im Wesentlichen ausschliesslich durch die Wärmeleitung bestimmt, ist dieselbe bei Gasen auch von dem Druck abhängig, in der Weise, dass bei gesteigertem Druck auch die Temperatur steigt. Während also eine tropfbare Flüssigkeit, die ursprünglich gleiche Temperatur besass und überall mit gleich warmen Körpern in Berührung ist, bei der Bewegung ihre Temperatur und daher ihre Dichte ungeändert beibehält,

treten bei einem Gase unter denselben Umständen, da eine Bewegung ohne Druckänderung unmöglich ist, Temperaturdifferenzen auf, die sich in sehr complicirter Weise durch Leitung und Strahlung ausgleichen und auf die Dichte sehr merklich einwirken. In Folge dessen müssen wir weiterhin auf eine strenge Behandlung der Bewegungserscheinungen der Gase verzichten und beschränken uns in einigen einfachen Beispielen auf die folgenden zwei extreme Fälle; erstens: die Wärmeleitung ist so vollständig, dass die Temperatur als stets und überall gleich angesehen werden kann, dann gilt nach (39'):

$$\varepsilon = Cp, \tag{39''}$$

worin C eine Constante ist; zweitens: die Wärmeleitung ist so gering, dass von ihr vollständig abgesehen werden kann; dann gilt nach Betrachtungen der mechanischen Wärmetheorie, dass $1 + \alpha\tau$ mit einer Potenz von p proportional ist, sodass man aus (39') folgern kann:

$$\varepsilon^{\varkappa} = C'p, \tag{39'''}$$

worin $\varkappa$ und C' Constante sind. $\varkappa$ hat für Luft nahe den Werth $\sqrt{2} = 1{,}41$. —

Die vorstehenden fünf Gleichungen, nämlich die vier in (37), (38) und die fünfte von (38') bis (39''') in verschiedener Weise gegebene, bestimmen das Verhalten der Flüssigkeit in jedem Punkte; sie stellen die Hauptgleichungen für die Mechanik idealer Flüssigkeiten dar. Zu ihnen kommen die Bedingungen, welche für die Begrenzungsflächen aus den allgemeinen Betrachtungen p. 292 und p. 302 folgen.

Die Flüssigkeit kann von einer andern Flüssigkeit oder, was der für uns wichtigere Fall ist, von einem starren Körper begrenzt werden; in jedem Fall müssen nach (18'') die Geschwindigkeitscomponenten normal zur Grenze für die beiderseitig einem Element der Oberfläche anliegenden Massen gleich sein; es muss also, falls $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$, $\bar{w}_k$ die Componenten parallel den Coordinatenaxen sind, gelten:

$$(\bar{u} - \bar{u}_k)\cos(n,x) + (\bar{v} - \bar{v}_k)\cos(n,y) + (\bar{w} - \bar{w}_k)\cos(n,z) = 0. \tag{40}$$

Zugleich müssen nach (27) die von beiden Seiten gegen die Grenze wirkenden Drucke gleich und entgegengesetzt gerichtet sein, es muss also gelten:

$$\bar{p} = \bar{p}_k. \tag{40'}$$

Wird die Grenze durch einen starren Körper gebildet, der jedem beliebigen Druck die gleiche Reaction entgegensetzt, so giebt die letzte Formel keine Bedingung für p, sondern nur die Bestimmung der Wirkung, welche der Körper seitens der Flüssigkeit erfährt. Ist die Flüssigkeit tropfbar und durch ein Gas begrenzt, innerhalb dessen man unter gewissen Voraussetzungen den Druck als constant, bei

unendlicher Verdünnung gleich Null, ansehen kann, besitzt sie, wie man in einem weitern Sinne sagt, eine freie Oberfläche, so gewinnt die zweite Gleichung die Form:

$$\overline{p} = \text{Const.} \tag{40''}$$

Ist die Oberfläche von unveränderlicher Gestalt und Lage, also $\overline{u_k} = \overline{v_k} = \overline{w_k} = 0$, so tritt an Stelle von (40) die Bedingung:

$$\overline{u} \cos(n, x) + \overline{v} \cos(n, y) + \overline{w} \cos(n, z) = 0\,. \text{ —} \tag{40'''}$$

II. Wir wenden uns nun von diesen allgemeinen Betrachtungen zu dem speciellen Problem des Gleichgewichts einer Flüssigkeit, d. h. zur Entwickelung der Bedingungen, unter welchen eine Kräften unterworfene Flüssigkeit überhaupt ruhen kann, und zur Untersuchung der characteristischen Eigenschaften der möglichen Gleichgewichtszustände.

Für den Fall der Ruhe ist u, v, w gleich Null, ε und p von der Zeit unabhängig, demzufolge nehmen die Hauptgleichungen (37) die Form an:

$$\varepsilon X = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \varepsilon Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \varepsilon Z = \frac{\partial p}{\partial z}; \tag{41}$$

Gleichung (38) wird durch eine von der Zeit unabhängige Dichtigkeit identisch erfüllt; es kommen also nur noch die Beziehungen (38′) bis (38″) in Betracht.

Von den Oberflächenbedingungen sind die auf die Geschwindigkeiten bezüglichen im Falle der Ruhe identisch erfüllt; die für den Druck aufgestellten bleiben in Gültigkeit.

Man bemerkt, dass je nach der Eigenschaft von ε die Kräfte X, Y, Z verschiedenen Bedingungen genügen müssen, damit die Gleichungen (41) erfüllt werden, Gleichgewicht also möglich ist.

Ist ε constant oder eine Function des Druckes p allein, so kann man setzen

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d\Pi}{dp},$$

wo auch Π nur von p abhängt, und die Gleichung (41) schreiben:

$$X = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Hier müssen die Componenten die Form von partiellen Differentialquotienten derselben Function nach den Coordinaten haben, und man kann den Satz aussprechen:

Eine Flüssigkeit, deren Dichte eine Function des Druckes allein oder aber constant ist, kann nur unter der Wirkung von Kräften im Gleichgewicht verharren, welche Potentiale besitzen.

Die Bedingungen für die Existenz eines Potentiales zu gegebenen Componenten X, Y, Z erhält man nach Formel (81′) des ersten Theiles durch Elimination von Π in der Gestalt:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{41'}$$

Ist hingegen die Dichte ε eine Function nur der Coordinaten, so müssen die Producte εX, εY, εZ die Form von Differentialquotienten einer Function nach den Coordinaten haben; die Bedingungen hierfür sind entsprechend durch Elimination von p zu erhalten und lauten:

$$\frac{\partial \varepsilon Y}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varepsilon Z}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon X}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \varepsilon X}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon Y}{\partial x}.$$

Hieraus kann man eine Bedingung ableiten, welcher die Kräfte allein für jedes beliebige Gesetz $\varepsilon = f(x, y, z)$ genügen müssen, indem man ε eliminirt. Fasst man nämlich vorstehende Gleichungen in der ausführlichen Form

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial z} + Y \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial y} + Z \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial X}{\partial z} + X \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial X}{\partial y} + X \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial x} + Y \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{aligned} \tag{41''}$$

mit den Factoren X, Y, Z zusammen und bedenkt, dass ε nicht stets Null sein kann, so erhält man:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0. \tag{41'''}$$

Eine Flüssigkeit, deren Dichte eine Function der Coordinaten allein ist, kann im Gleichgewicht nur unter der Wirkung von Kräften verharren, welche dieser Bedingung genügen. Die Dichtigkeit und die Kräfte zusammen haben überdies noch zwei der Gleichungen (41″) zu erfüllen.

Haben die Kräfte ein Potential Φ, das natürlich ebenso wie die Kräfte K, X, Y, Z in diesem Theil auf die Masseneinheit bezogen, also in anderem Sinne als früher zu verstehen ist, so ist die letzte Bedingung identisch erfüllt und die Gleichungen (41″) reduciren sich auf:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

oder

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = F \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = F \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = F \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

worin F eine Function von x, y, z bezeichnet.

Diese Bedingungen verlangen, dass F die Coordinaten x, y, z nur

in der Verbindung Φ enthalte und dasselbe gilt für ε. Daher folgt der Satz:

Wirken auf eine Flüssigkeit, deren Dichte eine Function der Coordinaten ist, Kräfte, welche ein Potential haben, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn in Flächen constanten Potentiales auch die Dichte constant ist.

Hieraus folgt unter Anderem, dass die Grenzen von Flüssigkeiten, welche verschiedene Dichte besitzen, unter diesen Umständen stets Potentialflächen sein müssen. —

Sind die Verhältnisse der Kräfte und das Gesetz der Dichtigkeit derartig gegeben, dass Gleichgewicht stattfinden kann, so bietet sich die doppelte Aufgabe, das Gesetz, welchem der Druck im Innern folgt, abzuleiten und die Gestalt der freien Oberfläche — wenn eine solche möglich ist — zu finden.

Die erste Aufgabe erfordert die Bestimmung von p aus den Gleichungen (41); diese sind hierzu mit den Factoren dx, dy, dz zusammenzufassen und geben so die nach dem Vorstehenden, wenn überhaupt Gleichgewicht möglich ist, jederzeit entweder direct oder nach Division mit ε integrable Gleichung:

$$\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dp, \tag{42}$$

Hierin bezeichnet dp die Aenderung des Druckes längs desjenigen Linienelementes ds, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz sind; dasselbe tritt auch auf der linken Seite der Gleichung auf, wenn man dort die Componente P der Kraft parallel ds einführt und schreibt:

$$\varepsilon P\,ds = dp. \tag{42'}$$

Denkt man sich ein cylindrisches Volumenelement vom Querschnitt q mit der Axe in ds gelegt, so sagt die Gleichung $\varepsilon Pq\,ds = q\,dp$ aus, dass der Druck auf die erste Grundfläche um so viel kleiner ist wie der auf die zweite, als die auf das Volumenelement $q\,ds$ parallel der Axe ausgeübte Kraft $\varepsilon Pq\,ds$ beträgt.

Integriren wir die Formel (42') über ein beliebiges innerhalb der Flüssigkeit von einer Stelle (0) bis zu einer Stelle (1) verlaufendes Curvenstück, so erhalten wir:

$$p_0 + \int_{(0)}^{(1)} \varepsilon P\,ds = p_1. \tag{42''}$$

Diese Gleichung wird bei manchen Problemen der Hydrostatik mit Vortheil statt der Hauptgleichungen (41) als Ausgangspunkt benutzt und führt dann wegen ihrer bekanntesten Anwendung den Namen des Principes der communicirenden Röhren.

Der Druck an der ganz beliebigen Stelle (1) erscheint in ihr zusammengesetzt aus dem Druck in (0) und dem hiervon durchaus unabhängigen Zuwachs, welcher die Folge der äussern Kraft ist. In diesem Sinne hat man den bekannten Satz zu verstehen, dass der Druck sich in einer ruhenden Flüssigkeit von jeder Stelle aus nach allen Seiten hin mit gleicher Stärke fortpflanzt.

Fehlen äussere Kräfte, so ist der Druck überall der gleiche. Dasselbe gilt angenähert, wenn die Dichte der betrachteten Flüssigkeit sehr gering und darum $\int \varepsilon P ds$ neben dem Gesammtdruck zu vernachlässigen ist; z. B. bei einem Gasquantum, welches an der Oberfläche der Erde der Schwere unterworfen ist. Hierauf beruht, dass man Körper auch von beträchtlicher Ausdehnung, die sich in der Erdatmosphäre befinden, in vielen Fällen als an allen Stellen dem gleichen Druck unterworfen ansehen kann.

Verläuft die Curve s zwischen zwei Stellen, an welchen der gleiche Druck herrscht, z. B. von der freien Oberfläche zur freien Oberfläche, oder aber von einem innern Punkt zu demselben zurück, so wird aus der Gleichung (42″) specieller:

$$\int_{(0)}^{(1)} \varepsilon P ds = 0. \quad \text{—} \qquad (42''')$$

Im Falle die Kräfte ein Potential Φ haben, ist nach dem Früheren jederzeit durch Integration aus (42′) ein Resultat von der Form abzuleiten

$$p = F(\Phi, c); \qquad (43)$$

darin bezeichnet c die Integrationsconstante, welche sich bestimmt, wenn der Druck an irgend einer Stelle gegeben ist. Hieraus folgt der Satz:

Haben die wirkenden Kräfte ein Potential, so sind die Flächen constanten Druckes Potentialflächen, stehen also überall normal zu der Richtung der resultirenden Kraft.

Dies gilt insbesondere auch für die Oberfläche, welche eine tropfbare Flüssigkeit nach einem Gase oder nach dem leeren Raume hin begrenzt und welche man, wie gesagt, kurz ihre freie Oberfläche nennt; denn dort ist nach dem Früheren der Druck constant, z. B. gleich Null gegeben. Da die Flächen constanten Potentiales freie Oberflächen einer Flüssigkeitsmenge sein können, führen sie auch den Namen Niveauflächen. Besitzt die Flüssigkeit mehrere getrennte freie Oberflächenstücke, auf denen verschiedene Drucke lasten, so sind dieselben auch Theile verschiedener Niveauflächen, deren Lagen durch die Werthe der in ihnen stattfindenden Drucke sich bestimmen.

Ist die Dichte als Function nur der Coordinaten gegeben, so nimmt die Gleichung (43) die specielle Form an

$$p = c - \int \varepsilon \, d\Phi, \tag{43'}$$

ist sie nur eine Function des Druckes, die andere

$$\int \frac{dp}{\varepsilon} = c - \Phi. \tag{43''}$$

III. Wir gehen nun zu Anwendungen der entwickelten allgemeinen Resultate über.

1. Es sei eine Flüssigkeit mit nur von den Coordinaten, nicht aber vom Drucke abhängiger Dichte ε unter der Wirkung der Schwere gegeben.

Das Potential der Schwere ist, falls die Z-Axe vertical nach oben positiv gerechnet wird,

$$\Phi = + gz;$$

es ist also Gleichgewicht nur möglich, wenn die Dichte in horizontalen Ebenen constant, also eine Function von z allein ist. Dabei ist indessen nicht erforderlich, dass sie eine eindeutige Function von z ist; besteht nämlich die freie Oberfläche der Flüssigkeit aus mehreren getrennten Stücken, so sind in den ihnen benachbarten Räumen Flüssigkeiten verschiedener Dichtigkeit möglich, wie z. B. in den sogenannten communicirenden U-förmigen Röhren.

Will man diesen Fall mit Hülfe der Gleichung (43'), welche hier lautet

$$p = c - g \int \varepsilon \, dz, \tag{44}$$

erledigen, so hat man den Raum der Flüssigkeit in Stücke zu zerlegen, in deren jedem die Dichte eine eindeutige Function von z ist, am besten durch Potentialflächen, und diese gesondert zu behandeln.

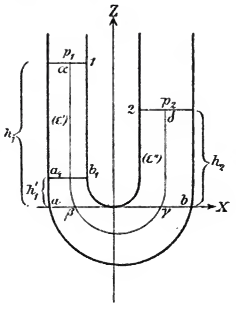


Fig. 37.

In Figur 37 ist die horizontale Fläche durch ab, die wir als XY-Ebene wählen, eine solche Grenze, und wir können demnach für die über ab liegenden Räume die zwei Formeln aufstellen:

$$p' = c' - g \int \varepsilon' dz, \qquad p'' = c'' - g \int \varepsilon'' dz.$$

Wendet man sie auf die freien Oberflächen an, wo der Druck resp. p_1, p_2 sein möge, und auf die Fläche ab, wo er p_0 heisse, so ergiebt sich

$$p_1 - p_0 = -g\int_0^{h_1} \varepsilon' dz, \qquad p_2 - p_0 = -g\int_0^{h_2} \varepsilon'' dz,$$

woraus durch Elimination von p_0 folgt:

$$p_2 - p_1 = g\left(\int_0^{h_1} \varepsilon' dz - \int_0^{h_2} \varepsilon'' dz\right). \tag{44'}$$

Dasselbe Resultat findet man noch kürzer durch das in Gleichung (42″) ausgesprochene Princip der communicirenden Röhren, da bei demselben über das Verhalten von ε gar nichts vorausgesetzt ist. Die Gleichung giebt in unserem Falle, da P die Componente der Schwere nach s gleich $-g\,(dz/ds)$ ist,

$$p_2 - p_1 = -g\int_{(1)}^{(2)} \varepsilon \frac{dz}{ds} ds;$$

der Integrationsweg ist eine beliebig von der freien Oberfläche (1) zu (2) innerhalb der Flüssigkeit verlaufende Curve, z. B. $\alpha\beta\gamma\delta$. Diese zerlegen wir in die drei Theile $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, von denen der mittlere keinen Beitrag zum Resultat giebt, da die zwischen denselben Horizontalebenen liegenden Curvenelemente sich in ihrer Wirkung aufheben; die andern Theile aber liefern das vorige Resultat:

$$p_2 - p_1 = -g\left(\int_{h_1}^{0} \varepsilon' dz + \int_0^{h_2} \varepsilon'' dz\right).$$

Ist die Dichte constant, so giebt diese Formel:

$$p_2 - p_1 = \varepsilon g\,(h_1 - h_2); \tag{44''}$$

die Höhendifferenz $h_1 - h_2 = h$ misst also die Druckdifferenz $p_2 - p_1$.

Bei dem Barometer ist der Druck auf die eine Flüssigkeitsoberfläche verschwindend, ($p_1 = 0$), also:

$$p_2 = \varepsilon g h,$$

bei dem offenen Manometer gleich dem in der freien Luft herrschendenden p_a, also:

$$p_2 = p_a + \varepsilon g h;$$

bei dem geschlossenen Manometer befindet sich über der Fläche (1) ein in ein verticales Rohr gefasstes Luftquantum, dessen Druck von dem Raume abhängt, der ihm gewährt ist. Setzt man die ganze Länge des Rohres von der XY-Ebene ab gleich H und den Druck, den das Gas ausübt, wenn es diesen Raum erfüllt, gleich p, so ist der Druck p_1, wenn die Flüssigkeit in dem Rohr bis h_1 steht,

$$p_1 = p\,\frac{H}{H - h_1},$$

denn nach (39″) sind bei gleicher Temperatur die Drucke, welche ein

Gasquantum ausübt, den eingenommenen Räumen indirect proportional; also folgt hier:

$$p_2 = p \frac{H}{H - h_1} + \varepsilon g h.$$

Die Bequemlichkeit, welche das hierdurch erklärte Verfahren besitzt, Drucke durch die Höhe von Flüssigkeitssäulen zu messen, hat zu einer zweiten technischen Druckeinheit, der „Atmosphäre“, geführt, welche von der oben erwähnten abweicht.

Da der mittlere Luftdruck im Meeresniveau durch eine Quecksilbersäule von 0° C. Temperatur und ca. 76 cm Höhe gegeben wird, so nennt man diese Grösse den Druck einer Atmosphäre. In wissenschaftlichen Druckeinheiten ergiebt sich eine Atmosphäre, da die Dichte des Quecksilbers bei 0° C. gleich 13,6 zu setzen ist,

$$p_a = 13{,}6 \,.\, 981 \,.\, 76 = 1\,014\,000\,.$$

Sind in unserem obigen Beispiel die Drucke auf die beiden freien Oberflächen gleich, so folgt aus (44′):

$$\int_0^{h_1} \varepsilon' \, dz = \int_0^{h_2} \varepsilon'' \, dz\,.$$

Sind nur zwei Flüssigkeiten von den constanten Dichten ε_1 und ε_2 in dem Gefäss und ist in der Figur 37 $a_1 b_1$ ihre Grenze, so giebt dies

$$\varepsilon_1 (h_1 - h_1') + \varepsilon_2 h_1' = \varepsilon_2 h_2,$$

oder

$$\varepsilon_1 (h_1 - h_1') = \varepsilon_2 (h_2 - h_1')\,.$$

Die Höhendifferenzen $(h_1 - h_1')$ und $(h_2 - h_1')$ sind direct messbare Grössen, und ihre Beobachtung kann nach dieser Formel dazu dienen, das Verhältniss der Dichtigkeiten $\varepsilon_1 / \varepsilon_2$ zu berechnen.

2. Wirkt auf die Flüssigkeit eine Centralkraft, die von einem ruhenden Attractionscentrum ausgeht, so sind die Flächen constanten Potentiales und daher die constanter Dichte und constanten Druckes concentrische Kugeln.

Ist die Kraft eine Anziehung nach dem Newton'schen Gesetz, so ist

$$\Phi = - \frac{fM}{r},$$

wo M die anziehende Masse, r ihre Entfernung von der betrachteten Stelle und f die Constante des Newton'schen Gesetzes bezeichnet.

Wir wollen jetzt annehmen, die Flüssigkeit sei ein Gas von nahe constanter Temperatur und folge dem Gesetz

$$\varepsilon = Cp,$$

so wird nach Gleichung (43″):

$$\frac{1}{C}\int\frac{dp}{p} = c + \frac{fM}{r},$$

also

$$\frac{1}{C}\,l\,(p) = c + \frac{fM}{r}. \tag{45}$$

Ist die anziehende Masse die Erde, deren Wirkung auf äussere Punkte nach p. 268 dieselbe ist, als wäre ihre Masse in ihrem Centrum concentrirt, und ist der Druck an ihrer Oberfläche, d. h. für $r = R$, gleich p_0 gegeben, so ergiebt sich, da $fM/R^2 = g$ ist:

$$l\left(\frac{p_0}{p}\right) = g\,C R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

also

$$p = p_0 e^{-g\,C R^2 (1/R - 1/r)}. \tag{45'}$$

Dies ist das Gesetz, nach welchem der Druck in der ruhenden Erdatmosphäre mit wachsender Entfernung r vom Erdcentrum abnehmen würde, wenn man die vorhandenen Temperaturdifferenzen ignoriren dürfte. Letzteres wird nun allerdings in der Nähe der Erde nur auf kleine Entfernungen gestattet sein, aber von einem gewissen Abstande an kann man vielleicht die Temperatur als nahe gleich der im Weltenraum stattfindenden ansehen, und wenn man unter p_0, g, R die für jene Stelle geltenden Werthe versteht, gilt die Formel auch dann.

Das Wesentlichste ihres Inhaltes ist die Eröffnung der Möglichkeit, dass der Druck mit unendlich wachsendem r nicht unter jede Grenze hin abnimmt, sondern sich einem definitiven Werthe

$$p_\infty = p_0 e^{-g\,C R} \tag{45''}$$

annähert. Dies würde aussagen, dass die Erdatmosphäre keine Grenze hätte, sondern der ganze Weltraum mit sehr verdünntem Gase erfüllt sein müsste. Die Verdünnung, wie sie durch vorstehende Formel für p gegeben wird, ist so ungeheuer, dass von dieser Seite kein Einwand gegen die gezogene Folgerung zu fürchten sein würde.

Es ist nämlich die Constante $C = \varepsilon_0/p_0$, worin ε_0, p_0 zwei bei derselben Temperatur, wie ε und p, einander entsprechende Werthe von Dichte und Druck bezeichnen; führt man die Dichte des Quecksilbers ε_q und die p_0 entsprechende Barometerhöhe h_0 ein, so schreibt sich

$$g\,C R = \frac{\varepsilon_0 R}{\varepsilon_q h_0},$$

eine Zahl, die sich zwar nicht genau berechnen lässt, da die Temperatur des Weltraumes, auf die sich ε_0 bezieht, unbekannt ist, die aber sicher 1000 weit übertrifft. Eine solche Zahl, mit negativem Zeichen im Exponenten stehend, giebt p_∞ einen so geringen Werth, dass er sich unserer Vorstellung völlig entzieht.

Ist der Weltraum mit, gleichviel wie dünnem, Gase erfüllt, so kann man aus dem Druck an der Oberfläche eines Weltkörpers Schlüsse ziehen auf denjenigen an der Oberfläche anderer. In der Formel (45) ist hierfür nur an Stelle des Potentiales fM/r des einen Centrums dasjenige aller wirkenden Centren zu setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{C}\,l(p) = c + f\sum\frac{M_h}{r_h}. \tag{46}$$

Von den Gliedern der Summe giebt nun wegen der grossen gegenseitigen Entfernung der Weltkörper für die Oberfläche des einen (M_k) von ihnen nur dasjenige einen merklichen Beitrag, welches dessen Masse als Factor enthält, und man wird daher, indem man die Formel das eine Mal auf die Oberfläche von M_h, das andere Mal auf die von M_k anwendet und die Differenz bildet, das angenäherte Resultat erhalten

$$l\left(\frac{p_h}{p_k}\right) = Cf\left(\frac{M_h}{R_h} - \frac{M_k}{R_k}\right), \tag{46'}$$

worin für f auch gR^2/M gesetzt werden kann, unter M und R Masse und Radius der Erde verstanden.

Man erhält so

$$l\left(\frac{p_h}{p_k}\right) = g\,\frac{CR^2}{M}\left(\frac{M_h}{R_h} - \frac{M_k}{R_k}\right), \tag{46''}$$

eine Formel, welche zeigt, dass schon bei ganz unbedeutenden Werthen der Differenz $M_h/R_h - M_k/R_k$ die Drucke p_h und p_k sich sehr stark von einander unterscheiden müssen, also Weltkörper mit nur etwas kleineren oder grösseren Massen als die Erde sehr viel dünnere oder dichtere Atmosphären besitzen müssen, als diese.

3. Wir wollen nun eine in einem Gefäss befindliche tropfbare Flüssigkeit betrachten, die unter der Wirkung der Schwere um eine verticale Axe derartig in Rotation versetzt ist, dass sie in allen Theilen eine constante Winkelgeschwindigkeit ω besitzt.

Beziehen wir dieselbe auf ein mit ihr rotirendes Coordinatensystem, so können wir, weil alle ihre Theile relativ zu diesem System ruhen, nach dem p. 51 Entwickelten von der absoluten Bewegung abstrahiren, wenn wir zu den gegebenen Kräften die Wirkung der Centrifugalkraft hinzufügen.

Da die Centrifugalkraft eine Abstossungskraft darstellt, welche von der Rotationsaxe hinweggerichtet ist und, auf die Masseneinheit bezogen, den Werth $\omega^2 e$ besitzt, falls e den Abstand der betrachteten Stelle von der Rotationsaxe bezeichnet, also $e^2 = x^2 + y^2$ ist, so hat sie ein Potential von der Grösse $-\omega^2 e^2/2$, und wir können die Gleichung (43') schreiben, indem wir die Z-Axe als Rotationsaxe vertical nach oben legen:

$$p = c + \int \varepsilon\, d\left(\frac{\omega^2 e^2}{2} - gz\right). \tag{47}$$

Die Dichtigkeit ε muss in den Flächen

$$\frac{\omega^2 e^2}{2} - gz = c' \tag{47'}$$

constant sein; dasselbe gilt vom Druck p.

Diese Flächen sind parallele Rotationsparaboloide mit der Z-Axe als Axe. Eine einzelne von ihnen bestimmt sich etwa durch die Coordinate des Punktes, in welchem sie die Z-Axe schneidet oder durch das Quantum der Flüssigkeit, welches zwischen ihr und dem Gefäss liegen, oder endlich durch den Druck, welcher in ihr herrschen soll.

Für den Druck gilt, falls ε constant ist, die Formel:

$$p = c + \varepsilon\left(\frac{\omega^2 e^2}{2} - gz\right). \tag{47''}$$

Die Gestalt des Gefässes, in welchem sich die rotirende Flüssigkeit befindet, kommt in dieser ganzen Betrachtung nicht vor, die Form der freien Oberfläche ist also von ihr unabhängig, und nur ihre Ausdehnung wird durch das Gefäss bestimmt, indem dieses aus dem unendlichen Rotationsparaboloid das für das specielle Problem maassgebende Stück ausschneidet.

Ist das gegebene Flüssigkeitsquantum so gross, dass es bei einer gegebenen Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr zwischen der Wandung des Gefässes und einem der theoretisch gegebenen Rotationsparaboloide Platz hat, so wird die überschüssige Flüssigkeit über den Rand geschleudert.

Sei z. B. das Gefäss ein Cylinder vom Radius R und der Höhe H und sei dasselbe im Ruhezustand bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllt, sodass die vorhandene Masse

$$M = \pi \varepsilon R^2 h$$

ist. Dieselbe Masse hat während der Rotation im Abstand e von der Axe eine Tiefe z, sodass dann

$$M = 2\pi\varepsilon \int_0^R z\, e\, de$$

ist; für z ist der Werth $(\omega^2 e^2/2 - c')/g$ zu setzen, und in Folge dessen bestimmt sich aus

$$M = \frac{\pi\varepsilon}{g}\left(\frac{\omega^2 R^4}{4} - c' R^2\right)$$

die Constante

$$c' = \frac{R^2 \omega^2}{4} - gh.$$

Hiernach wird die Gleichung der freien Oberfläche:

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{R^2}{2} - e^2\right) - g(h - z) = 0;$$

in der Axe ist

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

an der Cylinderwand

$$z_1 = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Diese Constantenbestimmung hat nur so lange einen Sinn, als $z_1 < H$ bleibt; ist dieser Werth H erreicht, so muss bei wachsendem ω immerfort $z_1 = H$ sein, wodurch sich

$$c' = \frac{\omega^2 R^2}{2} - gH,$$

also die Gleichung des die freie Oberfläche bildenden Paraboloides zu

$$\frac{\omega^2}{2}(R^2 - e^2) - g(H - z) = 0$$

bestimmt.

Die im Cylinder zurückgebliebene Masse M' ist dann:

$$M' = \pi R^2 \varepsilon \left(H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right);$$

sie steht, wenn die Rotation aufhört, im Cylinder in einer Höhe

$$H' = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

4. Eine Flüssigkeit unter der Wirkung eines Attractionscentrums und der Rotation um eine durch dasselbe gehende Axe A steht unter einem Potential

$$\Phi = -\left(\frac{fM}{r} + \frac{\omega^2 e^2}{2}\right); \tag{48}$$

demgemäss sind auch die Flächen constanter Dichte und constanten Druckes gegeben durch

$$\frac{fM}{r} + \frac{\omega^2 e^2}{2} = c'. \tag{48'}$$

Ein rotirender Weltkörper, dessen flüssige Oberflächenschicht verschwindende Dichte gegenüber den dem Centrum nahen Massen hat, würde dieser Formel entsprechende Verhältnisse zeigen.

Setzen wir $e = r\cos\varphi$, so wird die Gleichung (48′) zu

$$fM = \left(c' - \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2\varphi\right) r; \tag{48''}$$

sie giebt für $\varphi = 0$ im Allgemeinen drei Wurzeln r, für $\varphi = \pi/2$, d. h. für die Richtung der Drehungsaxe A, stets nur eine, nämlich

$$r_a = \frac{fM}{c'};$$

letztere kann also passend zur Bestimmung der Constanten benutzt werden. Während r_a von Null bis Unendlich wächst, nimmt zugleich c' von Unendlich bis Null ab.

Die $\varphi = 0$ entsprechenden drei Wurzeln sind reell für Werthe

$$c' > \frac{27}{8} \omega^2 r_a^2;$$

eine dieser Wurzeln ist immer negativ und kommt, da wir unter r die stets positive Entfernung verstehen, nicht in Betracht. Für

$$c' < \frac{27}{8} \omega^2 r_a^2$$

sind zwei Wurzeln complex, die reelle negativ, sodass die betreffenden Potentialflächen die E-Axe überhaupt nicht schneiden.

Die Grenze zwischen beiden Gattungen von Flächen bildet diejenige, für welche

$$c' = \frac{27}{8} \omega^2 r_a^2$$

ist; sie giebt eine Doppelwurzel:

$$r_e = \sqrt{\frac{2c'}{3\omega^2}} = \frac{3}{2} r_a.$$

Demgemäss wird das ganze System der Potentialflächen ein System von Meridianschnitten geben, wie es die Figur 38 verdeutlicht, der Punkt q entspricht der Doppelwurzel. Oberflächen, für welche $8c' < 27\omega^2 r_a^2$, oder aber unter Benutzung des Werthes von r_a auch $c'^3 < 27\omega^2 f^2 M^2$ ist, sind, da sie sich nicht im Endlichen schliessen, bei dem gegebenen Problem nicht möglich und erfordern, um die Bedeutung von Begrenzungsflächen zu erhalten, feste Wände, welche die Flüssigkeit in einem Theil einschliessen. Hieraus folgt, dass, wenn man, was indess unzweifelhaft nicht erlaubt ist, annehmen dürfte, dass die Atmosphäre eines Weltkörpers bis in die fernsten Theile vollständig an dessen Rotation Theil nehme, deren Ausdehnung jedenfalls innerhalb der durch $c'^3 = 27\omega^2 f^2 M^2$ gegebenen Oberfläche liegen müsste.

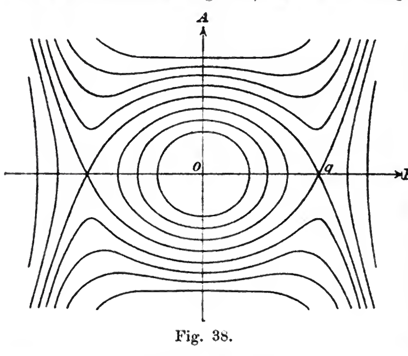


Fig. 38.

5. Zwei starre, in concentrischen Schichten homogene Kugeln, welche sich unter einer gegenseitigen Anziehung in Kreisen um einander bewegen und von denen entweder die eine oder jede von einer

Flüssigkeit umgeben ist, deren Masse verschwindend gegen die der festen Kerne ist, stellen eine Anordnung dar, die bis zu einem gewissen Grade der durch die Erde mit dem sie oberflächlich bedecken-den Meer und durch die Sonne oder den Mond gegebenen überein-stimmt und demnach eine gewisse Vorstellung über das Zustande-kommen von Ebbe und Fluth gewährt.

Denken wir den Massenmittelpunkt O des ganzen Systemes ruhend, so rotiren die Centren beider Kugeln mit gleichförmiger Geschwindig-keit in constantem Abstand um eine durch ihn gehende Axe a; ruht die Flüssigkeit gegen ein mit ihnen rotiren-des Coordina-tensystem, wo-mit also eine selbstständige Rotation der beiden Kugeln um Axen durch ihre Centra ausgeschlossen ist, so kann man die Einwirkung der Bewegung durch die Einführung der Centrifugalkraft ersetzen und erhält als ge-sammtes Potential:

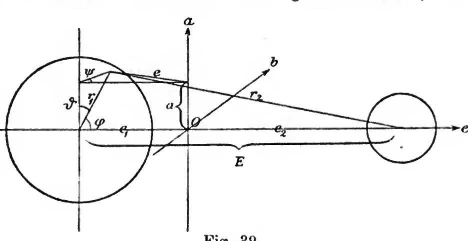


Fig. 39.

$$\Phi = -f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right) - \frac{\omega^2 e^2}{2}. \tag{49}$$

Die Flächen constanter Dichte und constanten Druckes haben daher die Gleichung:

$$f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right) + \frac{\omega^2 e^2}{2} = c'. \tag{49'}$$

Wir wollen sie untersuchen für Punkte, welche nahe der an-ziehenden Masse M_1 liegen.

Nach der Figur (39) haben wir

$$r_2^2 = r_1^2 + E^2 - 2r_1 E\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = \cos\psi\sin\vartheta,$$
$$e^2 = e_1^2 + r_1^2\sin^2\vartheta - 2e_1 r_1\sin\vartheta\cos\psi,$$

und darum folgt aus (49′) durch Entwickelung bis auf die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf r_1/E:

$$f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{E}\left(1 + \frac{r_1}{E}\cos\varphi - \frac{r_1^2}{2E^2} + \frac{3r_1^2}{2E^2}\cos^2\varphi\right)\right)$$
$$+ \frac{\omega^2}{2}(e_1^2 + r_1^2\sin^2\vartheta - 2e_1 r_1\cos\varphi) = c'.$$

Da O der Massenmittelpunkt ist, so gilt

$$e_1 = \frac{E M_2}{M_1 + M_2},$$

und für die Winkelgeschwindigkeit ω folgt aus der Gleichung (96') des ersten Theiles die Beziehung:

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{f(M_1 + M_2)}{E^3}.$$

Setzt man dies ein und zieht die constanten Theile links zur Constanten c' rechts, so erhält man:

$$1 - \frac{M_2 r_1^3}{2 M_1 E^3}(1 - 3\cos^2\varphi) + \frac{(M_1 + M_2) r_1^3 \sin^2\vartheta}{2 M_1 E^3} = C' r_1.$$

Beschränkt man sich auf die erste Näherung und ignorirt die Glieder mit r_1^3/E^3, so ist r_1 constant und sind die Potentialflächen Kugeln; in zweiter Näherung kann man in den kleinen Gliedern r_1 als constant $= R$ ansehen und erhält so r_1 als gerade Function von φ und ϑ, also eine in Bezug auf zu a, b, c parallele Axen durch das Centrum der Kugel M_1 symmetrische Gestalt der Potentialflächen.

Die Halbaxen parallel diesen Richtungen R_a, R_b, R_c nehmen die Werthe an:

$$R_a = \frac{1}{C'}\left(1 - \frac{M_2}{2 M_1}\left(\frac{R}{E}\right)^3\right),$$

$$R_b = \frac{1}{C'}\left(1 + \frac{M_1}{2 M_1}\left(\frac{R}{E}\right)^3\right),$$

$$R_c = \frac{1}{C'}\left(1 + \frac{M_1 + 3 M_2}{2 M_1}\left(\frac{R}{E}\right)^3\right).$$

Die Differenz $R_c - R_b$ würde bei einem um die zu a parallele Axe durch sein Centrum rotirenden Weltkörper die Höhendifferenz zwischen Ebbe und Fluth an einem Punkt des Aequators darstellen; sie hat, wenn man $1/C'$ durch den mittlern Werth des Radius ausdrückt, den Werth

$$R_c - R_b = \frac{3 M_2 R}{2 M_1}\left(\frac{R}{E}\right)^3,$$

und beträgt, wenn man unter der Masse M_1 die Erde versteht, unter M_2 aber resp. Mond oder Sonne, nach den p. 246 angegebenen Zahlen

0,55 m und 0,24 m.

Berücksichtigt man, dass die Erdaxe gegen die Ebene der Bahn von Erde und Mond geneigt ist, so fallen die Zahlen noch etwas grösser aus. Da die Berechnung in diesem Falle etwas complicirter ist, so soll auf sie nicht eingegangen werden; die Resultate stimmen angenähert mit der Beobachtung auf Inseln im Grossen Ocean, wo die Wirkung der das Meer begrenzenden Continente als unerheblich angesehen werden kann.

§ 29. Mechanik idealer Flüssigkeiten; Gesammtdrucke ruhender Flüssigkeiten gegen starre Körper. Schwimmen unter der Wirkung der Schwere.

Befinden sich starre Körper in der Berührung mit einer Flüssigkeit entweder mit allen Theilen ihrer Oberfläche, im Falle sie in jene untergetaucht sind, oder nur mit einigen, im Falle sie nur eingetaucht sind oder aber Theile der sie umschliessenden festen Wand bilden, so geben die in der Flüssigkeit wirkenden Druckkräfte Veranlassung zu Componenten und Drehungsmomenten, welche die Körper erfahren; wir wenden uns jetzt zu ihrer Untersuchung.

I. Da der Druck normal gegen die Oberflächenelemente do des starren Körpers wirkt, so werden, wenn mit n die Normale zu do in der Richtung von der Flüssigkeit zu dem starren Körper bezeichnet wird, für die Componenten- und Momentensummen, die ein beliebiges endliches Stück o seiner Oberfläche erfährt, folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
X' &= \int_{(o)} p\cos(n,x)\,do,\\
Y' &= \int_{(o)} p\cos(n,y)\,do,\\
Z' &= \int_{(o)} p\cos(n,z)\,do,\\
L' &= \int_{(o)} p\,\big(y\cos(n,z)-z\cos(n,y)\big)\,do,\\
M' &= \int_{(o)} p\,\big(z\cos(n,x)-x\cos(n,z)\big)\,do,\\
N' &= \int_{(o)} p\,\big(x\cos(n,y)-y\cos(n,x)\big)\,do.
\end{aligned} \tag{51}$$

Wir wollen diese Integrale berechnen unter der Voraussetzung, dass die Anwesenheit des festen Körpers die auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte nicht ändert, z. B. von ihm keine Attraction auf dieselbe ausgeübt wird; in diesem Falle ist seine Oberfläche nichts als eine der Flüssigkeit gewährte Begrenzung.

Ist die Oberfläche o geschlossen, also entweder diejenige eines die Flüssigkeit enthaltenden Gefässes oder aber die eines in sie untergetauchten Körpers, so lassen sich die Oberflächenintegrale in solche über den von o umschlossenen Raum k verwandeln, obgleich im letzteren Falle der Druck p für diesen Raum gar nicht definirt ist. Da aber nach der Annahme die Anwesenheit des Körpers die auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte nicht ändern soll, so kann man, wenn der Körper von der Flüssigkeit umgeben ist, doch mit demjenigen

Werthe p operiren, den der Druck in dk besitzen würde, wenn an Stelle des Körpers sich ebenfalls Flüssigkeit befände und alles Uebrige ungeändert wäre; dasselbe gilt von den Werthen der Dichte ε und der Componenten der äussern Kräfte X, Y, Z.

Demgemäss können wir innerhalb des von o umschlossenen Raumes, gleichviel ob derselbe wirklich Flüssigkeit enthält oder nicht, die Beziehungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon Z \tag{51'}$$

als gültig betrachten.

Die Anwendung des Hülfssatzes (22) auf die Oberflächenintegrale (51) ist unter diesen Voraussetzungen gestattet; es ist aber zu bemerken, dass in jenen Integralen die Normale n, im Falle die Flüssigkeit sich innerhalb o befindet, die äussere auf k ist, im Falle ausserhalb, die innere. Demgemäss erhalten wir unter Rücksicht auf die Beziehungen (51') folgende Werthe:

$$\begin{gathered} X' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon X dk, \qquad Y' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon Y dk, \qquad Z' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon Z dk, \\ L' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon (yZ - zY) dk, \qquad M' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon (zX - xZ) dk, \\ N' = \pm \int\limits_{(k)} \varepsilon (xY - yX) dk. \end{gathered} \tag{52}$$

Ist die Oberfläche von der Flüssigkeit erfüllt, so gilt das obere Vorzeichen und ε ist die wirklich in dk vorhandene Dichte, X, Y, Z sind die wirklich auf die Masseneinheit in dk wirkenden Componenten; die Gleichungen (52) enthalten dann folgenden Satz:

Eine geschlossene starre Oberfläche, die mit Flüssigkeit erfüllt ist, erfährt Componenten und Drehungsmomente, welche gleich denjenigen sind, die sich aus den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften berechnen würden, wenn die Flüssigkeit starr wäre.

Ist die Oberfläche von der Flüssigkeit umgeben, so gilt das untere Vorzeichen und ε, X, Y, Z sind die Werthe, welche in dk stattfinden würden, wenn die äussere Flüssigkeit sich stetig durch den umschlossenen Raum k fortsetzte. Wir können daher folgendes Resultat aussprechen:

Eine von einer Flüssigkeit rings umgebene starre Oberfläche erfährt unter den gemachten Voraussetzungen Componentensummen und Drehungsmomente, welche entgegengesetzt sind denjenigen, welche sich aus den auf die ver-

drängte Flüssigkeit wirkenden Kräften berechnen würden, wenn die Flüssigkeit einen starren Körper bildete.

Dass in diesen beiden Fällen die Wirkungen entgegengesetzt gleich sein müssen, übersieht man am einfachsten, wenn man in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit die Theilchen, welche eine geschlossene Oberfläche erfüllen, in starre Verbindung gebracht denkt; hierdurch kann das Gleichgewicht nicht geändert werden, die starre Oberfläche muss also von aussen und innen entgegengesetzte Wirkungen erfahren und dies überträgt sich unmittelbar auf den Fall, dass der äussere oder innere Raum mit einem starren Körper ausgefüllt ist, vorausgesetzt, dass dieser, wie angenommen, seinerseits keine Wirkung auf die Flüssigkeit ausübt.

Für den Fall, dass die Flüssigkeit nur der Schwerkraft unterworfen ist, muss sie in horizontalen Ebenen constante Dichte und constanten Druck besitzen, die verdrängte Flüssigkeit wird also dadurch erhalten, dass man das ausserhalb des Körpers stattfindende Gesetz der Dichte auch durch den vom Körper erfüllten Raum hindurch fortgesetzt denkt. Da ferner parallele Kräfte sich jederzeit durch eine Einzelkraft vollständig ersetzen lassen, so gelten folgende Sätze.

Eine mit schwerer Flüssigkeit erfüllte starre geschlossene Oberfläche erfährt eine Kraft, welche gleich dem Gewicht der eingeschlossenen Flüssigkeit ist und durch deren Schwerpunkt geht.

Eine von schwerer Flüssigkeit umgebene starre geschlossene Oberfläche erfährt eine Kraft, welche gleich und entgegengesetzt gerichtet ist dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und durch deren Schwerpunkt geht.

Dieser letztere Satz führt den Namen des Archimedischen Principes und die darin besprochene Kraft den Namen des hydrostatischen Auftriebes.

Die Luft ist eine Flüssigkeit, innerhalb deren alle Körper sich befinden, mit denen wir gewöhnlich operiren; der von ihr herrührende Auftrieb giebt bei vielen physikalischen Beobachtungen eine Fehlerquelle, welche Berücksichtigung verlangt.

Bei Wägungen werden die auf die Waage ausgeübten Kräfte durch sie verringert. Bezeichnen wir Masse, Volumen und Dichte des zu wägenden, homogen angenommenen Körpers mit M_k, V_k und ε_k, die der Gewichtsstücke mit M_g, V_g und ε_g, die Dichte der Luft mit ε_l, so wird unter Voraussetzung gleicher Hebelarme die Waage einspielen, wenn

$$V_k(\varepsilon_k - \varepsilon_l) = V_g(\varepsilon_g - \varepsilon_l) \qquad \text{oder} \qquad M_k\left(1 - \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_k}\right) = M_g\left(1 - \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_g}\right)$$

ist, aber nicht, wenn $M_k = M_g$ ist, ausgenommen, dass die Dichten der Gewichtsstücke und der Körper die gleichen sind.

Das Gewicht eines Körpers im leeren Raum $M_k g$, vermindert um den Betrag des Auftriebes der Flüssigkeit, in welcher er sich befindet, nennt man das scheinbare Gewicht des Körpers in dieser Flüssigkeit. Mit dem scheinbaren Gewicht der Körper in Luft, d. h. mit der Grösse $M_k g(1 - \varepsilon_l/\varepsilon_k)$, operiren wir bei Wägungen der Regel nach ausschliesslich.

Das Drehungsmoment, welches die Schwere auf ein Pendel ausübt, wird durch den Auftrieb der Luft verringert und erhält, falls der Schwerpunkt der Masse und der Schwerpunkt des Volumens in derselben Ebene durch die Drehungsaxe liegen, s und s' ihre Abstände von letzterer sind, φ deren Winkel gegen die Verticale ist, den Werth:

$$N = - M_k s g \left(1 - \frac{\varepsilon_l s'}{\varepsilon_k s}\right) \sin \varphi .$$

Um diese und ähnliche Einflüsse in Rechnung zu ziehen, ist die Kenntniss der Dichte der Luft für die bei der Beobachtung stattfindenden Umstände, d. h. für die beobachtete Temperatur und den beobachteten Barometerstand, erforderlich. Das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac, welches lautet

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l^0 \frac{p}{p_0} \left(\frac{1 + \alpha \vartheta_0}{1 + \alpha \vartheta}\right),$$

giebt diese Grösse für alle Verhältnisse an, wenn sie für irgend eine Temperatur ϑ_0 und einen Druck p_0 bestimmt ist.

Ihre Bestimmung geschieht unter Benutzung des Auftriebes, indem man ein Gefäss von bekanntem Volumen erst offen, dann geschlossen und evacuirt wägt.

Ist das von der Substanz des Gefässes erfüllte Volumen v, ihre Dichte ε, das Volumen des umschlossenen Hohlraumes V, die Dichte der umgebenden Luft bei der abgelesenen Temperatur und dem abgelesenen Druck ε_l, so wird das scheinbare Gewicht G_0 im geöffneten Zustande sein

$$G_0 = vg(\varepsilon - \varepsilon_l),$$

im geschlossenen und evacuirten

$$G_1 = vg(\varepsilon - \varepsilon_l) - Vg\varepsilon_l;$$

die Differenz beider bestimmt ε_l.

Den Gewichtsverlust, welchen starre Körper in tropfbaren Flüssigkeiten erleiden, benutzt man, um ihre eigene Dichte oder, wenn diese bekannt ist, die Dichte der Flüssigkeit zu bestimmen.

Die Wägung des Körpers in Luft giebt das scheinbare Gewicht

$$G_1 = Vg(\varepsilon_k - \varepsilon_l),$$

in der Flüssigkeit von der Dichte ε_f

$$G_2 = Vg(\varepsilon_k - \varepsilon_f).$$

Aus diesen zwei Beobachtungen kann man zwei Grössen bestimmen, z. B. ε_k und V, falls ε_l und ε_f bekannt sind; es gelten die Gleichungen:

$$\frac{G_1}{G_1 - G_2} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_l}{\varepsilon_f - \varepsilon_l}, \qquad \frac{G_1 - G_2}{g} = V(\varepsilon_f - \varepsilon_l).$$

Haben die Stücke des Gewichts- oder besser des Massensatzes, welche die scheinbaren Gewichte G_1 und G_2 ergeben, durchweg gleiche Dichte, so ist das Verhältniss $G_1/(G_1 - G_2)$ vom Auftrieb der Luft unabhängig, nämlich gleich dem Verhältniss der durch die Bezeichnung der Gewichtsstücke direct gegebenen Massen $M_1/(M_1 - M_2)$. Das Verhältniss $(G_1 - G_2)/g$ hingegen ist von dem Auftrieb auch unter dieser Voraussetzung abhängig und hat den Werth $(M_1 - M_2)(1 - \varepsilon_l/\varepsilon_g)$.

Bei diesen Beobachtungen ist der Einfluss, den Temperaturänderungen auf alle Dichten und den Druckänderungen auf die Dichte der Luft ausüben, nach dem früher p. 313 Gesagten in Rechnung zu ziehen. —

II. Ist die Flüssigkeit in ihrem untern Theile tropfbar, im obern gasförmig, so gelten die Sätze p. 331 unverändert; ignorirt man dabei die Dichte des Gases neben derjenigen der Flüssigkeit, d. h. betrachtet den mit Luft erfüllten Theil als leer, so ist die Gestalt des obern Theiles der geschlossenen Oberfläche ganz ohne Einfluss. Derselbe kann auch ganz fehlen, wie bei einem Gefäss, das oben offen und mit Flüssigkeit erfüllt ist; trotzdem findet sich der Verticaldruck, den das letztere durch die Schwere erleidet, gleich dem Gewicht der in ihm enthaltenen Flüssigkeitsmenge. Ein auf der Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit schwimmender Körper erleidet aus dem gleichen Grunde einen Auftrieb gegeben durch das Gewicht der von ihm verdrängten tropfbaren Flüssigkeit, welcher in deren Schwerpunkt angreift. Diesen specielleren Satz legt man der Theorie des Gleichgewichtes oberflächlich schwimmender Körper zu Grunde.

Schwimmende Körper stehen also unter der Wirkung ihres Gewichtes, das im Schwerpunkt ihrer Masse, und des Auftriebes, der im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit angreift. Nach den im zweiten Theile angestellten allgemeinen Betrachtungen ist zum Gleichgewicht nothwendig und hinreichend, dass diese in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind und die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte ihrer Richtung parallel ist. Der Körper wird also so tief einsinken, dass der erzielte Auftrieb seinem Gewicht gleich ist,

und eine solche Lage einnehmen, dass die Verbindungslinie beider Schwerpunkte vertical steht. Er wird untersinken, wenn auch bei vollständigem Eintauchen der Auftrieb dem Gewicht nicht gleich kommt.

Von besonderem Interesse ist bei schwimmenden Körpern die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichtes.

Das Gleichgewicht ist absolut stabil, wenn bei jeder unendlich kleinen Bewegung des schwimmenden Körpers gegen die Flüssigkeit Kräfte entstehen, die dieser Bewegung entgegenwirken. Die Verrückungen, welche die Lage des Körpers gegen die Flüssigkeit ändern, sind ausschliesslich verticale Verschiebungen und Drehungen um horizontale Axen; horizontale Verschiebungen und Drehungen um verticale Axen ändern dieselbe ersichtlich nicht.

Man erkennt nun leicht, dass, die singulären Fälle ausgenommen, wo durch tieferes Eintauchen des Körpers dem Eindringen der Flüssigkeit Hohlräume im Körper geöffnet werden, die Menge der verdrängten Flüssigkeit, und daher auch der Auftrieb, durch eine verticale Verschiebung nach unten immer zunimmt, bei einer nach oben abnimmt, während das Gewicht des Körpers ungeändert bleibt, dass demnach gegenüber verticalen Verschiebungen das Gleichgewicht immer stabil ist.

Es handelt sich also nur um die Wirkungen von Drehungen um horizontale Axen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in die Flüssigkeitsoberfläche legen können; denn die Drehung um eine andere horizontale Axe kann stets nach p. 139 durch Zufügung einer parallelen Verschiebung in diese verwandelt werden.

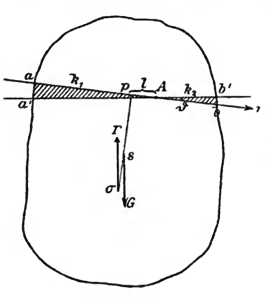


Fig. 40.

Stelle in der Figur 40 die Gerade $\overline{ab}$ die Ebene normal zur Figur dar, in welcher bei der Gleichgewichtslage, von der aus die Drehung stattfindet, die Flüssigkeitsoberfläche den schwimmenden Körper schneidet, sei s der Schwerpunkt des Körpers, σ der des verdrängten Volumens Flüssigkeit, dann ist nach dem Früheren $\overline{s\sigma}$ normal zu $\overline{ab}$.

Die Drehung des Körpers aus der Gleichgewichtslage heraus finde in negativer Richtung um die Axe statt, welche im Punkte A normal zur Ebene der Figur steht; der unendlich kleine Drehungswinkel sei ϑ. Nach der Drehung schneidet dem-

gemäss die Flüssigkeitsgrenze den Körper in einer durch $\overline{a'b'}$ dargestellten Ebene normal zur Figur; es ist also ein keilförmiges Volumen k_1 aus der Flüssigkeit, ein anderes k_2 durch die Drehung in die Flüssigkeit gekommen.

Nennen wir für ein Element dq des Querschnittes die Coordinate normal zur Axe A in der Ebene der Flüssigkeitsgrenze r, so sind diese Volumina resp.

$$k_1 = -\vartheta \int_{(q_1)} r\, dq, \qquad k_2 = +\vartheta \int_{(q_2)} r\, dq,$$

wo das erste Integral über die linke, das zweite über die rechte Querschnittshälfte genommen ist; ersteres ist mit negativem Zeichen zu nehmen, denn auf der linken Seite ist $r < 0$.

Die Drehung verändert das eingetauchte Volumen nicht, wenn

$$k_1 = k_2, \quad \text{d. h.} \quad \int_{(q_1 + q_2)} r\, dq = 0$$

ist, oder wenn die Axe durch den Schwerpunkt des Querschnittes q gelegt ist; in diesem Falle haben wir also eine rein drehende Wirkung, erhalten also auch keine verticale Kraftcomponente, sondern nur ein Moment um die Axe A.

Sei das Gewicht des Körpers G, das der verdrängten Flüssigkeit Γ, und denken wir ersteres in s, letzteres in σ angreifend, so geben beide zusammen ein Moment, welches gegenüber den wirklich stattfindenden um die Wirkung des Keiles k_1 zu gross, um die des Keiles k_2 zu klein ist, denn k_1 ist aus der Flüssigkeit aus-, k_2 in dieselbe eingetaucht.

Bezeichnet man den normalen Abstand der Schwerpunkte s und σ von $\overline{ab}$ mit s und σ und die Entfernung des Fusspunktes p von A mit l und beachtet, dass ϑ ein unendlich kleiner Winkel sein soll, so ist das Moment von G

$$N_G = +G(l + s\vartheta),$$

das von Γ

$$N_\Gamma = -\Gamma(l + \sigma\vartheta),$$

das von k_1

$$N_1 = -g\varepsilon\vartheta \int_{(q_1)} r^2 dq,$$

das von k_2

$$N_2 = +g\varepsilon\vartheta \int_{(q_2)} r^2 dq.$$

Die Resultante aller dieser Momente ist unter Rücksicht darauf, dass dasjenige von k_1 abzuziehen, das von k_2 zuzuaddiren und $G = \Gamma$ ist:

$$N = \left(G(s - \sigma) + g\varepsilon \int r^2 dq\right) \vartheta.$$

Wenn der Factor von ϑ grösser als Null ist, so wirkt das entstandene Moment der Drehung, die in negativem Sinne angenommen ist, entgegen, so ist also das Gleichgewicht für eine Drehung um die Axe A stabil; ist der Factor kleiner als Null, so ist es labil, ist er gleich Null, indifferent.

Das Gleichgewicht ist absolut stabil, wenn für jede durch den Schwerpunkt des Querschnittes q, in welchem die freie Flüssigkeitsoberfläche den Körper schneidet, gelegte Axe die Beziehung gilt:

$$G(s-\sigma) + g\varepsilon \int_{(q)} r^2 dq > 0. \tag{53}$$

Führt man das Volumen V der verdrängten Flüssigkeit ein und bedenkt, dass

$$G = g\varepsilon V$$

ist, so schreibt sich diese Bedingung auch:

$$V(s-\sigma) + \int_{(q)} r^2 dq > 0. \tag{53'}$$

Das Integral hat die Bedeutung des Trägheitsmomentes des Querschnittes q um die Axe A und ist eine stets positive Grösse.

Man erkennt, dass das Gleichgewicht stets stabil ist, falls

$$s > \sigma$$

ist, also der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt als derjenige der verdrängten Flüssigkeit.

Dieses findet bei homogenen Körpern aber niemals statt. Indessen ist, auch wenn der Schwerpunkt des Körpers höher liegt, stabiles Gleichgewicht noch möglich, wenn der Abstand $\sigma - s$ vom Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit der Ungleichung genügt:

$$s - \sigma < \frac{1}{V}\int_{(q)} r^2 dq.$$

Diese Ungleichung lässt sich noch anschaulicher machen, wenn man aus dem Volumen der verdrängten Flüssigkeit einen Cylinder bildet von einer Grundfläche, welche gleich dem Querschnitt q ist, in welchem die Flüssigkeit den festen Körper schneidet; derselbe besitzt eine Höhe λ gegeben durch

$$V = q\lambda.$$

Führt man dann noch den Trägheitsradius $\varkappa$ des Querschnittes q durch die Gleichung

$$\int_{(q)} r^2 dq = q\varkappa^2$$

ein, so lautet die Bedingung des stabilen Gleichgewichtes:

$$\lambda(\sigma - s) < \varkappa^2. \tag{53''}$$

Das Gleichgewicht eines unter der Wirkung der Schwere schwimmenden Körpers ist absolut stabil, wenn für jede durch den Schwerpunkt des Querschnittes q gelegte Axe das Quadrat des Trägheitsradius grösser ist als das Rechteck gebildet aus dem Abstand $(\sigma - s)$ des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit von demjenigen des Körpers und aus der Hülfsgrösse λ.

Wir machen von diesem wichtigen Gesetz nunmehr eine Anwendung.

Sei der Körper ein homogener gerader Kreiscylinder von dem Radius R und der Länge L, dann besteht nach Figur 41 die Beziehung

$$\sigma = \frac{L}{4} + \frac{s}{2}$$

und gilt also

$$\sigma - s = \frac{L}{4} - \frac{s}{2};$$

dagegen ist direct gegeben

$$\lambda = \frac{L}{2} + s.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt ist nach Formel (40) des zweiten Theiles

$$\varkappa^2 = \frac{R^2}{4},$$

Fig. 41.

und die Bedingung der Stabilität wird daher zu

$$\frac{R^2}{2} > \left(\frac{L^2}{4} - s^2\right).$$

Hierin bestimmt sich s durch das Verhältniss der Dichtigkeiten ε des Körpers und ε' der Flüssigkeit; denn aus der Bedingung

$$G = \Gamma$$

wird hier

$$\pi L R^2 \varepsilon g = \pi\left(\frac{L}{2} + s\right) R^2 \varepsilon' g,$$

es gilt also:

$$L\varepsilon = \left(\frac{L}{2} + s\right)\varepsilon' \quad \text{oder} \quad s = \frac{L(2\varepsilon - \varepsilon')}{2\varepsilon'}.$$

Hiernach wird die obige Ungleichung zu

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 > \frac{2\varepsilon(\varepsilon' - \varepsilon)}{\varepsilon'^2}.$$

Der beginnenden Instabilität entspricht ein Werth des Verhältnisses R/L gegeben durch

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 = \frac{2\varepsilon(\varepsilon' - \varepsilon)}{\varepsilon'^2}.$$

Die Dichten von Kork und Wasser verhalten sich etwa wie 1 : 4, ein Cylinder von Kork wird also aufrecht im Wasser schwimmen, wenn das Verhältniss von Radius zu Höhe grösser ist als $\sqrt{3/8}$, d. h. grösser als ca. 0,6. Für Eis und Wasser, wo $\varepsilon : \varepsilon' = 9 : 10$ ist, muss entsprechend $(R/L)^2 > \sqrt{0{,}18}$, d. h. $> 0{,}42$ sein.

Setzt man $\varepsilon/\varepsilon' = \beta$, so lautet die obige Ungleichung

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 > 2\beta(1 - \beta),$$

wobei $0 < \beta < 1$ sein muss; die rechte Seite, als Function von β betrachtet, nimmt einen grössten Werth an für $\beta = 1/2$, einen kleinsten für $\beta = 0$ oder $\beta = 1$. Da die Stabilität um so grösser ist, je mehr die linke Seite die rechte an Grösse überwiegt, so giebt der Werth $\beta = 1/2$ ein Dichtigkeitsverhältniss an, für welches die Stabilität des Schwimmens ein Minimum ist; sehr grosse und sehr kleine Werthe von β sind vortheilhafter.

Eine homogene Kugel oder ein homogener Kreiscylinder mit horizontaler Axe schwimmt, wie die directe Anschauung lehrt, bezüglich einer Drehung stets im indifferenten Gleichgewicht; soll das unsere Formel ausdrücken, so muss sie, auf diese Fälle angewandt,

$$\lambda(\sigma - s) = \varkappa^2$$

ergeben. In der That lässt sich durch eine einfache Rechnung erweisen, dass dies stattfindet.

III. Der erste der p. 330 angegebenen Sätze lässt sich, speciell auf die Wirkung der Schwerkraft angewandt, in der Form aussprechen:

Eine geschlossene, mit Flüssigkeit erfüllte Oberfläche erfährt unter der Wirkung der Schwere Druckkräfte, deren verticale Componenten die Summe $g f \varepsilon dk$ über das umschlossene Volumen und deren horizontale Componenten die Summe Null ergeben.

Wir wollen ihn anwenden, um Folgerungen über den Druck gegen nicht geschlossene Flächenstücke zu ziehen, indem wir diese in geeigneter Weise zu geschlossenen Flächen ergänzen. Dabei ist es vortheilhaft, zu beachten, dass die gegen die eine Seite o einer in einer Flüssigkeit befindlichen Oberfläche ausgeübten Drucke gleich und entgegengesetzt sind denen, welche die andere o' erfährt.

Um die Verticalcomponente Z_o des Druckes zu bestimmen, den die nicht geschlossene Fläche o (Figur 42) erfährt, construiren wir über ihrer Randcurve einen verticalen Cylinder cc, der aus einer willkürlichen Horizontalebene durch OX, in welcher der Druck p_0 herrsche, das Stück ω ausschneidet.

Bezeichnet man das zwischen o und ω liegende Volumen mit k, so ergiebt der obige Satz, da die auf die Cylinderfläche wirkenden Drucke keine verticale Componente liefern:

$$Z_o + Z_\omega = g \int_{(k)} \varepsilon\, dk. \tag{54}$$

Nun ist aber

$$Z_\omega = -\omega p_0,$$

also findet sich

$$Z_o = \omega p_0 + g \int_{(k)} \varepsilon\, dk, \tag{54'}$$

Fig. 42.

und dies enthält einen Satz, der sich leicht in Worte fassen lässt.

Schneidet die Oberfläche o den verticalen Cylinder, so sind die ausserhalb liegenden Volumina (in der Figur k') mit negativem Vorzeichen einzuführen, denn für sie ist die Fläche o die äussere Fläche und der Druck gegen diese giebt als Resultante einen Auftrieb parallel $-Z$.

Ist die Flüssigkeit nur in ihrem unteren Theil tropfbar, in ihrem oberen gasförmig, so legt man ω passend in die Grenzfläche beider Theile; p_0 ist dann der Oberflächendruck der Flüssigkeit.

Um eine horizontale Gesammtcomponente, z. B. diejenige parallel der X-Axe, von den Drucken zu bestimmen, welche o erfährt, construiren wir parallel der X-Richtung über der Randcurve von o einen Cylinder bis zu einer beliebigen zur X-Axe normalen Ebene, z. B. der YZ-Ebene, welcher aus dieser die Fläche ω_1 ausschneide. Der obige Satz ergiebt dann auf das zwischen o und ω_1 liegende Volumen k_1 angewandt

$$X_o + X_{\omega_1} = 0 \qquad \text{oder} \qquad X_o = + X_{\omega_1'}, \tag{54''}$$

was ebenfalls einen einfachen Satz enthält.

Es mag schliesslich noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Drucke, welche auf ein nicht geschlossenes Flächenstück wirken, im Allgemeinen nicht zu einer einzigen Kraft zusammensetzbar sind, sondern auch noch Drehungsmomente ergeben, für welche analoge einfache Sätze, wie die vorstehenden, durch dieselben Mittel zu erhalten sind.

§ 30. Mechanik idealer Flüssigkeiten; Potentialbewegungen. Eine Kugel oder ein Cylinder in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit.

I. Wir wenden uns nunmehr zu der Betrachtung einiger Bewegungserscheinungen, welche ideale, d. h. reibungsfreie Flüssigkeiten zeigen können. Die allgemeinen Gesetze derselben sind in den Gleichungen (37) bis (40) enthalten; wir wollen sie in der Weise benutzen, dass wir in ihnen die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w als Functionen von x, y, z und t ansehen, also nicht ein jedes Massentheilchen auf seinem Wege verfolgen, sondern untersuchen, was für eine Bewegung zu beliebiger Zeit an beliebiger Stelle stattfindet.

Alle Betrachtungen, welche wir in § 26 über unendlich kleine stetige Verrückungen angestellt haben, werden jetzt direct auf die Bewegung der Flüssigkeit anwendbar, falls wir die Verrückungscomponenten δx, δy, δz als die in der unendlich kleinen Zeit δt während der Bewegung wirklich stattfindenden deuten, also setzen

$$\delta x = u\,\delta t, \qquad \delta y = v\,\delta t, \qquad \delta z = w\,\delta t,$$

und dementsprechend die Deformationsgeschwindigkeiten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x_x', \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y', \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z',$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z', \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x', \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y'$$

einführen.

Die in den Bewegungsgleichungen (37) auftretenden vollständigen Differentialquotienten du/dt, dv/dt, dw/dt, welche für ein gegebenes Flüssigkeitstheilchen die in Folge der Zeit- und Ortsänderung stattfindenden Beschleunigungen darstellen, sind nach unserer Annahme in die den einzelnen Ursachen entsprechenden Theile zu zerlegen, und wir erhalten, indem wir nach dem Schema

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z}\end{aligned}$$

verfahren, für die Hauptgleichungen (37) die folgende Euler'sche Form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned} \tag{55}$$

Die Continuitätsbedingung (38) lässt sich unter Anwendung derselben Rechnung auf $d\varepsilon/dt$ schreiben:

$$\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon w}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{55'}$$

Die Dichte ε wollen wir nur als Function des Druckes betrachten und ersetzen daher die Formeln (38') bis (39''') durch die eine

$$\varepsilon = F(p), \tag{55''}$$

oder, was dasselbe bezeichnet, setzen

$$\int \frac{dp}{\varepsilon} = \Pi(p), \tag{55'''}$$

worin Π eine Function von p allein bezeichnet.

Was die Oberflächenbedingungen angeht, so werden wir uns hauptsächlich auf die Fälle beschränken, dass die Begrenzung der Flüssigkeit durch starre, aber mit den Geschwindigkeiten u_k, v_k, w_k beliebig bewegte Flächen geschieht; es gilt an letzteren dann die Gleichung

$$(\bar{u} - u_k) \cos nx + (\bar{v} - v_k) \cos ny + (\bar{w} - w_k) \cos nz = 0, \tag{56}$$

während der Druck daselbst jeden Werth annehmen kann. Sind die Oberflächen hingegen, was nur bei tropfbaren Flüssigkeiten möglich ist, Grenzen gegen den leeren Raum oder gegen ein Gas, in welchem der Druck als constant angesehen werden kann, so tritt noch die Bedingung hinzu, dass in der Grenze p den gegebenen constanten Werth

$$p = p_k \tag{56'}$$

annehmen muss.

Der Behandlung dieser Gleichungen schicken wir noch folgende Definitionen voraus. Eine Curve, welche an jeder Stelle der Flüssigkeit mit ihrer Tangente in die Richtung der dort stattfindenden Geschwindigkeit V fällt, heisst eine Stromlinie; ihre Differentialgleichungen sind:

$$dx : dy : dz = u : v : w.$$

Ein Canal, welcher durch die Stromlinien erfüllt wird, die normal durch ein beliebiges Querschnittselement q hindurchgehen, heisst ein Stromfaden.

Ist die Bewegung stationär, d. h. ändert sich an jeder Stelle des Raumes u, v, w, ε und p mit der Zeit nicht, so muss für alle Querschnitte eines Stromfadens die Geschwindigkeit V dem Querschnitt q indirect proportional sein; denn da die Strömung nach der Definition des Stromfadens nicht durch die Wände desselben hindurch stattfindet, so muss dieselbe Menge $M = q\varepsilon V$, welche durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit eintritt, durch einen folgenden austreten, damit sich der Zustand zwischen beiden nicht mit der Zeit ändere. Ein solcher Strom-

faden kann dann in der Flüssigkeit nicht aufhören, denn sein Querschnitt verschwindet nach dem eben Gesagten nur, wenn die Geschwindigkeit in ihm unendlich ist, und diesen Fall, der nach (57) auch unendlichen Druck oder unendliche äussere Kräfte verlangen würde, schliessen wir als practisch unmöglich aus. Ein Stromfaden kann also bei stationärer Bewegung nur in sich zurücklaufen oder muss aus dem Unendlichen kommen und in's Unendliche gehen. Dabei kann, da nach dem eben Gesagten einer verschwindenden Geschwindigkeit ein unendlicher Querschnitt des Stromfadens entspricht, die Flüssigkeit im Unendlichen ruhen.

Für viele Zwecke ist es bequem, nur einen Theil der ganzen Flüssigkeitsbewegung zu betrachten, die Flüssigkeit also ausser durch Flächen, längs deren die Bedingungen (56) und (56′) erfüllt sind und längs deren die Strömung stattfindet, welche also durch Stromlinien gebildet sind, für die Betrachtung auch noch durch solche Flächenstücke zu begrenzen, durch welche hindurch Flüssigkeit eintritt oder austritt. Man kann die ersteren kurz als Eintritts-, die letzteren als Austrittsflächen bezeichnen. Bei jeder stationären Bewegung muss die in jedem Zeitmoment eintretende Menge gleich der austretenden sein, weil sich sonst im Gegensatz zur Definition der Zustand zwischen jenen Flächen mit der Zeit ändern würde.

Wir gehen nunmehr zur Behandlung der Gleichungen (55) und (56) über.

Ein wichtiger specieller Fall ist der, dass die wirkenden Kräfte X, Y, Z ein Potential Φ besitzen. Dann nehmen die Hauptgleichungen die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{57}$$

und man kann ihnen genügen, indem man u, v, w gleich den partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function φ von x, y, z und t, also

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{57′}$$

macht. Diese von Lagrange eingeführte Function heisst nach v. Helmholtz das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeitsbewegung.

In der That, setzt man diese Beziehungen in die erste Gleichung (57) ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} = -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x}$$

oder aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]=-\frac{\partial(\Phi+\Pi)}{\partial x}. \qquad (57'')$$

Aehnlich lauten die andern und man gelangt, wenn man sie mit den Factoren dx, dy, dz zusammenfasst und integrirt, zu dem Resultat, dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)+\Phi+\Pi=T \qquad (58)$$

sein muss, worin T eine willkürliche Function der Zeit t bezeichnet, welche bei der Integration nach x, y, z statt einer Integrationsconstanten auftritt.

Führt man das Geschwindigkeitspotential auch in die Bedingungen (55′) und (56) ein, so lauten dieselben

$$\frac{\partial\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=0$$

oder

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}=0, \qquad (58')$$

und

$$\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}-u_k\right)\cos(n,x)+\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}-v_k\right)\cos(n,y)+\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}-w_k\right)\cos(n,z)=0 \qquad (58'')$$

oder

$$\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}=N_k,$$

wenn N_k die Geschwindigkeit des starren Oberflächenelementes in der Richtung seiner Normalen bezeichnet.

Durch die Einführung des Geschwindigkeitspotentiales wird die Anzahl der Unbekannten in den Gleichungen (55) bis (55‴) von fünf auf drei herabgesetzt; von ihnen kann ε überdies durch die Beziehung (55‴) sogleich eliminirt werden, sodass in den neuen Gleichungen (58) bis (58″) nur φ und Π übrig bleiben.

Ist, wie wir weiterhin voraussetzen werden, die Bewegung von der Art, dass jedes Massentheilchen während derselben seine Dichtigkeit unverändert beibehält, obwohl sie für verschiedene Theilchen verschieden sein kann, so wird $d\varepsilon/dt$ gleich Null, und die Gleichung (58′) enthält nur noch φ und bestimmt diese Grösse, wie sich durch eine besondere Untersuchung zeigen lässt, mit der Grenzbedingung (58″) bis auf eine additive Constante. Die Gleichung (58) ergiebt dann das dem gefundenen φ entsprechende $\Pi+\Phi$ und dadurch das Gesetz für Druck und äussere Kräfte, welches erfüllt sein muss, damit die durch φ definirte Bewegung stattfinden könne.

Dieser Fall begreift den noch specielleren der stationären Bewegung in sich und geht in ihn über, wenn φ, $\Phi + \Pi$ und ε von der Zeit unabhängig sind.

Ist das Geschwindigkeitspotential φ irgend welchen gestellten Bedingungen entsprechend gefunden, so bestimmen sich nach (57') die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w für jede Stelle und zu jeder Zeit, und aus ihnen findet sich die Grösse und Richtung der resultirenden Geschwindigkeit. Soll die Geschwindigkeit überall endlich bleiben, so muss φ eine stetige Function des Ortes sein. Die Gleichungen der Stromcurven finden sich durch Integration der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{59}$$

Anschaulich erhält man, auch ohne diese Rechnung auszuführen, ein Bild des Bewegungszustandes zu einem beliebigen Zeitpunkt mit Hülfe der Oberflächen

$$\varphi = \text{Const.};$$

denn da die Geschwindigkeitscomponenten bis auf das Vorzeichen ebenso durch das Geschwindigkeitspotential φ definirt sind, wie die Kraftcomponenten durch das Kräftepotential Φ, so kann man, die p. 91 und 92 für letztere gegebenen Sätze übertragend, Folgendes aussprechen:

Construirt man das ganze unendliche System der Potentialflächen $\varphi = C$ für Werthe der Constanten, die sich um denselben unendlich kleinen Betrag δC unterscheiden, so giebt an jeder Stelle die Richtung der Normalen von kleineren zu grösseren Potentialwerthen die Richtung der dort stattfindenden Strömung und bildet die Länge des Normalenelementes dN zwischen den beiden benachbarten Potentialflächen durch ihren reciproken Werth das Maass für die Grösse der ebenda stattfindenden Geschwindigkeit, gemäss der Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = V.$$

Die Deformationsgeschwindigkeiten gewinnen bei Existenz eines Geschwindigkeitspotentiales die Werthe:

$$x_x' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad y_y' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad z_z' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

$$y_z' = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}, \qquad z_x' = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x}, \qquad x_y' = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}.$$

Die Lage der Hauptdilatationsaxen ist nach p. 287 dadurch definirt, dass die auf sie bezogenen Werthe y_z', z_x', x_y' verschwinden; dies gestattet, ihre Lage in unserem Fall bequem zu beurtheilen.

Beschränken wir uns nämlich auf das p. 277 definirte Bereich B eines beliebigen Punktes, so kann man φ jederzeit in die Reihe entwickeln

$$\varphi = \varphi_0 + \xi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0$$
$$+ \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 + \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_0 + \eta\zeta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}\right)_0 + \zeta\xi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial x}\right)_0 + \xi\eta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)_0,$$

in welcher mit den Gliedern zweiter Ordnung abzubrechen ist.

Die Oberflächen $\varphi = \text{Const.}$ sind dann innerhalb B Oberflächen zweiten Grades und ihre Axen liegen parallel denjenigen Richtungen, für welche

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = 0$$

ist. Hieraus folgt der Satz:

Die Hauptdilatationsaxen sind an jeder Stelle p parallel den Hauptaxen derjenigen Fläche zweiten Grades, mit welcher die Oberfläche $\varphi = C$ innerhalb des jenem Punkte zugehörigen Bereiches B zusammenfällt.

Was die Darstellung der Begrenzung der Flüssigkeit durch das System der Potentialflächen anbetrifft, so ergiebt die Gleichung (58′), dass für eine feste Wand nur die Bedingung $\partial\varphi/\partial n = 0$ zu erfüllen ist, welche aussagt, dass die Potentialflächen sie überall senkrecht schneiden müssen. Demnach kann jede die Potentialflächen überall normal durchsetzende Fläche als eine feste Begrenzung der Flüssigkeit gewählt werden. Im allgemeineren Falle einer ihrerseits bewegten Wand bleibt die Bedingung $\partial\varphi/\partial n = N_k$ bestehen.

Für eine freie Oberfläche muss p einen constant gegebenen Werth besitzen, also auch Π constant sein. Die Gleichung (58) liefert daher eine Bedingung, welche die an der Oberfläche stattfindende Geschwindigkeit $\overline{V}$ (oder aber den normalen Abstand benachbarter Potentialflächen, von welchem der letzte Satz redet) in Verbindung bringt mit dem Potential der äussern Kräfte Φ und der Aenderung des Geschwindigkeitspotentiales mit der Zeit $\partial\varphi/\partial t$. Die Erfüllung dieser Bedingung bietet grosse Schwierigkeiten dar. Fehlen die äussern Kräfte und ist φ von der Zeit unabhängig, so hat die freie Oberfläche die Bedingungen zu erfüllen, dass die auf ihr liegenden Schnittcurven mit dem durch δC gegebenen System von Potentialflächen überall gleiche normale Abstände haben müssen.

Die Bedingungen dafür, dass ein Geschwindigkeitspotential für eine gegebene Bewegung existirt, sind aus den Gleichungen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

durch Elimination von φ leicht zu bilden und lauten:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{59'}$$

Hiermit combiniren wir das System der Formeln (4''), in welches wir, wie schon früher die Strömungsgeschwindigkeiten u, v, w durch die Beziehungen

$$\delta x = u\,\delta t, \qquad \delta y = v\,\delta t, \qquad \delta z = w\,\delta t,$$

jetzt auch die Rotationsgeschwindigkeiten λ, μ, ν durch die Beziehungen

$$\delta\lambda = \lambda\,\delta t, \qquad \delta\mu = \mu\,\delta t, \qquad \delta\nu = \nu\,\delta t$$

einzuführen haben; dieselben nehmen dadurch die Form an:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \mu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \nu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{60}$$

Man erkennt bei der Vergleichung von (59') mit (60) den Satz:

Eine gegebene Flüssigkeitsbewegung besitzt ein Geschwindigkeitspotential nur soweit und solange, als in derselben keine Rotationen oder nach dem gebräuchlichen technischen Ausdruck keine Wirbel stattfinden.

Wir werden im nächsten Abschnitt nachweisen, dass, wenn eine Flüssigkeit, welche unter der Wirkung von Kräften steht, die ein Potential haben, zu irgend einer Zeit nirgends Wirbelbewegungen enthält, sie auch nie dergleichen annimmt. Daraus folgt dann auch, dass, wenn eine solche Flüssigkeit zu irgend einer Zeit nicht rotirt, ihre Bewegung zu aller Zeit ein Geschwindigkeitspotential besitzt. Dies gilt ebenso gut für die ganze Ausdehnung einer Flüssigkeit, als für einen Theil derselben; in der That werden wir uns weiter unten mit solchen Potentialbewegungen beschäftigen, welche in einem Theil einer Flüssigkeit bestehen in Folge von Wirbeln, welche den andern erfüllen.

Dabei ist zu betonen, dass ein Wirbel nicht identisch ist mit dem, was man gewöhnlich unter Rotation versteht, und demgemäss keineswegs jede Bewegung, bei welcher alle Theilchen einer Flüssigkeit Kreisbahnen um dieselbe Axe beschreiben, eine Wirbelbewegung ist; das Characteristische für letztere liegt, wie die Formeln (60) zeigen, überhaupt nicht in den absoluten Geschwindigkeitswerthen, sondern in dem Gesetz, das deren Aenderung mit dem Ort und demgemäss die Deformation des einzelnen Volumenelementes befolgt.

In der That ergiebt sich aus dem Ansatz

$$\varphi = q \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{61}$$

nach (57′)

$$u = \frac{-qy}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{+qx}{x^2+y^2}, \qquad w = 0, \tag{61′}$$

und diese Componenten stellen eine Bewegung dar, welche mit der Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{u^2+v^2} = \frac{q}{x^2+y^2} \tag{61″}$$

an allen Stellen senkrecht zu dem Radiusvector nach der Z-Axe stattfindet, die Theilchen also in Kreisen um dieselbe herumführt. Da die Geschwindigkeit in der Z-Axe unendlich gross wird, kann diese nicht innerhalb der Flüssigkeit liegen; die letztere könnte aber, durch einen Kreiscylinder um die Z-Axe begrenzt, sehr wohl eine diesem Potential entsprechende Potentialbewegung annehmen.

Umgekehrt werden wir weiter unten Bewegungen kennen lernen, bei welchen alle Theilchen in parallelen Geraden fortschreiten und welche trotzdem Wirbel enthalten.

Der obige specielle Werth von φ giebt Anlass zu einer Bemerkung, die sofort einleuchtet, wenn man sich daran erinnert, dass die Bewegung immer in der Richtung wachsender Potentialwerthe stattfindet:

Eine Potentialbewegung, bei welcher die Flüssigkeitstheilchen geschlossene Bahnen beschreiben, erfordert ein mehrwerthiges Geschwindigkeitspotential.

Wir schliessen solche Potentiale im Folgenden zunächst aus.

II. Um die Schwierigkeiten zu vermeiden, welche die Behandlung der Grenzbedingungen mit sich bringt, betrachten wir zunächst eine nach allen Richtungen sich in's Unendliche erstreckende Flüssigkeit und wollen dieselbe vorerst von unveränderlicher Dichtigkeit annehmen. Die Gleichung (58′), welche jetzt die einzige für φ geltende Bedingung ist, erhält wegen $d\varepsilon/dt = 0$ die Form:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{62}$$

wofür wir kurz schreiben:

$$\Delta\varphi = 0;$$

jede ihrer Lösungen giebt innerhalb eines Bereiches, in welchem sie stetig und endlich ist, eine mögliche Flüssigkeitsbewegung; Punkte, in welchen sie unendlich wird, sind durch passend gewählte Oberflächen auszuschliessen, welche, soweit sie nicht Eintritts- oder Austrittsflächen für die Flüssigkeit geben, als deren Begrenzungen zu dienen haben und demgemäss von Stromlinien erfüllt sein müssen.

Aus jeder Lösung der Gleichung (62) kann man, da deren Differentialquotienten sowohl als jede in ihnen lineäre Function die Gleichung gleichfalls erfüllen, unendlich viele weitere bilden.

Unter diesen Lösungen sind die anschaulichsten und einfachsten diejenigen, welche nur von zwei Coordinaten abhängen, für welche also die Potentialflächen Rotations- oder Cylinderflächen, die Stromlinien also ebene Curven sind.

Wichtige Geschwindigkeitspotentiale der ersten Art erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass, wie leicht durch die Rechnung zu erweisen, das Newton'sche Potential eines oder mehrerer, ruhenden oder bewegten Massenpunkte eine Function ist, welche der Hauptgleichung (62) genügt, und dass deshalb Gleiches von dessen Differentialquotienten gilt.

Nehmen wir demgemäss in beliebigen Punkten x_h, y_h, z_h willkürliche Massen m_h an und setzen, da es sich nur um Bildung einer der Gleichung (62) genügenden Function handelt, die Constante f des Newton'schen Gesetzes gleich Eins, so erhalten wir als einen sehr allgemeinen Ansatz für das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = -\sum_h \frac{m_h}{r_h}, \tag{62'}$$

worin

$$r_h^2 = (x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2$$

ist. Die Richtung von r_h rechnen wir, wo dieselbe in Betracht kommt, von dem supponirten Massenpunkt m_h hinweg.

Je nach dem Vorzeichen von m_h wird φ an den Stellen x_h, y_h, z_h gleich $\pm\infty$; wir müssen also, da φ innerhalb der Flüssigkeit stetig sein muss, diese Punkte irgendwie, etwa durch unendlich kleine um einen jeden von ihnen gelegte Oberflächen o_h, z. B. Kugeln, aus dem Bereich, für welches wir φ in der Bedeutung eines Geschwindigkeitspotentiales anwenden, ausschliessen.

Da längs der Normalen n_h auf denselben φ bei den einen überall wächst, bei den andern abnimmt, so findet eine Strömung durch diese Flächen statt; jene sind also resp. Eintritts- oder Austrittsflächen. Wir müssen uns daher die Vorstellung bilden, dass innerhalb der ersteren dauernd Flüssigkeit zugeführt oder erzeugt, innerhalb der letzteren dauernd abgeführt oder vernichtet wird — eine Vorstellung, mit welcher wir, obgleich sie in dieser Form practisch nicht realisirbar ist, doch vortheilhaft rechnen können.

Punkte, in der beschriebenen Weise von unendlich kleinen Flächen umschlossen, von denen aus Flüssigkeit in den Raum eintritt, nennen wir Quellen oder Quellpunkte, Punkte, nach welchen hin Flüssigkeit austritt, Senken oder Senkpunkte.

Das während der Zeit Eins durch eine dieser unendlich kleinen Oberflächen, z. B. o_k, in den Raum einströmende Flüssigkeitsvolumen nennen wir die Ergiebigkeit des umschlossenen Punktes m_k und bezeichnen sie mit M_k.

Um sie zu berechnen benutzen wir, dass die Geschwindigkeit in der Richtung der äussern Normalen n_k auf der Oberfläche o_k gleich $\partial\varphi/\partial n_k$, und dass demgemäss das ganze aus der Oberfläche o_k austretende Volumen M_k gegeben ist durch

$$M_k = \int\limits_{(o_k)} \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} \, d o_k. \tag{63}$$

Setzt man hier den Werth von φ ein, so findet sich:

$$M_k = -\sum_h m_h \int\limits_{(o_k)} \frac{\partial \frac{1}{r_h}}{\partial n_k} \, d o_k. \tag{63'}$$

Aus dieser Summe, welche über alle Massenpunkte m_h zu nehmen ist, sondern wir das Glied aus, welches sich auf den Punkt m_k bezieht, und schreiben

$$M_k = -m_k \int\limits_{(o_k)} \frac{\partial \frac{1}{r_k}}{\partial n_k} \, d o_k - \sum_h m_h \int\limits_{(o_k)} \frac{\partial \frac{1}{r_h}}{\partial n_k} \, d o_k,$$

wo nun die Summe über alle h, mit Ausnahme von $h = k$, zu erstrecken ist.

Diese Summe lässt sich nach dem Hülfssatz (22') umformen, da innerhalb des von o_k umschlossenen Raumes keines der r_h zu Null wird, und giebt in Rücksicht auf $\varDelta(1/r) = 0$ selbst Null. Die letzte Gleichung lässt sich nun schreiben

$$M_k = +m_k \int\limits_{(o_k)} \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial r_k}{\partial n_k} \, d o_k$$

oder wegen der geometrischen Bedeutung von $\partial r_k/\partial n_k$ auch

$$M_k = +m_k \int\limits_{(o_k)} \frac{\cos(n_k, r_k)}{r_k^2} \, d o_k.$$

Hierin ist aber der Ausdruck unter dem Integral nach der p. 262 gegebenen Definition nichts anderes als die Oeffnung $d\omega_k$ des vom Punkte m_k nach do_k gezogenen Elementarkegels, und die Integration über die ganze geschlossene Oberfläche giebt demnach die Grösse der Ergiebigkeit

$$M_k = 4\pi m_k; \tag{63''}$$

positive m_k entsprechen also den Quellen, negative den Senken, wie dies auch direct einzusehen ist.

Liegt ein System von Quellen und Senken auf der Z-Axe in den resp. Abständen z_h vom Coordinatenanfang, so ist

$$\varphi = -\sum_h \frac{m_h}{r_h}, \quad \text{und} \quad r_h^2 = (z - z_h)^2 + e^2,$$

falls e den senkrechten Abstand des betrachteten Punktes von der Z-Axe bezeichnet, also $e^2 = x^2 + y^2$ ist.

Hieraus folgt:

$$u = \sum_h \frac{m_h x}{r_h^3}, \quad v = \sum_h \frac{m_h y}{r_h^3}, \quad w = \sum_h \frac{m_h (z - z_h)}{r_h^3}, \tag{64}$$

und wenn man die Geschwindigkeit parallel mit e durch s bezeichnet:

$$s = \sum_h \frac{m_h e}{r_h^3}.$$

Die Potentialflächen sind Rotationsflächen und daher die Stromlinien ebene Curven. Ihre Differentialgleichung ist:

$$dz : de = \sum_h \frac{m_h (z - z_h)}{r_h^3} : \sum_h \frac{m_h e}{r_h^3}, \tag{64'}$$

oder anders geschrieben

$$\sum_h m_h \frac{e\,dz - (z - z_h)\,de}{r_h^3} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit e, so erhält man auch

$$\sum_h \frac{m_h d\left(\frac{z - z_h}{e}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z - z_h}{e}\right)^2}^3} = 0$$

und hieraus durch Integration als die Gleichung der Stromcurven:

$$\sigma = \sum_h \frac{m_h (z - z_h)}{\sqrt{e^2 + (z - z_h)^2}} = c', \tag{64''}$$

worin σ kurz den Werth der Summe bezeichnet.

Führt man den Winkel ϑ_h zwischen dem Radiusvector r_h und der positiven Z-Axe ein, so schreibt sich die letzte Gleichung:

$$\sigma = \sum_h m_h \cos \vartheta_h = c'. \tag{64'''}$$

Ein besonders wichtiger Fall ist der, dass zwei Quellpunkte $\pm m$ von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit einander unendlich nahe liegen und, wie wir sagen, ein Quellpaar oder einen Doppelpunkt bilden. Ihren Abstand a, positiv von der Senke zur Quelle gerechnet, bezeichnen wir als die Axe des Paares.

Für Punkte in endlicher Entfernung hat das von einem solchen Paar herrührende Geschwindigkeitspotential den Werth

$$\varphi' = -ma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{Ma}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}, \tag{65}$$

worin

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

ist und x', y', z' die Coordinaten des Paares bezeichnen.

Der Differentialquotient nach der Richtung der Axe a ist ebenso zu verstehen, wie p. 349 der nach der Richtung der Normalen n_k; ist die Richtung der Axe einer Coordinatenaxe parallel, so tritt an seine Stelle der Differentialquotient nach der bezüglichen Coordinate des Quellpaares, oder aber, da die x', y', z' nur in der Verbindung $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$ in r vorkommen, der negative Differentialquotient nach der bezüglichen Coordinate des Punktes, auf welchen das Geschwindigkeitspotential sich bezieht.

Demnach sind die negativen ersten Differentialquotienten des Newton'schen Potentiales nach den Coordinaten als die Geschwindigkeitspotentiale von Quellpaaren gedeutet, deren Axen den betreffenden Coordinatenaxen parallel liegen.

Analog lassen sich die höheren Differentialquotienten als die complicirteren Verbindungen von Quellen und Senken entsprechenden Potentiale betrachten.

Liegt das Quellpaar auf der Z-Axe, mit seiner Axe dieser Richtung parallel, und setzt man wieder $x^2 + y^2 = e^2$, so wird $r^2 = (z-z')^2 + e^2$ und

$$\varphi' = +ma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{ma(z-z')}{r^3} = -\frac{ma}{r^2}\cos\vartheta; \tag{65'}$$

der ihm entsprechende Antheil σ' der Summe in der Gleichung (64''') der Stromcurven berechnet sich ebenso zu

$$\sigma' = ma\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial a} = -ma\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial z} = -\frac{ma\,e^2}{r^3} = -\frac{ma}{r}\sin^2\vartheta, \tag{65''}$$

und giebt, für sich allein gleich c' gesetzt, die Gleichung der einem Quellpaar entsprechenden Stromcurven.

Ein noch einfacherer Fall ist der zweier Quellpunkte von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit in unendlicher Entfernung, oder der eines Quellpaares von unendlicher Axe. Wir wollen hierfür die Buchstaben m' resp. M' und a' anwenden und erhalten unter der Voraussetzung, dass a' in die $+Z$-Axe fällt, durch eine einfache Rechnung für das Geschwindigkeitspotential, welches diesem Paar entspricht:

$$\varphi'' = -\frac{8m'z}{a'^2}, \tag{66}$$

hingegen für den betreffenden Antheil σ'' an der Summe in (64'''):

$$\sigma'' = -2m'\left(1 - \frac{2e^2}{a'^2}\right). \tag{66'}$$

Sind beide Paare zusammen vorhanden, das erstere im Coordinatenanfang, also $z' = 0$, so entspricht ihnen als Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = -z\left(\frac{ma}{r^3} + \frac{8m'}{a'^2}\right), \tag{67}$$

und, wenn man $2m'$ in die Constante c' hineinzieht,

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = +e^2\left(\frac{4m'}{a'^2} - \frac{am}{r^3}\right) = c' \tag{67'}$$

als Gleichung der zugehörigen Stromcurven.

Setzt man

$$\frac{maa'^2}{4m'} = R^3, \tag{67''}$$

und führt eine neue Constante C' ein, so erhält man aus (67'):

$$e^2\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = C'. \tag{67'''}$$

Diese Formel zeigt, dass unter dem System der Stromcurven, die man durch wechselnde Werthe von C' erhält, eine Schaar, nämlich die $C' = 0$ entsprechende, zusammengesetzt ist aus der Z-Axe und dem Kreis vom Radius R um den Coordinatenanfang. Da nun die Stromcurven rings um die Z-Axe gleichmässig verlaufen, so erfüllt diese Schaar eine Kugeloberfläche, welche, wie jede von Stromlinien gebildete Fläche, auch als Begrenzung der Flüssigkeit gewählt, nämlich durch eine starre Wand ersetzt werden kann, ohne die Strömung zu beeinflussen.

Die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten folgen aus (67)

$$u = \frac{3maxz}{r^5}, \quad v = \frac{3mayz}{r^5}, \quad w = \frac{ma}{r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right) - \frac{8m'}{a'^2} \tag{68}$$

und ergeben für $r = \infty$:

$$u_\infty = 0, \quad v_\infty = 0, \quad w_\infty = -\frac{8m'}{a'^2}; \tag{68'}$$

die Flüssigkeit bewegt sich also in unendlicher Entfernung vom Coordinatenanfang und der begrenzenden Kugel mit der Geschwindigkeit $-8m'/a'^2$ parallel der Z-Axe.

Die Werthe von R und w_∞ kann man benutzen, um m, m', a, a' aus den Formeln zu entfernen; man erhält dann:

$$\begin{gathered}\varphi = w_\infty z\left(\frac{R^3}{2r^3} + 1\right),\\ u = -\frac{3w_\infty R^3 xz}{2r^5}, \quad v = -\frac{3w_\infty R^3 yz}{2r^5}, \quad w = +w_\infty\left(\frac{R^3}{2r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) + 1\right).\end{gathered} \tag{68''}$$

Die vorstehenden Ausdrücke geben für $r > R$ den Einfluss an, den eine mit ihrem Centrum im Coordinatenanfang ruhende Kugel auf einen parallel der Z-Axe mit der Geschwindigkeit w_∞ fliessenden Strom von sehr grossem Querschnitt ausübt.

Hierbei ist noch besonders hervorzuheben, dass, weil die Hauptgleichung (62) nur die Differentialquotienten von φ nach den Coordinaten enthält, die Constanten der Lösungen, in unserem Falle also die Coordinaten und Ergiebigkeiten der Quellen und Senken, beliebige Functionen der Zeit sein können. Jede Aenderung äussert ihre Wirkung augenblicklich auf alle Theile der unendlichen Flüssigkeit; dies ist eine Folge der angenommenen Incompressibilität.

Ertheilen wir dem ganzen System eine positive Geschwindigkeit

$$\Omega = -w_\infty,$$

so wird dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe gebracht, aber die Quellen und Senken und daher auch die um das im Endlichen liegende Paar construirte Kugel werden die Geschwindigkeit w_k erhalten.

In diesem Falle ist:

$$u = +\frac{3\Omega R^3 xz}{2r^5}, \quad v = +\frac{3\Omega R^3 yz}{2r^5}, \quad w = -\frac{\Omega R^3}{2r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right); \tag{69}$$

ihnen entspricht ein Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = -\frac{\Omega R^3 z}{2r^3}.$$

r bezeichnet hierin die Entfernung von dem mit der Geschwindigkeit $+\Omega$ auf der Z-Axe fortschreitenden Kugelcentrum, z die auf dasselbe bezogene Z-Coordinate; das Geschwindigkeitspotential ist also nach (65′) identisch mit demjenigen, welches von dem mit der Geschwindigkeit Ω fortschreitendem Quellpaar herrührt.

Man überzeugt sich direct davon, dass eine mit der Geschwindigkeit Ω fortschreitende starre Kugel die Grenze dieser Flüssigkeitsbewegung sein kann, indem man die Gleichung (58″) für die feste Wand benutzt. Dieselbe wird hier, da $u_k = v_k = 0$, $w_k = \Omega$ ist:

$$\Omega \cos(r, z) = u \cos(r, x) + v \cos(r, y) + w \cos(r, z),$$

oder, da

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}, \quad \cos(r, y) = \frac{y}{r}, \quad \cos(r, z) = \frac{z}{r}$$

ist,

$$\frac{\Omega z}{r} = \frac{\Omega R^3 z}{r^4};$$

für $r = R$ werden die beiden Seiten in der That identisch.

Ein mit der Geschwindigkeit Ω in der Richtung seiner Axe a geradlinig bewegtes Quellpaar von der Ergiebigkeit M bewirkt in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit eine Bewegung, die sich durch eine um das Paar construirte starre Kugel vom Radius

$$R = \frac{Ma}{2\pi\Omega} \tag{69'}$$

begrenzen lässt, also auch die Strömung darstellt, welche in der Flüssigkeit durch die mit der Geschwindigkeit Ω geradlinig fortschreitende Kugel erregt wird.

III. Zur Bestimmung des Druckes in der Flüssigkeit dient die Gleichung (58), welche lautete:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \Pi = T;$$

darin war Φ das Potential der äussern Kräfte, ferner war

$$\Pi = \int \frac{dp}{\varepsilon}$$

gesetzt und es bezeichnete T die statt einer Integrationsconstanten auftretende willkürliche Function von t.

Nehmen wir an, dass die Dichte constant ist und äussere Kräfte nicht wirksam sind, so ergiebt sie:

$$p = \varepsilon\left(T - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{V^2}{2}\right); \tag{70}$$

ist überdies die Strömung stationär, also φ von der Zeit unabhängig, so findet sich, da nun T zur Integrationsconstanten C wird:

$$p = C - \frac{\varepsilon V^2}{2};$$

der Druck wird also um so grösser, je kleiner die Geschwindigkeit ist. Die Constante C findet sich dadurch, dass, um das Problem vollständig zu bestimmen, für irgend eine Stelle der Druck gegeben sein muss; sind die sich daselbst entsprechenden Werthe p_0 und V_0, so folgt:

$$p - p_0 = \frac{\varepsilon}{2}(V_0^2 - V^2). \tag{70'}$$

Befindet sich ein starrer Körper in der Flüssigkeit, so erfährt derselbe von ihr Drucke, deren Componenten parallel der Z-Axe die Summe geben

$$Z = \int p \cos(n, z)\, do, \tag{70''}$$

worin die Normale n in das Innere des Körpers hinein positiv gerechnet ist.

In unserem Falle einer in der Flüssigkeit befindlichen Kugel fällt die negative Normale mit dem Radiusvector zusammen; es wird

also, wenn man dessen Winkel mit der Z-Axe wiederum ϑ nennt, $\cos(n, z) = -\cos\vartheta$ und $do = R^2 d\psi \sin\vartheta\, d\vartheta$ setzt, nach (70):

$$Z = -2\pi R^2 \int_0^\pi \left(C - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon \overline{V}^2}{2}\right) \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta. \qquad (70''')$$

Da die Geschwindigkeit $\overline{V}$ an zwei den Winkeln ϑ und $\pi - \vartheta$ entsprechenden Oberflächenelementen gleiche Grösse, $\cos\vartheta \sin\vartheta$ aber gleiche und entgegengesetzte Werthe besitzt, so ist der Werth dieses Integrales für den stationären Zustand, d. h. für $\partial\varphi/\partial t = 0$, gleich Null.

Eine ruhende Kugel erfährt von einem mit constanter Geschwindigkeit fliessenden Strome einer idealen Flüssigkeit Druckkräfte, deren Componenten nach der Bewegungsrichtung die Summe Null ergeben.

Dasselbe gilt begreiflicher Weise, wenn die Kugel sich gleichförmig bewegt und die Flüssigkeit im Unendlichen ruht; das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = -\frac{\Omega R^3 z}{2 r^3}$$

enthält hier zwar die Zeit, denn z und r sind gegen ein bewegtes Coordinatensystem gerechnet und es ist daher

$$z = z_1 - \Omega t, \qquad r^2 = e^2 + (z_1 - \Omega t)^2,$$

worin z_1 sich auf einen festen Anfangspunkt bezieht; aber

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\Omega R^3}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\frac{dz}{dt}$$

ist eine gerade Function von ϑ und giebt, in das Integral (70''') eingesetzt, abermals den Werth Null.

Anderes gilt, wenn die Geschwindigkeit Ω mit der Zeit variirt, denn dann kommt zu dem obigen Werth von $\partial\varphi/\partial t$ noch das Glied

$$-\frac{R^3 z}{2 r^3}\frac{d\Omega}{dt},$$

welches nach Einführung in das obige Integral (70''')

$$Z = -\frac{2\pi\varepsilon}{3} R^3 \frac{d\Omega}{dt} \qquad (71)$$

ergiebt.

Beachtet man, dass

$$\frac{4\pi\varepsilon}{3} R^3 = M,$$

gleich der Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit ist, so erhält man den Satz:

Eine unendliche und im Unendlichen ruhende ideale Flüssigkeit, welche keinen Kräften unterliegt, übt auf eine

geradlinig bewegte Kugel Druckkräfte aus, deren Componentensumme nach der Bewegungsrichtung gleich dem Product aus der halben Masse der verdrängten Flüssigkeit in die Beschleunigung der Kugel ist und der Bewegung entgegenwirkt.

Die übrigen Componenten und die Drehungsmomente sind nach der Symmetrie nothwendig gleich Null.

Wirken Kräfte auf die Flüssigkeit, so addirt sich der von ihnen herrührende hydrostatische Druck zu der Einwirkung der Strömung.

Da wir sonach die Einwirkung der Flüssigkeit auf die Kugel kennen, so können wir auch ihre Bewegung unter der Wirkung einer beliebigen Kraft bestimmen; sie ist nämlich dieselbe, als befände sich die Kugel im leeren Raume und wäre ihre träge Masse um die Hälfte der verdrängten Flüssigkeit und die wirkenden Kräfte um den hydrostatischen Druck vermehrt.

Wirkt z. B. auf die Kugel von der Dichte ε_k und die Flüssigkeit von der Dichte ε die Schwere, so findet die verticale Bewegung der ersteren nach dem Gesetz statt

$$\left(\varepsilon_k + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{d\Omega}{dt} = -(\varepsilon_k - \varepsilon)g.$$

Eine von der Geschwindigkeit abhängige Widerstandskraft findet die Kugel in einer idealen Flüssigkeit nicht. Zu einer solchen führt erst die Berücksichtigung der innern Reibung, die wir bisher ausdrücklich vernachlässigt haben.

IV. Dem vorstehenden Problem, bei welchem die Potentialflächen Rotationsflächen waren, entspricht in allen seinen Theilen ein anderes, bei welchem die Potentialflächen Cylinderflächen sind und das wir der grossen Aehnlichkeit wegen nur kurz andeuten wollen.

Ist eine ideale incompressible Flüssigkeit zwischen zwei sehr nahen unendlich grossen ebenen Platten enthalten, die parallel der XY-Ebene liegen mögen, so findet eine Bewegung parallel der Z-Axe im Allgemeinen nicht statt, φ ist also nur eine Function von x und y; die Hauptgleichung, welche es erfüllen muss, lautet dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{72}$$

was wir hier und später abkürzen in $\Delta' \varphi = 0$.

Dieser Gleichung genügt eine Function, die in der Ebene ganz dieselbe Stelle einnimmt, wie das Newton'sche Potential im Raume, nämlich das sogenannte Logarithmische Potential

$$\varphi = +\sum_h m_h l(e_h), \tag{72'}$$

worin m_h eine im Punkte x_h, y_h angebrachte Masse bezeichnet und, wie früher, auch weiterhin

$$e_h^2 = (x - x_h)^2 + (y - y_h)^2$$

ist; e_h rechnen wir positiv von der Stelle x_h, y_h nach x, y hin. Je nach dem Vorzeichen von m_h wird φ an den Stellen x_h, y_h gleich $\pm\infty$, was andeutet, dass dort entweder Quellen oder Senken anzunehmen sind; diese kann man in unserem Falle leicht practisch herstellen, indem man in der einen, die Flüssigkeit begrenzenden Platte, Bohrungen anbringt, durch welche der Zu- oder Abfluss geschieht. Natürlich muss man dann die diesen Stellen unmittelbar benachbarten von der Betrachtung ausschliessen, da in ihnen die Bewegung nicht, wie oben angenommen, parallel der XY-Ebene geschieht; man kann etwa die Senken oder Quellen m_k durch unendlich kleine Curven s_k umgeben und durch diese die Strömung bestimmter Volumina, den Ergiebigkeiten M_k gleich, stattfindend denken.

Nach dem p. 349 angewandten Verfahren findet sich hier für die, wie früher, durch

$$M_k = \int\limits_{(s_k)} \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} ds_k \tag{72''}$$

definirte Ergiebigkeit der Werth:

$$M_k = 2\pi m_k. \tag{72'''}$$

Um die Stromcurven zu bestimmen ist die Gleichung

$$dx : dy = \sum_h m_h \frac{x - x_h}{r_h^2} : \sum_h m_h \frac{y - y_h}{r_h^2} \tag{73}$$

zu integriren. Dieselbe lässt sich schreiben:

$$\sum_h m_h \frac{(x - x_h)\,dy - (y - y_h)\,dx}{(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2} = 0,$$

was identisch ist mit

$$\sum_h m_h \frac{d\left(\dfrac{y - y_h}{x - x_h}\right)}{1 + \left(\dfrac{y - y_h}{x - x_h}\right)^2} = 0. \tag{73'}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\sigma = \sum_h m_h \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_h}{x - x_h}\right) = c', \tag{73''}$$

wo die Reihe kurz gleich σ gesetzt ist; dies lässt sich auch schreiben:

$$\sigma = \sum_h m_h \vartheta_h = c', \tag{73'''}$$

falls ϑ_h den Winkel zwischen e_h und der X-Axe bezeichnet.

Für ein Quellpaar $\pm m$, dessen unendlich kleiner Abstand, positiv gerechnet von der Senke $(-m)$ zur Quelle $(+m)$, wieder gleich a sein

möge, wird das Geschwindigkeitspotential, wenn e den Abstand von dem Paar bezeichnet,

$$\varphi' = m a \frac{\partial l(e)}{\partial a} = \frac{M a}{2\pi} \frac{\partial l(e)}{\partial a}; \tag{74}$$

in dem Falle, dass a in die $+X$-Richtung fällt und

$$e^2 = (x - x')^2 + y^2$$

ist, unter x' die X-Coordinate des Paares verstanden, schreibt sich dies in der oben benutzten Bezeichnung gemäss der Formel (65'):

$$\varphi' = -m a \frac{\partial l(e)}{\partial x} = -\frac{m a (x - x')}{r^2} = -\frac{m a}{r} \cos \vartheta. \tag{74'}$$

Der hiervon herrührende Antheil der Summe σ in der Gleichung (73''') lautet, entsprechend (65''):

$$\sigma' = -m a \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = +\frac{m a y}{r^2} = +\frac{m a}{r} \sin \vartheta. \tag{74''}$$

Haben wir ein Quellenpaar $\pm m'$ mit unendlicher Axe a', so wird, wenn die $+X$-Richtung mit der Axe zusammenfällt, das ihm entsprechende Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi'' = -\frac{4 m' x}{a'}, \tag{75}$$

der Antheil an der Summe σ:

$$\sigma'' = +m' \left(\pi - \frac{2y}{a'}\right). \tag{75'}$$

Sind beide Paare zusammen vorhanden, das erstere im Coordinatenanfang, also $x' = 0$, so entspricht dem ein Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = -x \left(\frac{m a}{r^2} + \frac{4 m'}{a}\right), \tag{76}$$

während die Gleichung der Stromcurven lautet:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = +y \left(\frac{m a}{r^2} - \frac{2 m'}{a'}\right) = c', \tag{76'}$$

wo in c' die Constante $m'\pi$ hineingezogen ist.

Setzt man

$$\frac{m a a'}{2 m'} = R^2 \tag{76''}$$

und führt eine neue Constante C' ein, so erhält man aus (76'):

$$y \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = C'. \tag{76'''}$$

Die Discussion dieser mit (67''') sehr ähnlichen Formel zeigt, dass die $C' = 0$ entsprechende Stromcurve aus der X-Axe und einem Kreis vom Radius R um den Coordinatenanfang besteht, dass man also die Flüssigkeitsbewegung durch eine feste Kreislinie begrenzen kann.

Aus dem Geschwindigkeitspotential (76) folgen die Geschwindigkeitscomponenten

$$u = \frac{m\,a}{r^2}\left(\frac{2x^2}{r^2} - 1\right) - \frac{4m'}{a'}, \qquad v = \frac{2\,m\,a\,x\,y}{r^4}; \tag{77}$$

in unendlicher Entfernung r wird also $v_\infty = 0$, $u_\infty = -4m'/a'$, sodass sich auch schreiben lässt:

$$\varphi = x u_\infty \left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right). \tag{77'}$$

Man erkennt daher leicht Folgendes.

Die im Vorstehenden untersuchte Flüssigkeitsbewegung lässt sich dahin deuten, dass sie den Einfluss angiebt, welchen ein mit seiner Axe in der Z-Axe liegender starrer Kreiscylinder auf einen parallel der X-Axe fliessenden Strom von sehr grossem Querschnitt ausübt.

Demgemäss kann man auch das ganze System von Folgerungen aus den erhaltenen Formeln ziehen, welches oben aus den entsprechenden für eine Kugel in einem Flüssigkeitsstrome gewonnen ist.

§ 31. Mechanik idealer Flüssigkeiten; Ausfluss aus einem Reservoir; Reaction und Stoss eines Strahles.

Nur eine kleine Zahl von Problemen der Hydrodynamik gestattet die vollständige und strenge Lösung in der im Vorstehenden entwickelten Weise, und hierunter wiederum nur der kleinste Theil mit elementaren Hülfsmitteln; alle diese haben aber so gut wie keine experimentelle Bedeutung. Für die Zwecke der Beobachtung begnügt man sich zumeist mit unvollständigen Auflösungen oder gewissen Regeln, die aus der Gleichung (58)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \Pi = T \tag{78}$$

abzuleiten sind. Diese Formel setzt voraus, dass die Flüssigkeit als eine ideale betrachtet, also die innere Reibung vernachlässigt werden könne und die Bewegung eine Potentialbewegung, also eine von Wirbeln freie sei.

I. Wenden wir sie auf die stationäre Strömung einer Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte an, so lautet sie:

$$\frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\varepsilon} = c.$$

Wirkt von äussern Kräften nur die Schwerkraft parallel der positiven Z-Axe, so nimmt dies die Form an:

$$\frac{V^2}{2} - gz + \frac{p}{\varepsilon} = c. \tag{78'}$$

Nun sei ein Gefäss mit Flüssigkeit gegeben, aus welchem letztere durch eine Oeffnung in der Wand ausfliesst, deren Dimensionen wir als verschwindend gegen die Dimensionen des Gefässes ansehen. Wird der Stand der Flüssigkeit in dem Gefäss constant gehalten, so ist der stationäre Zustand als streng, sinkt er nur langsam, so ist er als angenähert erreicht anzusehen. In der freien Oberfläche, von der aus wir z rechnen wollen, sei der Druck p_0 und die Geschwindigkeit nahezu constant; dann nimmt für eine beliebige Stelle in der Tiefe z unter dem Niveau die letzte Formel die Gestalt an:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} - gz + \frac{p - p_0}{\varepsilon} = 0; \tag{78''}$$

daraus folgt für eine Stelle der freien Oberfläche des austretenden Strahles in der Tiefe z_1, auf welche der äussere Druck p_1 wirken und in der die Geschwindigkeit V_1 stattfinden mag:

$$V_1^2 - V_0^2 = 2gz_1 + \frac{2}{\varepsilon}(p_0 - p_1). \tag{78'''}$$

Wäre im Querschnitt q_1 der Ausflussöffnung der Druck constant gleich p_1, so müssten auch alle Theilchen mit gleicher Geschwindigkeit V_1 austreten; die Beobachtung zeigt aber, dass dies nicht der Fall sein kann. Unmittelbar vor der Oeffnung verjüngt sich nämlich der Strahl innerhalb eines Weges, der bei kreisrunden Oeffnungen nur etwa ihrem Radius gleich ist, in sehr auffälliger Weise um nahe drei Zehntel seines Querschnittes, und man erkennt leicht, dass dies nicht möglich wäre, wenn alle austretenden Theile gleiche Geschwindigkeit hätten.

Construirt man nämlich in der Oeffnung q_1 eine alle Stromlinien normal schneidende Oberfläche und nennt ihre Grösse o_1, eine zweite im contrahirten Querschnitt q' von der Grösse o' und nimmt in beiden constante Geschwindigkeiten V_1 und V' an, so sind die in der Zeiteinheit durch sie strömenden Volumina $o_1 V_1$ und $o' V'$ nothwendig einander gleich. Zugleich ist aber die Geschwindigkeit in der Oberfläche des Strahles, des dort stattfindenden constanten äussern Druckes p_1 wegen, jedenfalls für beide Querschnitte gleich. Also kann V und demnach auch p auf o_1 nicht constant sein. Es zeigt sich aber, dass, wenn man den Strahl horizontal aus dem Gefäss austreten lässt, von der oben als contrahirt bezeichneten Stelle an sein Querschnitt sich zunächst nicht weiter ändert, und man schliesst daraus, dass dort die Geschwindigkeit und also auch der Druck über den ganzen Querschnitt hinweg einen nahe constanten Werth und die Stromlinien parallele Richtungen besitzen werden.

Man wendet daher auf jede Stelle des contrahirten Querschnittes q' die Formel (78‴)

$$V_1^2 - V_0^2 = 2gz_1 - \frac{2}{\varepsilon}(p_1 - p_0)$$

an und setzt die in der Zeiteinheit ausfliessende Menge

$$M = \varepsilon q' V_1.$$

Da diese Menge M bei stationärem Zustand in der Zeiteinheit auch durch den Querschnitt q_0 innerhalb des Gefässes gehen muss, in welchem die Geschwindigkeit V_0 nahe constant ist, so gilt die Beziehung

$$V_1 q' = V_0 q_0,$$

und man erhält dadurch schliesslich:

$$V_1^2 = \frac{2gz_1 - \frac{2}{\varepsilon}(p_1 - p_0)}{1 - \frac{q'^2}{q_0^2}}. \tag{79}$$

Ist der Druck in der Oberfläche des Strahles derselbe, wie der in der freien Oberfläche im Gefäss, also $p_1 = p_0$, und ist q' so klein neben q_0, dass man $(q'/q_0)^2$ neben Eins vernachlässigen kann, so resultirt

$$V_1^2 = 2gz_1, \tag{79'}$$

was, verglichen mit der letzten Formel (35) des ersten Theiles, den von Torricelli herrührenden Satz ausspricht:

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Theilchen einer Flüssigkeit, die ausschliesslich unter der Wirkung der Schwerkraft steht, durch eine kleine Oeffnung aus einem Behälter austreten, ist dieselbe, die sie beim freien Fall von der Höhe des Niveaus bis in diejenige der Oeffnung erlangen würden.

Ueberwiegt in der Formel (79) das von der Druckdifferenz herrührende Glied erheblich die Einwirkung der Schwere, so findet sich für kleines q'/q_0:

$$V_1^2 = \frac{2}{\varepsilon}(p_0 - p_1). \tag{79''}$$

Findet der Ausfluss nur unter dem Einfluss einer Differenz der innerhalb und ausserhalb des Gefässes auf die Flüssigkeit wirkenden Drucke $(p_0 - p_1)$ statt, so ist das Quadrat der Ausflussgeschwindigkeit gleich der doppelten Druckdifferenz dividirt durch die Dichte der Flüssigkeit.

Haben im Strahl die Theilchen eines jeden Querschnittes gleiche und parallele Geschwindigkeiten, so wirken sie bei der Bewegung nicht auf einander ein, sondern bewegen sich wie freie Massenpunkte,

beschreiben also je nach der Lage der Ausflussöffnung verschiedene Theile einer Parabel, deren Gestalt man benutzen kann, um aus ihrer Beobachtung die Ausflussgeschwindigkeit V_1 zu berechnen. Die Messungen haben, wenn der Ausfluss durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand geschah, eine befriedigende Uebereinstimmung mit den oben gefundenen Formeln ergeben und dadurch die Berechtigung der gemachten Vernachlässigungen erwiesen; Ansatzröhren vermindern die Ausflussgeschwindigkeit.

Wird das Niveau in dem Flüssigkeitsbehälter nicht constant erhalten, so ist seine Tiefe ζ unter einer beliebigen Anfangsposition veränderlich nach dem Gesetz, dass

$$q_0 \frac{d\zeta}{dt} = q' V_1, \tag{80}$$

also bei einziger Wirkung der Schwere nach (79)

$$q_0 \frac{d\zeta}{dt} = q' \sqrt{\frac{2g(h-\zeta)}{1 - \frac{q'^2}{q_0^2}}} \tag{80'}$$

ist. Da das obere Niveau die veränderliche Tiefe ζ, die Ausflussöffnung die constante Tiefe h unter dem Anfangsniveau hat, so ist $(h-\zeta)$ an die Stelle von z_1 getreten. In dieser Formel wird, wenn das Gefäss nicht cylindrische Gestalt hat, auch q_0 von ζ abhängen. Durch Integration erhält man die Stellung des Niveaus zu jeder Zeit.

Damit das Niveau mit constanter Geschwindigkeit Ω sinkt, muss

$$\left(1 - \left(\frac{q'}{q_0}\right)^2\right) \Omega^2 = \left(\frac{q'}{q_0}\right)^2 2g(h-\zeta),$$

also (80'')

$$q_0 = q' \sqrt{\frac{2g(h-\zeta)}{\Omega^2} + 1}$$

sein. Hieraus kann man eine Regel zur Construction einer Wasseruhr ablesen, bei der gleichen Zeiten gleiche vom Niveau zurückgelegte Wege entsprechen.

Schreibt man die Formel (78'')

$$p = p_0 + \varepsilon g z - \frac{\varepsilon}{2}(V^2 - V_0^2), \tag{81}$$

so giebt sie an, um wieviel sich der Druck während der Bewegung, der sogenannte **hydraulische Druck**, in einer beliebigen Tiefe vom **hydrostatischen**, der durch die beiden ersten Glieder angegeben wird, unterscheidet. Man sieht, dass der erstere um so mehr kleiner als der letztere ist, je mehr die Geschwindigkeit V an der betrachteten Stelle die im Niveau stattfindende V_0 übertrifft; es ist sogar möglich,

dass der hydraulische Druck kleiner als der Oberflächendruck p_0 wird. Um dies zu erkennen, führen wir ein, dass

$$Vq = V_0 q_0 = V_1 q'$$

und

$$V_1^2 = \frac{2gh - \frac{2}{\varepsilon}(p_1 - p_0)}{1 - \frac{q'^2}{q_0^2}}$$

ist; dadurch wird obige Gleichung zu:

$$p = p_0 + \varepsilon g z - \varepsilon \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{q'}{q_0}\right)^2} \left(gh - \frac{p_1 - p_0}{\varepsilon}\right). \qquad (81')$$

Wirkt nur die Schwere, ist also $p_1 = p_0$, und ist ferner sowohl q als q' sehr klein neben q_0, so wird sehr einfach

$$p = p_0 + \varepsilon g\left(z - h\left(\frac{q'}{q}\right)^2\right). \qquad (81'')$$

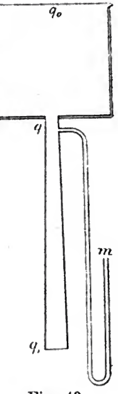


Fig. 43.

Diese Formel ist von Daniel Bernoulli aufgestellt und an Gefässen von nebenstehender Form geprüft worden; der Druck an der verengten Stelle q wurde durch das Manometer m bestimmt.

II. Ueber die Wirkungen von Flüssigkeitsstrahlen lassen sich noch aus allgemeinen mechanischen Principien einige Folgerungen ziehen, welche, ob sie gleich mit den hydrodynamischen Gleichungen nichts zu thun haben, hier angefügt werden mögen.

Wir wollen uns ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäss, aus welchem unter der Wirkung der Schwere ein Strahl in horizontaler Richtung austritt, reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene verschiebbar denken und auf dieses System die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes anwenden.

Sei M die Masse des gefüllten Gefässes und U seine horizontale, unendlich klein angenommene Geschwindigkeit, m die Masse der bereits ausgetretenen Flüssigkeit, welche die horizontale Geschwindigkeit V_1 besitzt, so muss

$$MU + mV_1$$

einen von der Zeit unabhängigen Werth haben; denn die Schwere giebt keine horizontale Componente und ein etwa vorhandener allseitig gleicher Oberflächendruck desgleichen. Es muss daher

$$M\frac{dU}{dt} + U\frac{dM}{dt} + m\frac{dV_1}{dt} + V_1\frac{dm}{dt} = 0$$

oder, wenn man U als verschwindend klein und die Ausflussgeschwindigkeit V_1 als sehr nahe constant annimmt, auch

$$M\frac{dU}{dt} + V_1\frac{dm}{dt} = 0 \tag{82}$$

sein.

Nun ist dm/dt, d. h. die in der Zeiteinheit austretende Flüssigkeitsmenge, gleich $q'\varepsilon V_1$, und MdU/dt ist die Kraft K, welche der Masse M dieselbe horizontale Beschleunigung zu ertheilen vermag, die sie in Folge der austretenden Flüssigkeit erhält; daher kann man

$$K = -q'\varepsilon V_1^2 \tag{82'}$$

auffassen als die Kraft, welche der austretende Strahl auf das gefüllte Gefäss ausübt.

Steht die Flüssigkeit in demselben nur unter der Wirkung der Schwere, so ist $V_1^2 = 2gh$, unter h die Höhe des Niveaus über der Oeffnung verstanden, es gilt demnach:

$$K = -2gh\varepsilon q'; \tag{82''}$$

steht sie nur unter der Wirkung eines Ueberdruckes $(p_0 - p_1)$, so ist $V_1^2 = 2(p_0 - p_1)/\varepsilon$ und es gilt:

$$K = -2q'(p_0 - p_1). \tag{82'''}$$

Dividirt man K durch q', so erhält man den auf die Flächeneinheit des contrahirten Querschnittes bezogenen Reactionsdruck des Strahles und kann daher den folgenden Satz aussprechen:

Der Reactionsdruck des aus einem Reservoir austretenden Strahles einer incompressibeln Flüssigkeit ist gleich dem Product aus deren Dichte in das Quadrat der Strahlgeschwindigkeit; in dem speciellen Falle, dass der Strahl nur durch die Wirkung der Schwere auf die Flüssigkeit im Reservoir getrieben wird, bestimmt sich dies näher gleich dem doppelten hydrostatischen Druck in der Oeffnung — in dem andern, dass nur ein Ueberdruck auf die Oberfläche im Reservoir treibend wirkt, gleich dem Doppelten dieses Ueberdruckes. Die Gesammtkraft, welche das Gefäss durch den Strahl erleidet, ist gleich dem Product des Reactionsdruckes in die Grösse seines contrahirten Querschnittes und hat die dem austretenden Strahl entgegengesetzte Richtung.

Durch eine ähnliche Betrachtung lässt sich auch ein Schluss über den Druck — uneigentlich Stoss genannt — ziehen, welchen ein Flüssigkeitsstrahl gegen einen starren Körper ausübt, den er trifft (Figur 44).

In einem Querschnitt a bewege sich der Strahl in allen seinen Theilen mit der gleichen Geschwindigkeit V_a, es muss also der Druck daselbst auch überall gleich dem auf die Oberfläche wirkenden sein. Weiter werde der Strahl durch die Einwirkung des starren Körpers zertheilt und verlasse ihn in eine kegelartige Fläche ausgebreitet. Haben in b alle Theile desselben Querschnittselementes wieder dieselbe Geschwindigkeit V_b, so muss hier auch der Druck im Innern wieder constant und, da derselbe dem in a herrschenden gleich ist, überdies

$$V_a = V_b$$

sein.

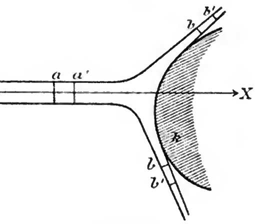


Fig. 44.

Wir wollen die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes anwenden auf das Massensystem, welches aus dem starren Körper k und der zur Zeit t zwischen a und b befindlichen Flüssigkeit besteht. Sei M' die Masse des ersteren, dm ein Massenelement der letzteren und seien U', V', W' und u, v, w die betreffenden Geschwindigkeitscomponenten und A, B, C Constanten, so lauten die hier geltenden Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes, wenn wir von der Einwirkung der Schwere absehen:

$$\begin{aligned} M'U' + \int u\,dm &= A, \\ M'V' + \int v\,dm &= B, \\ M'W' + \int w\,dm &= C. \end{aligned} \tag{83}$$

U', V', W' betrachten wir als ausserordentlich kleine Grössen.

Differentiiren wir diese Gleichungen nach der Zeit, so ist zu bedenken, dass während dt das betrachtete Flüssigkeitsvolumen sich längs des Körpers verschiebt, etwa die Position zwischen a' und b' erreicht, wo dann

$$\overline{aa'} = V_a\,dt, \qquad \overline{bb'} = V_b\,dt \qquad \text{ist.}$$

Zwischen a' und b bleibt Masse und Geschwindigkeit, da die starre Oberfläche eine nur unendlich kleine Geschwindigkeit besitzt, ungeändert; die in den Gleichungen (83) auftretenden Summen erleiden sonach nur dadurch eine Aenderung ihres Werthes, dass der sich auf die Masse zwischen bb' beziehende Term additiv, der sich auf die Masse zwischen aa' beziehende subtractiv zu dem Anfangswerth hinzuzufügen ist. Demnach giebt die Ausführung der Differentiation:

$$M'\frac{dU'}{dt} + \varepsilon\int_{(b)} Vu\,dq - \varepsilon\int_{(a)} Vu\,dq = 0,$$
$$M'\frac{dV'}{dt} + \varepsilon\int_{(b)} Vv\,dq - \varepsilon\int_{(a)} Vv\,dq = 0, \tag{83'}$$
$$M'\frac{dW'}{dt} + \varepsilon\int_{(b)} Vw\,dq - \varepsilon\int_{(a)} Vw\,dq = 0.$$

Nehmen wir an, die Strahlrichtung in a sei parallel der $+X$-Axe, die Bewegungsrichtung in dq hingegen unter Winkeln gegen die Coordinatenaxen geneigt, deren Cosinus resp. α, β, γ sind, so können wir für die Componentensummen X', Y', Z' der Drucke, welche die starre Oberfläche durch den Strahl erleidet und welche durch $M'dU'/dt$, $M'dV'/dt$, $M'dW'/dt$ gegeben sind, folgende Werthe schreiben:

$$X' = \varepsilon\int_{(a)} V^2\,dq - \varepsilon\int_{(b)} V^2\alpha\,dq,$$
$$Y' = \qquad - \varepsilon\int_{(b)} V^2\beta\,dq, \tag{83''}$$
$$Z' = \qquad - \varepsilon\int_{(b)} V^2\gamma\,dq.$$

Jedem Querschnittselement von q_a entspricht eines von q_b in der Weise, dass durch das letztere dieselben Flüssigkeitstheilchen passiren, wie durch das erstere; da überdies nach Obigem $V_a = V_b$ constant ist, so kann man vorstehende Formeln einfacher schreiben:

$$X' = \varepsilon V^2\int_{(b)}(1-\alpha)\,dq,$$
$$Y' = -\varepsilon V^2\int_{(b)}\beta\,dq, \tag{83'''}$$
$$Z' = -\varepsilon V^2\int_{(b)}\gamma\,dq.$$

Um diese Integrale auszurechnen, bedarf es noch der Kenntniss des Zusammenhanges zwischen α, β, γ und dq, der im Allgemeinen die vollständige Lösung des hydrodynamischen Problemes verlangt und demgemäss nicht angebbar ist. In dem speciellen Falle, dass die starre Oberfläche eine Rotationsfläche ist und der auffallende Strahl mit seiner Axe in ihrer Axe liegt, muss sich nach Symmetrie die Flüssigkeitsmenge rings um die X-Axe gleichmässig vertheilen und daher werden:

$$X' = \varepsilon V^2 q_a(1-\alpha), \qquad Y' = Z' = 0. \tag{84}$$

Ist noch die Form der Oberfläche eine solche, dass die Richtung, in welcher sich die Theilchen der Flüssigkeit bewegen, nachdem sie

die Fläche verlassen haben, auch ohne vollständige Theorie angebbar ist, so lässt sich X' nach (84) berechnen. Derartige Formen sind insbesondere Kegel von so grosser Seitenlänge, dass die Flüssigkeit ihnen parallel weitergeht, nachdem sie dieselben verlassen hat.

Degenerirt der Kegel zu einer normal zur X-Axe liegenden nicht zu kleinen Scheibe, so kann man $\alpha = 0$ setzen und erhält

$$X' = \varepsilon V^2 q_\alpha, \tag{84'}$$

also den Druck gleich der Reaction desselben Strahles, was an sich einleuchtend ist, da, wenn man sich das Gefäss und die gestossene Oberfläche zu einem festen System verbunden denkt, dieses durch das senkrecht zur X-Axe abfliessende Wasser keine Beschleunigung parallel der X-Axe erfahren kann.

Die Resultate der letzten Betrachtung fassen wir zusammen in den Satz:

Die Kraft, welche eine Rotationsfläche von einem axial auftreffenden Strahl einer incompressibeln Flüssigkeit erfährt, ist gleich der in der Zeiteinheit durch den Strahlquerschnitt strömenden Masse multiplicirt mit der Differenz der der Axe parallelen Geschwindigkeiten der Flüssigkeit vor dem Erreichen und nach dem Verlassen der Rotationsfläche.

III. Um die vorstehenden Betrachtungen auf Gase auszudehnen, gehen wir wiederum von der Gleichung (78) aus, welche lautete

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \int \frac{dp}{\varepsilon} = T,$$

und führen den Zusammenhang zwischen ε und p ein, der dem Problem entspricht.

Wir betrachten zunächst den Ausfluss aus einem Gefässe, in welchem durch andauerndes Zupumpen der Zustand constant erhalten werden mag, sodass das Geschwindigkeitspotential φ und demgemäss auch T als von der Zeit unabhängig angesehen werden kann; den Einfluss der Schwere ignoriren wir und haben demgemäss einfach:

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\varepsilon} = c. \tag{85}$$

Ist die Einrichtung angemessen getroffen, nämlich die Ausflussöffnung klein und der Ueberschuss des innern Druckes über den äussern gering, sodass der Ausfluss langsam stattfindet und die Temperatur des ausfliessenden Gases in allen Theilen als constant angesehen werden kann, so ist nach (39″) $\varepsilon = Cp$ zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{1}{C} l(p) = c. \tag{85'}$$

Wendet man diese Formel einmal auf das Innere des Reservoirs an, dann auf den freien Raum, in welchen der Ausfluss stattfindet, und bezeichnet man die bezüglichen Werthe mit V_0, p_0 und V_1, p_1, so erhält man

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2} = \frac{1}{C} l\left(\frac{p_0}{p_1}\right), \tag{85''}$$

worin die Constante C der herrschenden Temperatur und der benutzten Gasart individuell ist, z. B. gilt $C = \varepsilon_0/p_0 = \varepsilon_1/p_1$.

Da der Zustand stationär sein soll, so muss die Beziehung stattfinden

$$q'\varepsilon_1 V_1 = q_0 \varepsilon_0 V_0,$$

welche ausdrückt, dass durch den, wie p. 360 besprochen, contrahirten Querschnitt q', in welchem die Dichte ε_1, die Geschwindigkeit V_1 ist, in der Zeiteinheit dieselbe Masse geht, wie durch den Querschnitt q_0, wo ε_0 und V_0 stattfindet; wegen $\varepsilon_0/p_0 = \varepsilon_1/p_1$ kann man dafür auch schreiben:

$$q'p_1 V_1 = q_0 p_0 V_0.$$

Hierdurch lässt sich die Formel (85″) in die geeignete Gestalt bringen, um V_1 zu bestimmen, sodass sie lautet:

$$V_1^2\left(1 - \left(\frac{q'\varepsilon_1}{q_0 \varepsilon_0}\right)^2\right) = 2\frac{p_0}{\varepsilon_0} l\left(\frac{p_0}{p_1}\right). \tag{85'''}$$

Findet das Ausströmen in den leeren Raum statt, ist also $p_1 = 0$, so ergiebt die Formel $V_1 = \infty$, was zeigt, dass unter diesen Umständen die gemachte Annahme vollständiger Ausgleichung der Temperaturen jedenfalls nicht zulässig ist.

Im zweiten extremen Falle so grosser Ausflussmengen, d. h. so grosser Oeffnung und so grossen Ueberdruckes, dass man die Wärmeleitung ganz vernachlässigen kann, gilt nach (39‴) $\varepsilon^\varkappa = C_1 p$; also wird:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{1}{C_1^{1/\varkappa}} \frac{dp}{p^{1/\varkappa}} = 0 \tag{86}$$

oder

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\varkappa}{(\varkappa - 1)} \frac{p^{(\varkappa-1)/\varkappa}}{C_1^{1/\varkappa}} = c_1. \tag{86'}$$

Angewandt wie die Formel (85′) und unter Berücksichtigung, dass hier aus

$$q'\varepsilon_1 V_1 = q_0 \varepsilon_0 V_0,$$

folgt

$$q'p_1^{1/\varkappa} V_1 = q_0 p_0^{1/\varkappa} V_0,$$

giebt dies

$$V_1^2\left(1 - \left(\frac{q'p_1^{1/\varkappa}}{q_0 p_0^{1/\varkappa}}\right)^2\right) = \frac{2\varkappa p_0^{1/\varkappa}}{(\varkappa - 1)\varepsilon_0}\left(p_0^{(\varkappa-1)/\varkappa} - p_1^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right). \tag{86''}$$

Hieraus erhält man für $p_1 = 0$

$$V_1^2 = \frac{2\varkappa p_0}{(\varkappa - 1)\varepsilon_0}, \tag{86'''}$$

also auch für das Ausströmen in den leeren Raum eine endliche Geschwindigkeit.

Beide oben verfolgte Annahmen geben darin Uebereinstimmung, dass das Quadrat der Ausflussgeschwindigkeit bei gleichen Druckverhältnissen der Dichtigkeit des benutzten Gases indirect, das Quadrat der ausgeflossenen Masse ihr also direct proportional ist.

Die Beobachtung kann an die Ausflussgeschwindigkeit unmittelbar natürlich nicht anknüpfen, die ausgeströmte Menge lässt sich aber, wenn man das Gas durch eine Flüssigkeit verdrängt und Sorge trägt, den Druck im Reservoir constant zu erhalten, durch die Volumenänderung des Gases im Gasometer oder durch die zugeführte Flüssigkeitsmenge messen. Auch lässt sich die bei constantem Volumen in Folge des Ausflusses eingetretene Druckänderung im Reservoir in dieser Hinsicht verwerthen, wenn der Ausfluss so langsam stattfindet, dass man in jedem Moment die für den stationären Zustand gültigen Gleichungen anwenden kann.

Die Formeln für diese Druckänderung lassen sich nur angenähert integriren, und es bietet einen Vortheil, diese Annäherung von vornherein einzuführen.

Wir erhalten aus (85'') und (86'') für einen beliebigen Querschnitt, in dem die Werthe V, p, ε stattfinden, und für die behandelten beiden extremen Fälle die allgemeinen Formeln:

$$\text{I.} \qquad V^2 - V_0^2 = \frac{2p_0}{\varepsilon_0} l\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

und

$$\text{II.} \qquad V^2 - V_0^2 = \frac{2\varkappa p_0}{(\varkappa - 1)\varepsilon_0}\left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\varkappa - 1)/\varkappa}\right).$$

Nimmt man an, dass die Druckdifferenz $p_0 - p$ so klein neben dem gesammten Druck p ist, dass man $(p_0 - p)/p$ neben Eins vernachlässigen kann, so erhält man durch Entwickelung und Beschränkung auf das niedrigste Glied aus (I) und (II) dieselbe Formel

$$V^2 - V_0^2 = \frac{2}{\varepsilon}(p_0 - p), \tag{87}$$

also auch dasselbe Gesetz, wie für eine incompressible Flüssigkeit, welche nur unter der Wirkung einer Druckdifferenz steht.

Auf den ausfliessenden Strahl angewandt giebt die Formel, wenn man die Geschwindigkeit im Gasometer gegen die Ausflussgeschwindigkeit verschwindend annimmt:

$$V_1^2 = \frac{2}{\varepsilon}(p_0 - p_1). \tag{87'}$$

Die in der Zeit dt ausfliessende Masse ist gleich $V_1 \varepsilon q' dt$; sie verringert die Masse M im Gasometer, sodass also

$$dM = -q' \sqrt{2\varepsilon(p_0 - p_1)}\, dt$$

ist. Nennt man das Volumen Gas im Gasometer Ω, so ist $M = \Omega\varepsilon$, und wir erhalten allgemein

$$\Omega d\varepsilon + \varepsilon d\Omega = -q' \sqrt{2\varepsilon(p_0 - p_1)}\, dt. \qquad (87'')$$

Hierin ist, wenn man annimmt, dass die Temperatur des Gases im Gasometer constant erhalten wird, $d\varepsilon = C dp_0$ zu setzen; ε selbst ist als constant zu behandeln, da oben Glieder von der Ordnung $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1$ neben Eins vernachlässigt sind.

Hat das Gefäss constantes Volumen, ist also $d\Omega = 0$, so folgt:

$$\frac{\Omega C dp_0}{q' \sqrt{2\varepsilon(p_0 - p_1)}} = -dt,$$

oder

$$\frac{\Omega C}{q'} \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\varepsilon}} = c - t.$$

Ist der Anfangswerth von p_0 gleich p_0^0, so erhält man für die Zeit, welche bis zur Erreichung des Werthes p_0 verflossen ist, die Formel:

$$t = \frac{\Omega}{q'} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{p}} \left(\sqrt{\frac{p_0^0 - p_1}{p}} - \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p}} \right), \qquad (87''')$$

in welcher p ein beliebiger mittlerer Werth des Druckes und ε die ihm entsprechende Dichte ist.

Drückt man in Formel (87) V und V_0 durch die Ausflussgeschwindigkeit aus und setzt constante Temperatur voraus, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$V_1^2 \left(\left(\frac{p_1 q'}{pq} \right)^2 - \left(\frac{p_1 q'}{p_0 q_0} \right)^2 \right) = \frac{2}{\varepsilon} (p_0 - p),$$

oder durch Einführung von (87'):

$$(p_0 - p_1) \left(\left(\frac{p_1 q'}{pq} \right)^2 - \left(\frac{p_1 q'}{p_0 q_0} \right)^2 \right) = p_0 - p. \qquad (88)$$

Diese Formel giebt den hydraulischen Druck innerhalb des Gasstromes an. Ist der Querschnitt q_0 des Stromes im Gasometer gross gegen den contrahirten Querschnitt q' des austretenden Strahles, so gilt einfacher:

$$p_0 - p = (p_0 - p_1) \left(\frac{p_1 q'}{pq} \right)^2. \qquad (88')$$

Wir werden nur innerhalb der oben eingeführten Annäherung bleiben, wenn wir hierin rechts p_1/p mit Eins vertauschen, ausgenommen den Fall, dass das Verhältniss q'/q sehr stark von Eins

und daher nach der Formel auch $(p_0 - p)$ sehr stark von $(p_0 - p_1)$ verschieden ist, ein Fall, den wir ausschliessen. Es wird dann einfacher:

$$p_0 - p = (p_0 - p_1)\left(\frac{q'}{q}\right)^2$$

oder (88″)

$$p_1 - p = (p_0 - p_1)\left(\left(\frac{q'}{q}\right)^2 - 1\right).$$

Man erkennt, dass, wenn $(q'/q)^2 > 1$ ist, dann $p < p_1$ wird; in Folge dessen muss, wenn in dem Querschnitt q durch eine Oeffnung in der Wand des Canales, innerhalb dessen das Gas strömt, eine Verbindung mit dem Aussenraum, in welchem der Druck p_1 herrscht, hergestellt wird, die Luft von aussen in den Canal hineingetrieben werden und eine Art von Saugwirkung entstehen. Die Druckdifferenz $p_1 - p$ lässt sich durch ein in der Oeffnung angebrachtes Manometer beobachten.

Für die Reaction und den Druck eines Gasstrahles gelten innerhalb der benutzten Annäherung die Formeln (82′) und (84)

§ 32. **Mechanik idealer Flüssigkeiten; Wirbelbewegungen.**

Während in dem vorigen Abschnitt vorausgesetzt war, dass die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit oder die Wirbelcomponenten

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \mu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \nu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{89}$$

innerhalb der bewegten Flüssigkeit überall und zu jeder Zeit verschwinden, und demgemäss, wie ausgeführt ist, ein Geschwindigkeitspotential existirt, soll nun der entgegengesetzte Fall näher untersucht werden.

I. Wir gehen dabei aus von den allgemeinen Bewegungsgleichungen (55), die sich unter Annahme der Existenz eines Potentiales Φ für die Kräfte schreiben liessen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z}; \end{aligned} \tag{89'}$$

dazu trat die Beziehung

$$\Pi = \int \frac{dp}{\varepsilon} \tag{89''}$$

und, wenn die Dichte jedes Massentheilchens während der Bewegung ungeändert bleibt, noch die andere

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{89'''}$$

Eliminiren wir $\Phi + \Pi$ aus diesen Formeln, etwa indem wir die zweite nach z, die dritte nach y differentiiren und erstere von letzterer abziehen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Schreiben wir die letzten beiden Klammern in der Form

$$\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

welche nach (89''') identisch ist mit

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

und fügen

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$$

hinzu, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + u\frac{\partial \lambda}{\partial x} + v\frac{\partial \lambda}{\partial y} + w\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \lambda\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Die ersten vier Glieder geben die vollständige Aenderung, welche für ein gegebenes Massenelement die Rotationscomponente λ mit der Zeit erleidet, und wir können also, indem wir der ersten Gleichung zwei ebenso abzuleitende hinzufügen, das System aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \lambda\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\frac{\partial w}{\partial y} + \nu\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{90}$$

Ein diesem äquivalentes erhält man, wenn man zu dem Ausdruck, von dem wir ausgingen,

$$+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

hinzufügt, nämlich:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial x} + \nu\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{d\mu}{dt} = \lambda\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{90'}$$
$$\frac{d\nu}{dt} = \lambda\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\frac{\partial v}{\partial z} + \nu\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Diese Formeln sprechen einige fundamentale Eigenschaften der Wirbelbewegungen aus, zu deren Ableitung wir jetzt übergehen wollen.

Sind zu irgend einer Zeit für ein Massenelement der Flüssigkeit alle drei Rotationsgeschwindigkeiten gleich Null, so sind es auch seine Rotationsbeschleunigungen; hieraus folgt aber, dass die Rotationsgeschwindigkeiten in diesem Falle überhaupt immer gleich Null bleiben. Denn eine Aenderung dieses Werthes würde eben eine von Null verschiedene Beschleunigung verlangen.

Ein Massenelement oder ein endliches Quantum Flüssigkeit, welches zu irgend einer Zeit nicht rotirt, nimmt unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, niemals eine Rotationsbewegung an.

Hierzu lässt sich noch ein speciellerer Satz fügen, der sogleich aus den Formeln (90') abzulesen ist.

Sind zu irgend einer Zeit Rotationen nur um eine Axe, z. B. die Z-Axe, vorhanden und findet die Bewegung in einer dazu normalen Ebene statt, so behält ein jedes Theilchen auch die Rotationsgeschwindigkeiten $\lambda = \mu = 0$ und $\nu = \text{Const.}$ dauernd bei.

Sind beliebige Rotationen vorhanden, so kann man für jede Stelle x, y, z nach den Betrachtungen auf p. 136 und 137 eine resultirende Rotationsgeschwindigkeit τ bilden durch

$$\tau^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \tag{91}$$

welche in positivem Sinn um eine Axe α stattfindet, deren Winkel gegen die Coordinatenaxen gegeben werden durch

$$\cos(\alpha, x) = \frac{\lambda}{\tau}, \quad \cos(\alpha, y) = \frac{\mu}{\tau}, \quad \cos(\alpha, z) = \frac{\nu}{\tau}, \tag{91'}$$

wenn τ hierin stets positiv gerechnet wird.

Nehmen wir zu jedem x, y, z einen Nachbarpunkt x_1, y_1, z_1, der auf der Richtung der Axe α um eine Länge $\varrho\tau$ entfernt liegt, worin ϱ eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, dann haben diese Nachbarpunkte die resp. Geschwindigkeiten

$$u_1 = u + \varrho\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$v_1 = v + \varrho\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$w_1 = w + \varrho\left(\lambda\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\frac{\partial w}{\partial y} + \nu\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

denn $\varrho\lambda$, $\varrho\mu$, $\varrho\nu$ sind hier die relativen Coordinaten des Punktes x_1, y_1, z_1 in Bezug auf x, y, z.

Obiges ist aber nach (90) identisch mit

$$u_1 = u + \varrho\frac{d\lambda}{dt}, \qquad v_1 = v + \varrho\frac{d\mu}{dt}, \qquad w_1 = w + \varrho\frac{d\nu}{dt},$$

woraus folgt:

$$(u_1 - u)\,dt = \varrho\,d\lambda, \qquad (v_1 - v)\,dt = \varrho\,d\mu, \qquad (w_1 - w)\,dt = \varrho\,d\nu.$$

Hierin stehen links die Aenderungen, welche die Projectionen der Entfernung zwischen den Punkten x_1, y_1, z_1 und x, y, z, rechts diejenigen, welche die Projection der Länge $\varrho\tau$ während dt erleidet; dass beide gleiche Werthe haben, sagt aus, dass die beiden Punkte, welche anfangs auf der Richtung der Rotationsaxe lagen, nach deren Verschiebung wiederum darauﬂiegen, und dass ihre Entfernungen in beiden Zuständen den jedes Mal stattfindenden Rotationsgeschwindigkeiten proportional sind.

Führen wir den Namen der Wirbellinie für eine Curve ein, die an jeder Stelle in die Richtung der dortigen Rotationsaxe fällt, so ergiebt sich aus dem Vorstehenden der weitere Satz:

Eine jede Wirbellinie geht dauernd durch dieselben Flüssigkeitstheilchen; bei einer Bewegung ändert sich die Rotationsgeschwindigkeit für jedes Linienelement in demselben Verhältniss wie der Abstand zweier auf demselben befindlichen Flüssigkeitstheilchen.

Als Wirbelfaden bezeichnen wir eine Röhre, welche erfüllt wird von den Wirbellinien, die durch die Punkte einer unendlich kleinen Fläche gehen und denen demgemäss sehr nahe gleiche Rotationsgeschwindigkeit entspricht.

Da nach unserer Annahme jedes Massentheilchen seine Dichte ungeändert beibehalten soll, so kann das Volumen des Abschnittes eines Wirbelfadens, welcher immer dieselben Theilchen enthält, während der Bewegung nicht variiren. Die Rücksicht auf den vorigen Satz ergiebt daher das Resultat.

Für jede Stelle eines Wirbelfadens bleibt das Product aus Querschnitt und Rotationsgeschwindigkeit während der Bewegung constant.

Multipliciren wir endlich die aus (89) folgende identische Beziehung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \tag{92}$$

mit dem Raumelement dk an der Stelle x, y, z und integriren über einen beliebigen Raum k, innerhalb dessen die Rotationsgeschwindigkeiten stetige Functionen der Coordinaten sind, so erhalten wir durch Anwendung des Hülfssatzes (22):

$$\int\limits_{(o)} \left(\overline{\lambda} \cos(n, x) + \overline{\mu} \cos(n, y) + \overline{\nu} \cos(n, z)\right) do = 0, \tag{92'}$$

das Integral ausgedehnt über die Oberfläche des Raumes k, was sich unter Rücksicht auf (91) und (91') auch schreibt:

$$\int\limits_{(o)} \overline{\tau} \cos(\alpha, n)\, do = 0. \tag{92''}$$

Wählen wir als Raumtheil k den zwischen zwei normalen Querschnitten q_1 und q_2 liegenden Theil eines Wirbelfadens, so verschwinden im Integral alle Theile, die sich auf die Mantelfläche beziehen, denn für jene ist $\cos(\alpha, n) = 0$, da dort die Normale n senkrecht zur Rotationsaxe steht. Von den beiden Querschnitten q_1 und q_2 giebt der eine den Betrag $q_1 \tau_1$, der andere $-q_2 \tau_2$, da für den einen die Normale in die Rotationsaxe fällt, für den andern ihr entgegengesetzt liegt. Demgemäss resultirt

$$q_1 \tau_1 = q_2 \tau_2, \tag{92'''}$$

was sich, da beide Querschnitte in demselben Wirbelfaden aber ganz beliebig liegen, in folgendem Satz ausspricht:

Für alle Stellen eines Wirbelfadens hat zu gegebener Zeit das Product aus der Grösse des Querschnittes in die Rotationsgeschwindigkeit denselben Werth.

Hieraus folgt, dass kein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit endigen kann, denn verschwinden kann die Rotationsgeschwindigkeit nach Vorstehendem in einem solchen nur, wenn sein Querschnitt unendlich wird; die Wirbelfäden müssen also entweder in sich zurücklaufen oder aber in der Oberfläche der Flüssigkeit endigen.

Für einen geschlossenen Wirbelfaden gilt, falls man das Integral über den von dem Wirbelfaden eingenommenen Raum erstreckt, die Beziehung:

$$\int\limits_{(k)} \lambda\, dk = \int\limits_{(k)} \mu\, dk = \int\limits_{(k)} \nu\, dk = 0; \tag{93}$$

denn man kann z. B. das erste Integral schreiben:

$$\int q \tau \cos(s, x)\, ds,$$

wo nun nach dem letzten Satz $q\tau$ längs des Fadens constant ist, also vor das Integral gezogen werden kann;

$$\int \cos(s, x)\, ds$$

ist aber ersichtlich für jede geschlossene Curve gleich Null. Nennt man das Product aus dem Volumenelement in die ihm zugehörige Rotationsgeschwindigkeit um eine Coordinatenaxe das Rotationsmoment dieses Volumens um die betreffende Richtung, so kann man also sagen:

Das Rotationsmoment eines geschlossenen Wirbelfadens ist um jede Axe gleich Null.

II. Specielle Fälle von Wirbelbewegungen kann man, wie oben solche von Potentialbewegungen, dadurch bilden, dass man innerhalb einer unendlichen Flüssigkeit die Wirbelcomponenten, soweit die Bedingung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \tag{94}$$

dies gestattet, willkürlich festsetzt und die Geschwindigkeiten aufsucht, welche ihnen entsprechen. Es ist hierzu die Integration der Gleichungen (89), unter Rücksicht auf die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

erforderlich; ist dieselbe durchgeführt, so kann dann jedes System von Stromlinien in eine starre Begrenzung der Flüssigkeit verwandelt werden.

Jene Gleichungen lassen sich auf bekannte Formen reduciren, durch die Einführung von drei neuen Functionen U, V, W, welche wir Wirbelfunctionen nennen wollen; dies geschieht durch die Substitutionen

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{94'}$$

welche der letzten Bedingung identisch genügen. Die erste der Gleichungen (89) wird nach Einsetzung dieser Werthe:

$$2\lambda = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Delta U;$$

fügt man also den obigen Formeln noch die Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{94''}$$

zu, so ergeben sich für die Wirbelfunctionen die Gleichungen:

$$\Delta U = -2\lambda, \qquad \Delta V = -2\mu, \qquad \Delta W = -2\nu. \tag{94'''}$$

Diese Bedingungen allein bestimmen die U, V, W nicht vollständig, lassen also unendlich viele Lösungen zu.

Hat man ein ihnen entsprechendes System U, V, W gefunden, so sind dadurch auch die Strömungen in dem Zeitpunkt, für welchen die λ, μ, ν gelten, bestimmt. Die Veränderung des Systemes mit der Zeit lässt sich nach dem System (90) oder bequemer nach den im Vorstehenden daraus abgeleiteten Sätzen, welche jenes ersetzen, beurtheilen. Da die Wirbelfäden immer aus denselben Theilchen gebildet werden, so geben die gefundenen u, v, w mit der Bewegung der letzteren zugleich die der ersteren; mit der Veränderung der Länge der Fäden hängt dabei die der Rotationsgeschwindigkeit zusammen.

Aus den gefundenen u, v, w ist endlich nach (89′) der Werth von $(\Phi + \Pi)$ zu bestimmen, welcher ihnen entspricht und daraus bei gegebenem äussern Potential Φ das Gesetz des Druckes in der mit Wirbeln erfüllten Flüssigkeit. Die Gleichungen (89′), mit den Factoren dx, dy, dz zusammengenommen, müssen auch auf der linken Seite ein vollständiges Differential nach den Coordinaten geben, wenn man die Beziehungen (90) oder (90′) benutzt; es ist aber nicht möglich, das Integral in U, V, W allgemein auszudrücken.

Die Behandlung der obigen Gleichungen ist nur in wenigen Fällen mit elementaren Mitteln durchführbar.

Ein besonders einfacher Fall möge allen übrigen vorausgeschickt werden. Ist im ganzen Raum $\lambda = \mu = 0$, $\nu = q$, d. h. constant, so kann man dem genügen durch

$$U = V = 0, \qquad W = -\frac{q}{2}(x^2 + y^2), \tag{95}$$

woraus folgt

$$u = -qy, \qquad v = +qx, \qquad w = 0. \tag{95'}$$

Diese Werthe stellen eine Bewegung dar, bei welcher die ganze Flüssigkeit wie ein starrer Körper um die, übrigens willkürliche, Z-Axe rotirt; eine solche Bewegung erfüllt also den ganzen Raum mit parallelen Wirbelfäden constanter Rotationsgeschwindigkeit.

Weiter wollen wir uns auf solche Fälle beschränken, bei welchen λ, μ, ν proportional mit einem Differentialquotienten von $1/r$ oder le, d. h. von dem Newton'schen oder logarithmischen Potential, nach einer Coordinate sind, wobei, wie früher, stets

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 = e^2$$

gesetzt ist.

Hier kann man leicht Lösungen finden mit Hülfe einiger Beziehungen, die aus den Fundamentalgleichungen

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \qquad \Delta'(le) = 0$$

folgen. Man erhält nämlich leicht:

$$\Delta\left(\frac{x}{r}\right) = 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \Delta\left(\frac{y}{r}\right) = 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \Delta\left(\frac{z}{r}\right) = 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \tag{96}$$

ebenso

$$\Delta'(x\,le) = 2\frac{\partial\, le}{\partial x}, \quad \Delta'(y\,le) = 2\frac{\partial\, le}{\partial y}, \tag{96'}$$

und hieraus durch Differentiation auch

$$\Delta\left(\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \Delta\left(\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}, \quad \Delta\left(\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} \tag{96''}$$

u. s. f., ebenso

$$\Delta'\left(\frac{\partial x\,le}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 le}{\partial x^2}, \quad \Delta'\left(\frac{\partial x\,le}{\partial y}\right) = \Delta'\left(\frac{\partial y\,le}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 le}{\partial x\,\partial y},$$
$$\Delta'\left(\frac{\partial y\,le}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 le}{\partial y^2}. \tag{96'''}$$

Von diesen Beziehungen werden wir vielfachen Gebrauch machen.

1. Der Gleichung (94) zu genügen machen wir den Ansatz:

$$\lambda = n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \mu = -n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \nu = 0, \tag{97}$$

was identisch ist mit

$$\lambda = -\frac{ny}{r^3}, \quad \mu = +\frac{nx}{r^3}, \quad \nu = 0.$$

Diese Werthe zeigen, dass der ganze Raum erfüllt ist mit Wirbelfäden in der Form von Kreisringen parallel der XY-Ebene, deren Centra auf der Z-Axe liegen. Die Rotationsgeschwindigkeit τ ist durch

$$\tau^2 = \frac{n^2(x^2+y^2)}{r^6}, \quad \text{d. h.} \quad \tau = \frac{ne}{r^3},$$

gegeben; τ verschwindet also im Unendlichen und wird unendlich im Coordinatenanfang, der deshalb ausserhalb der Flüssigkeit liegen muss.

Die Gleichungen (94''') lauten unter Benutzung von (97):

$$\Delta U = -2n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \Delta V = +2n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \Delta W = 0;$$

man gewinnt nach (96) Lösungen, welche, wie erforderlich, auch (94'') genügen, wenn man setzt

$$U = -\frac{ny}{r}, \quad V = +\frac{nx}{r}, \quad W = 0; \tag{97'}$$

demgemäss liefert (94') die Endresultate:

$$u = -nx\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = +\frac{nxz}{r^3}, \qquad v = -ny\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = +\frac{nyz}{r^3}, \tag{97''}$$
$$w = +n\left(\frac{\partial\frac{x}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{y}{r}}{\partial y}\right) = +n\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right).$$

Da $u:v = x:y$ ist, liegen alle Stromcurven in Ebenen durch die Z-Axe; ihre Gestalt bestimmt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{ez\,dz}{r^3} - \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)de = 0$$

oder

$$ez\,dz - (e^2 + 2z^2)\,de = 0,$$

worin wieder $e^2 = x^2 + y^2$, $r^2 = e^2 + z^2$ ist.

Multiplicirt man diese Gleichung mit e und setzt $e^2 = \eta$, $z^2 = \zeta$, so folgt:

$$\eta\,d\zeta - (\eta + 2\zeta)\,d\eta = 0,$$

was durch Division mit η^3 integrabel wird und auf

$$\frac{\zeta}{\eta^2} + \frac{1}{2\eta} = \frac{c}{2}$$

oder auf

$$\frac{2z^2}{e^4} + \frac{1}{e^2} = c \tag{97'''}$$

als Gleichung der Stromlinien führt.

Diese Curven schneiden wegen des Werthes von de/dz sämmtlich denselben Radiusvector unter dem gleichen Winkel, sie besitzen einen Wendepunkt für $e/z = \pm\sqrt{2}$ und sind für $-\sqrt{2} < e/z < +\sqrt{2}$ convex gegen die Z-Axe, ausserhalb dieser Grenze concav.

Bilden wir die Componente ϱ der Geschwindigkeit nach dem Radiusvector r, so erhalten wir:

$$\varrho = \frac{ux + vy + wz}{r} = +n\frac{2z}{r^2}.$$

Dies zeigt, dass eine Kugelfläche vom Radius R diese Flüssigkeitsbewegung begrenzen kann, wenn man sie mit der Geschwindigkeit

$$\Omega' = +\frac{2n}{R}$$

parallel der Z-Axe verschiebt; denn unter diesen Umständen erhält jedes Oberflächentheilchen die angegebene Normalgeschwindigkeit ϱ.

Wir haben hierdurch also eine zweite Bewegung einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit erhalten, welche durch eine mit beliebiger Geschwindigkeit geradlinig fortschreitende Kugel begrenzt werden kann.

2. Ein anderer Ansatz für λ, μ, ν, der (94) genügt, ist:

$$\lambda = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}, \qquad \mu = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y}, \qquad \nu = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z}; \tag{98}$$

die Wirbellinien sind die orthogonalen Trajectorien des Systemes der Flächen $\partial(1/r)/\partial z = c$, welche oben p. 351 besprochen sind. Aus den Gleichungen

$$\varDelta U = -2q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}, \qquad \varDelta V = -2q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y}, \qquad \varDelta W = -2q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z}$$

schliessen wir:

$$U = -q\frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial x}, \qquad V = -q\frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial y}, \qquad W = -q\frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial z} + \frac{2q}{r}; \tag{98'}$$

dabei ist in W das Glied $2q/r$, welches in $\varDelta W$ verschwindet, zugefügt, um der Gleichung (94″) zu genügen; die ersten Glieder geben nämlich, in $\varDelta W$ eingesetzt, nach (96) den Werth $-2q\,\partial(1/r)/\partial z$, und dieser ist zu Null zu ergänzen. Die eigenthümliche Form der U, V, W lässt in u, v, w nur das Glied $2q/r$ übrig bleiben, und man erhält so

$$u = +2q\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{2qy}{r^3}, \qquad v = -2q\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = +\frac{2qx}{r^3}, \qquad w = 0; \tag{98''}$$

die Bewegung der Flüssigkeit geschieht in Kreisbahnen um die Z-Axe, und zwar so, dass die Winkelgeschwindigkeit gleich $2q/r^3$, also nur von r abhängig ist, im Unendlichen verschwindet und im Coordinatenanfang unendlich wird.

Man kann demnach die nach (98″) bewegte Flüssigkeit durch eine beliebige Rotationsfläche um die Z-Axe, welche den Coordinatenanfang umschliesst, begrenzen.

3. Weiter setzen wir

$$\lambda = q\frac{\partial\, le}{\partial y} = \frac{qy}{e^2}, \qquad \mu = -q\frac{\partial\, le}{\partial x} = -\frac{qx}{e^2}, \qquad \nu = 0, \tag{99}$$

was Wirbelfäden in Form von Kreisen um die Z-Axe ergiebt, und folgern daraus gemäss (96′):

$$U = -qy\,le, \qquad V = +qx\,le, \qquad W = 0$$

und

$$u = v = 0, \qquad w = q(2le + 1). \tag{99'}$$

Wir haben hier also den Fall einer im ganzen unendlichen Raum parallel der Z-Axe stattfindenden Strömung, welche trotzdem eine reine Wirbelbewegung darstellt; w wird in der Z-Axe unendlich, diese ist also durch irgend eine sie umschliessende Cylinderfläche auszuschliessen.

4. Endlich sei noch

$$\lambda = q\frac{\partial le}{\partial x} = \frac{qx}{e^2}, \quad \mu = q\frac{\partial le}{\partial y} = \frac{qy}{e^2}, \quad \nu = 0; \tag{100}$$

es liegen also die Wirbelfäden parallel mit e. Wir schliessen daraus nach (96′), um auch (94‴) zu erfüllen,

$$U = -qx\,le, \qquad V = -qy\,le, \qquad W = qz(2le+1) + F(x, y),$$

worin F der Gleichung

$$\varDelta' F = 0$$

genügen muss, also z. B. $F = q'le$ gesetzt werden kann. Dann resultirt

$$u = +(2qz + q')\frac{y}{e^2}, \qquad v = -(2qz + q')\frac{x}{e^2}, \qquad w = 0. \tag{100′}$$

Die Stromcurven sind Kreise um die Z-Axe in Ebenen parallel zur XY-Ebene.

Wir haben hier eine Wirbelbewegung, bei welcher Wirbel- und Stromlinien in derselben Ebene liegen.

§ 33. Mechanik idealer Flüssigkeiten; Potentialbewegungen in Folge von Wirbeln; combinirte Bewegungen.

Wir haben uns im vorigen Abschnitt ausschliesslich mit solchen Wirbelbewegungen beschäftigt, bei denen die Rotationsgeschwindigkeit im Endlichen überall von Null verschieden, also der ganze Raum mit Wirbelfäden erfüllt war. Wie aber früher schon bemerkt, ist dies nicht der einzig mögliche Fall, und wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung von Vorgängen, wo die Wirbel auf abgeschlossene Räume, hauptsächlich auf einzelne unendlich feine Fäden beschränkt sind.

I. Ausserhalb des von Wirbeln erfüllten Raumes gelten nach (94″) und (94‴) die Formeln

$$\varDelta U = 0, \quad \varDelta V = 0, \quad \varDelta W = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{101}$$

als die Bedingungen für die durch die Wirbel erzeugte Potentialbewegung.

Das Problem der letzteren hat, zumal wenn man die Wirbelräume unendlich klein denkt, eine grosse Aehnlichkeit mit dem einer durch Quellen und Senken erzeugten Potentialbewegung. U, V, W erfüllen jede für sich die Hauptgleichung des Geschwindigkeitspotentiales φ, und man möchte daher vermuthen, dass man unmittelbar die früher benutzten Lösungen für φ hierher übertragen könnte. Um dies weiter zu übersehen, integriren wir die Gleichungen (94‴) über den von Wirbeln erfüllten Raum k und erhalten leicht unter Benutzung unseres Hülfssatzes (22′):

$$\int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{U}}{\partial n}\, do = -2 \int\limits_{(k)} \lambda\, dk, \quad \int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{V}}{\partial n}\, do = -2 \int\limits_{(k)} \mu\, dk, \quad \int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{W}}{\partial n}\, do = -2 \int\limits_{(k)} \nu\, dk, \tag{101'}$$

worin o die Oberfläche des Raumes k und n die äussere Normale bezeichnet.

Ist der Raum k rings von Flüssigkeit umgeben, reicht er also nirgends an die Oberfläche und ist er demgemäss nur mit geschlossenen Wirbelfäden erfüllt, so wird dies System nach (93) zu:

$$\int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{U}}{\partial n}\, do = \int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{V}}{\partial n}\, do = \int\limits_{(o)} \frac{\partial \overline{W}}{\partial n}\, do = 0. \tag{101''}$$

Wählt man also für U, V, W Geschwindigkeitspotentiale, wodurch die vorstehenden Integrale die Bedeutung der durch o hindurchströmenden Volumina erhalten, so müssen innerhalb o Quellen liegen, welche zusammen die Ergiebigkeit Null haben. Solches leisten für unendlich kleine Räume k nach p. 351 die Quellpaare, für deren Geschwindigkeitspotential wir in (65) die Form

$$\varphi = -ma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{Ma}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}$$

erhalten haben, vorausgesetzt, dass M die Ergiebigkeit und a den Abstand der beiden Quellen bezeichnete, und der Differentialquotient in der Richtung von der negativen zur positiven Quelle genommen wurde.

Mittelst solcher Quellpaaren können wir leicht folgendes System der U, V, W bilden:

$$\begin{aligned} -U &= C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \\ -V &= A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \\ -W &= B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{102}$$

welches mit der Gleichung (94'') in Uebereinstimmung ist und unter Rücksicht auf die Beziehung $\Delta(1/r) = 0$ die Form annimmt:

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad W = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

falls (102')

$$-\varphi = A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Setzt man

$$A = m'a' \cos(a', x), \qquad B = m'a' \cos(a', y), \qquad C = m'a' \cos(a', z),$$

so giebt dies:

$$\varphi = -m'a'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a'}, \tag{102''}$$

und man erkennt, dass unsere Verfügung uns zu der früheren Flüssigkeitsbewegung zurückführt. Darin liegt der folgende auch direct einleuchtende Satz:

Ein Quellpaar ist für Punkte in endlicher Entfernung jederzeit äquivalent mit einem unendlich kleinen ebenen Wirbelring, dessen Axe mit derjenigen des Paares zusammenfällt.

Während die Verwendung des Newton'schen Potentiales von einfachen oder Doppelpunkten auf die durch abgeschlossene Wirbel hervorgebrachte Potentialbewegung uns nicht zur Kenntniss neuer und characteristischer Erscheinungen geführt hat, liefert das logarithmische Potential deren eine grosse Zahl.

Wir betrachten dazu eine von zwei der XY-Ebene parallelen Ebenen begrenzte unendliche Flüssigkeit, welche sich so bewegt, dass $w = 0$ ist und u, v von z unabhängig sind. In einer solchen sind nur Wirbelfäden parallel der Z-Axe vorhanden, denn es ist $\lambda = \mu = 0$ und ν nur eine Function von x und y; wir genügen demgemäss den Gleichungen (94′) bis (94‴), indem wir $U = V = 0$ und W gleich einer Function von x und y setzen. Es bleiben sonach nur folgende Bedingungen übrig.

Für jede Stelle der XY-Ebene ausserhalb des von Wirbeln erfüllten Flächenstückes f muss gelten:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \text{d. h. } \Delta' W = 0, \tag{103}$$

und falls man die Grenze von f mit s bezeichnet und unter ν die dem Flächenelement df entsprechende Rotationsgeschwindigkeit versteht,

$$\int_{(s)} \overline{\frac{\partial W}{\partial n}}\, ds = -2\int_{(f)} \nu\, df = -2\nu', \tag{103'}$$

wobei ν' die Abkürzung des Flächenintegrales ist, welches hier dem Rotationsmoment entspricht.

Die Strömungsgeschwindigkeiten sind

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad w = 0, \tag{103''}$$

die Gleichung der Strömungslinien ist wegen

$$dx : dy = u : v,$$

was hier identisch ist mit

$$\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy = 0,$$

allgemein angebbar und lautet:

$$W = c'. \tag{103'''}$$

Das der Bewegung entsprechende Geschwindigkeitspotential φ erhält man durch Integration der Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial y} dx - \frac{\partial W}{\partial x} dy = d\varphi. \tag{103''''}$$

Besteht f nur aus einer Anzahl von unendlich kleinen Flächenstücken f_h, d. h. sind nur discrete, unendlich dünne Wirbelfäden vorhanden, so giebt das negative logarithmische Potential

$$W = -\sum_h m_h l e_h \tag{104}$$

einer auf jedem f_h liegenden Masse m_h eine Lösung, wenn man gemäss dem Umstand, dass $2\nu'$ an Stelle der Ergiebigkeit einer Quelle steht,

$$m_h = \frac{\nu'}{\pi} \tag{104'}$$

setzt.

Die Strömungslinien, d. h. die Curven constanter Werthe von W lassen sich in einfachen Fällen leicht discutiren. Für einen Wirbelfaden sind es Kreise um den Ort des Fadens als Mittelpunkt, für zwei entgegengesetzt gleiche Wirbelfäden sind es Kreise, welche das System der durch die beiden Wirbel zu legenden orthogonal schneiden, für zwei gleiche sind es Cassini'sche Curven.

Bildet man nach (103'''') das zu dem obigen W gehörige Geschwindigkeitspotential, so gelangt man zu der Form

$$-d\sigma = d\varphi,$$

worin σ die auf p. 357 so bezeichnete Summe bedeutet. Daher erhalten wir unter Weglassung einer Integrationsconstanten:

$$-\sigma = -\sum m_h \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_h}{x - x_h}\right) = -\sum m_h \vartheta_h = \varphi, \tag{104''}$$

und können sogleich den Satz aussprechen:

Die Probleme punktförmiger Quellen und einzelner Wirbelfäden in der unendlichen Ebene sind insofern reciprok zu einander, als, wenn man die Quellen so mit Wirbelfäden vertauscht, dass die Ergiebigkeit der ersteren und die Rotationsmomente der letzteren einander proportional sind, die Potentialcurven des einen Systemes zusammenfallen mit den Stromcurven des andern und umgekehrt.

Für ein Paar von Wirbelfäden von entgegengesetzt gleichem Rotationsmoment $\nu_1' = \pi m_1$ und einem unendlich kleinen Abstand a_1, den wir positiv von dem negativ zum positiv rotirenden Faden rechnen, haben wir:

$$W' = -m_1 a_1 \frac{\partial le}{\partial a_1} \tag{105}$$

zu setzen, was, im Falle das Paar an der Stelle y' der Y-Axe liegt und seine Axe a_1 in die $+Y$-Richtung fällt, wird zu:

$$W' = +m_1 a_1 \frac{\partial le}{\partial y} = +\frac{m_1 a_1 (y - y')}{e^2}. \tag{105'}$$

Das ihm entsprechende Geschwindigkeitspotential folgt aus (103'''') gemäss:

$$+m_1 a_1 \left(\frac{\partial^2 le}{\partial y^2} dx - \frac{\partial^2 le}{\partial x \partial y} dy\right) = d\varphi';$$

dies führt wegen

$$\frac{\partial^2 le}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 le}{\partial x^2}$$

sogleich zu:

$$\varphi' = -m_1 a_1 \frac{\partial le}{\partial x} = -\frac{m_1 a_1}{r} \cos\vartheta. \tag{105''}$$

Vergleicht man dies mit der Formel (74') und berücksichtigt die Bedeutung von ma dort und $m_1 a_1$ hier, so erkennt man den Satz:

Bei Bewegungen in der unendlichen Ebene ist ein Wirbelpaar mit einem normal dazu liegenden Quellpaar äquivalent, wenn das Product aus der Axenlänge in das Rotationsmoment für das Erstere gleich ist dem halben Product aus der Axenlänge in die Ergiebigkeit für das Letztere.

Da in einem unendlich dünnen Wirbelfaden bei einem endlichen Werth des Rotationsmomentes ν' die Rotationsgeschwindigkeit unendlich wird, so kann ein solcher Faden, streng genommen, in Wirklichkeit nicht existiren, und es ist, um ein endliches Rotationsmoment zu geben, auch ein endlicher Querschnitt erforderlich. Man kann aber die obigen, wie auch die folgenden Sätze als eine Annäherung betrachten, die den Vorgang bei dem möglichen Falle endlicher Querschnitte der Wirbelfäden um so genauer wiedergiebt, je weiter die betrachtete Stelle von dem Wirbelfaden abliegt.

II. Aus dem Werthe (104)

$$W = -\sum_h m_h \, le_h$$

folgen die Geschwindigkeiten an jeder Stelle

$$u = -\sum_h m_h \frac{y - y_h}{e_h^2}, \qquad v = +\sum_h m_h \frac{x - x_h}{e_h^2},$$

zu welchen jeder einzelne Wirbelfaden einen Antheil

$$-m_h \frac{y - y_h}{e_h^2} \quad \text{und} \quad +m_h \frac{x - x_h}{e_h^2}$$

beiträgt. Dies ergiebt wegen $m_h = \nu_h'/\pi$ den Satz:

Ein Flüssigkeitstheilchen erhält von einem jeden geradlinigen Wirbelfaden eine Geschwindigkeit mitgetheilt, welche normal zu dessen Abstand und im Sinne von dessen Rotationsrichtung liegt, und mit dessen Rotationsmoment v_h' direct, mit der Entfernung e_h indirect proportional ist.

Wir betrachten nun die Punkte x, y eines um den Wirbelfaden m_k an der Stelle x_k, y_k construirten unendlich kleinen Bereiches und schreiben für dieselben die obigen Formeln:

$$(u_k) = -m_k \frac{(y-y_k)}{e_k^2} - (y-y_k)\sum_h \frac{m_h}{e_{hk}^2} - \sum_h m_h \frac{(y_k-y_h)}{e_{hk}^2},$$

$$(v_k) = +m_k \frac{(x-x_h)}{e_k^2} + (x-x_k)\sum_h \frac{m_h}{e_{hk}^2} + \sum_h m_h \frac{(x_k-x_h)}{e_{hk}^2}.$$

Hierin beziehen sich die Summen auf alle Werthe von h mit Ausnahme von $h = k$, und es ist

$$e_k^2 = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2, \qquad e_{hk}^2 = (x_h-x_k)^2 + (y_h-y_k)^2,$$

da in letzterem Ausdruck das unendlich kleine $(x-x_k)$ resp. $(y-y_k)$ neben dem endlichen (x_h-x_k) resp. (y_h-y_k) vernachlässigt werden kann.

Die ersten Glieder in den Werthen von (u_k) und (v_k) geben eine Rotation des Bereiches um m_k mit einer vom Abstand e_k abhängigen Geschwindigkeit, die zweiten eine Rotation mit constanter Geschwindigkeit. Die dritten enthalten x und y nicht und stellen daher eine parallele Verschiebung des Bereiches dar, deren Geschwindigkeit die Componenten hat

$$u_k = -\sum_h \frac{m_h(y_k-y_h)}{e_{hk}^2}, \qquad v_k = +\sum_h \frac{m_h(x_k-x_h)}{e_{hk}^2}, \tag{106}$$

und zu der ein jeder Wirbelfaden, mit Ausnahme von m_k selbst, einen Antheil giebt.

Wir schliessen hieraus, dass ein Wirbelfaden an der Stelle x_k, y_k von einem andern an der Stelle x_h, y_h Translationsgeschwindigkeiten mitgetheilt erhält von den Beträgen

$$u_{kh} = -m_h \frac{(y_k-y_h)}{e_{hk}^2}, \qquad v_{kh} = +m_h \frac{(x_k-x_h)}{e_{hk}^2},$$

worin $\pi m_h = v_h'$ das Rotationsmoment des Fadens an der Stelle x_h, y_h bezeichnet.

Diese Geschwindigkeiten geben eine Resultante V_{kh} von der Grösse

$$V_{kh} = \frac{m_h}{e_{hk}},$$

deren Richtung normal zu der Verbindungslinie e_{hk} und im Sinne der Rotation von m_h liegt.

Wir haben demgemäss, um die gesammte wirklich stattfindende Bewegung unter alleiniger Einwirkung von Wirbelfäden zu erhalten, in dem Ansatz

$$W = -\sum_h m_h\, l\, e_h$$

die Massenpunkte m_h mit den Geschwindigkeiten u_h, v_h parallel den Coordinatenaxen bewegt und e_h auch von diesen bewegten Punkten gerechnet zu denken.

Ueber die Bewegung der Wirbelfäden lassen sich noch einige allgemeine Gesetze angeben.

Multiplicirt man die obigen Gleichungen (106) mit m_k und summirt sie über alle Wirbelfäden m_k, so ergiebt sich, da in der Summe jedes Glied von der Form $m_h m_k (x_k - x_h)/e_{hk}^2$ resp. $m_h m_k (y_k - y_h)/e_{hk}^2$ zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommt:

$$\sum_k m_k u_k = 0, \qquad \sum_k m_k v_k = 0. \tag{106'}$$

Der Schwerpunkt der supponirten Massenpunkte, den man passend den Wirbelmittelpunkt nennen kann, bleibt an seinem Ort.

Multiplicirt man die erste Gleichung (106) mit $m_k v_k$, zieht sie von der mit $m_k u_k$ multiplicirten zweiten ab und bildet die Summe über alle m_k, so erhält man:

$$\sum_k m_k \sum_h \frac{m_h}{e_{hk}^2} \left(v_k (y_k - y_h) + u_k (x_k - x_h) \right) = 0,$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\sum_{hk} \frac{m_h m_k}{e_{hk}^2} \left((v_k - v_h)(y_k - y_h) + (u_k - u_h)(x_k - x_h) \right) = 0;$$

daraus folgt durch Integration, da

$$u_h = \frac{d x_h}{dt}, \qquad v_h = \frac{d y_h}{dt}$$

ist:

$$\sum_{hk} m_h m_k\, l\, e_{hk} = c. \tag{106''}$$

Das logarithmische Potential der Wechselwirkung zwischen den supponirten Massen bleibt bei der Bewegung constant.

Multiplicirt man die erste Gleichung (106) mit $m_k x_k$, die zweite mit $m_k y_k$, addirt sie und bildet die Summe über alle m_k, so erhält man:

$$\sum_k m_k (x_k u_k + y_k v_k) = -\sum_k m_k \sum_h \frac{m_h}{e_{hk}^2} \left(x_k (y_k - y_h) - y_k (x_k - x_h) \right)$$

$$= -\sum_{hk} \frac{m_h m_k}{e_{hk}^2} \left((x_k - x_h)(y_k - y_h) - (y_k - y_h)(x_k - x_h) \right) = 0.$$

Hieraus folgt durch Integration, indem man $x_k^2 + y_k^2 = e_k^2$ setzt und berücksichtigt, dass die Entfernung e_k von dem ganz beliebigen Coordinatenanfang gerechnet ist:

$$\sum_k m_k e_k^2 = c'. \tag{106'''}$$

Das Trägheitsmoment der supponirten Massen um eine beliebige Axe normal zur XY-Ebene ist constant.

Multiplicirt man endlich die erste Gleichung (106) mit $m_k y_k$, die zweite mit $m_k x_k$, subtrahirt und bildet die Summe über alle m_k, so resultirt:

$$\sum_k m_k (x_k v_k - y_k u_k) = +\sum_k m_k \sum_h \frac{m_h}{e_{hk}^2}\left(x_k(x_k - x_h) + y_k(y_k - y_h)\right)$$

$$= +\sum_{hk} \frac{m_h m_k}{e_{hk}^2}\left((x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2\right)$$

oder nach der Bedeutung von e_{hk} und unter Einführung der Flächengeschwindigkeit Ω_k um den willkürlichen Coordinatenanfang:

$$2\sum_k m_k \Omega_k = +\sum_{hk} m_h m_k. \tag{106''''}$$

Die doppelte Summe der Flächenmomente der supponirten Massen um eine beliebige Axe ist gleich der Summe über die Combinationen aller dieser Massen zu je zwei.

Sind nur zwei Wirbelfäden vorhanden, so lässt sich deren Bewegung auf Grund der vorstehenden Sätze leicht angeben.

Nach (106') können sie nur um ihren ruhenden Schwerpunkt rotiren, nach (106'') bleibt ihre gegenseitige Entfernung, und daher auch die jedes einzelnen von ihrem Schwerpunkt constant. Wählen wir diesen Punkt zum Coordinatenanfang, so ergiebt (106''''), dass die Rotationsgeschwindigkeit constant ist; Formel (106''') enthält bei nur zwei Fäden kein neues Resultat.

Nehmen wir zunächst zwei Fäden mit gleicher Rotationsrichtung, also auch gleichem Vorzeichen von m, dann liegt der Schwerpunkt zwischen den beiden Punkten; nennt man die Winkelgeschwindigkeit der Verbindungslinie $e_{12} = e$ um den Schwerpunkt ω, die Entfernungen der supponirten Massen m_1 und m_2 vom Schwerpunkt resp. e_1 und e_2, so liefert die letzte Gleichung das Resultat:

$$(m_1 e_1^2 + m_2 e_2^2)\,\omega = m_1 m_2.$$

Nun ist nach der Definition des Schwerpunktes

$$e_1 = \frac{e m_2}{m_1 + m_2}, \qquad e_2 = \frac{e m_1}{m_1 + m_2},$$

und daraus folgt:

$$\omega = \frac{m_1 + m_2}{e^2}.$$

Besitzen die beiden Wirbelfäden entgegengesetzte Rotationsrichtung, so sind die supponirten Massen von entgegengesetztem Vorzeichen; ihr Schwerpunkt fällt ausserhalb ihrer Verbindungslinie und rückt um so weiter nach dem Unendlichen hin, je mehr sie gleiche absolute Werthe erhalten. Die Rotation verwandelt sich also für zwei entgegengesetzt gleiche Wirbelfäden in eine geradlinige Fortschreitung mit der Geschwindigkeit $V = m/2e$. —

III. Allgemeinere Bewegungen, als bisher betrachtet, erhalten wir durch Superposition von Potential- und Wirbelbewegungen; die hierdurch resultirenden nennen wir combinirte Flüssigkeitsbewegungen. Es lässt sich zeigen, was wir hier aber unterlassen müssen, dass diese combinirten Bewegungen die allgemeinsten überhaupt möglichen darstellen. In Bezug auf sie ist ganz allgemein Folgendes zu bemerken.

Die Continuitätsbedingung (89‴) ist in u, v, w homogen lineär; sie wird also stets erfüllt, wenn, wie bei der combinirten Bewegung, u, v, w je gleich einer Summe von Theilen sind, die einzeln dieser Bedingung genügen.

Die Gleichungen (89′) sind in u, v, w und ihren Differentialquotienten nicht homogen lineär; also tritt, wenn wir u, v, w aus einer Potential- und einer Wirbelbewegung combiniren, in ihnen auf der rechten Seite ein anderer Werth $(\Phi + \Pi)$ auf, als die Summe der den beiden Theilen entsprechenden Ausdrücke ergiebt; die Superposition der Geschwindigkeiten hat also nicht eine Superposition der äussern Kräfte und der innern Drucke zur Folge. Dies findet vielmehr nur dann statt, wenn die Geschwindigkeiten u, v, w und ihre Differentialquotienten so klein sind, dass man die Glieder, welche ihre Producte enthalten, gegen die übrigen vernachlässigen kann. In diesem speciellen Falle wird aus (89′):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z},$$

und dies zeigt, dass dann die combinirte Bewegung entweder ein Geschwindigkeitspotential besitzen oder aber stationär sein muss; im letzteren Falle ist dann $\Phi + \Pi$ im ganzen Raume constant.

Der allgemeinste Ansatz für eine combinirte Bewegung wird nach (57′) und (94′) lauten

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \tag{107}$$

worin, wenn die Dichtigkeit constant ist und wenn die Wirbelcomponenten überall gegeben sind, nach (62), (94'') und (94''') φ, U, V, W folgenden Bedingungen zu genügen haben:

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta U = -2\lambda, \qquad \Delta V = -2\mu, \qquad \Delta W = -2\nu,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{107'}$$

Sind die Wirbelcomponenten nicht gegeben, so haben U, V, W nur die letzte Gleichung zu erfüllen und sind im Uebrigen willkürlich, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist; im andern Fall bestimmen sie sich durch die Grenzbedingungen.

Wir betrachten schliesslich noch ein einfaches Beispiel für die combinirte Bewegung.

Auf p. 379 haben wir gesehen, dass

$$u = +\frac{n\,xz}{r^3}, \qquad v = +\frac{n\,yz}{r^3}, \qquad w = +n\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)$$

eine Wirbelbewegung darstellt, welche von einer mit der Geschwindigkeit Ω' parallel der Z-Axe fortschreitenden Kugel vom Radius R begrenzt werden kann, wenn man

$$n = \frac{\Omega' R}{2}$$

setzt.

Dagegen stellen nach p. 353 die aus $\varphi = -qz/r^3$ folgenden Componenten

$$u = +\frac{3q\,xz}{r^5}, \qquad v = +\frac{3q\,yz}{r^5}, \qquad w = -\frac{q}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)$$

eine Potentialbewegung von der analogen Eigenschaft dar, wenn

$$q = \frac{\Omega R^3}{2} \quad \text{ist.}$$

Combinirt man diese beiden Bewegungen, indem man $\Omega = -\Omega'$ oder $q = -nR^2$ setzt, so erhält man durch

$$u = \frac{n\,xz}{r^3}\left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right), \qquad v = \frac{n\,yz}{r^3}\left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right),$$

$$w = \frac{n}{r^3}\left(r^2 + R^2 + z^2\left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right)\right)$$

eine sehr eigenthümliche Bewegung gegeben, welche im Unendlichen verschwindet und durch eine ruhende Kugelfläche vom Radius R begrenzt werden kann, denn die Geschwindigkeitscomponente ϱ parallel dem Radius erhält den Werth:

$$\varrho = \frac{2nz}{r^2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Für eine zur gegebenen concentrische Kugel vom Radius

$$R' = R\sqrt{3}$$

wird

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = \frac{4n}{R\sqrt{3}^3};$$

die Stromcurven, welche jene Kugel schneiden, liegen also in derselben der Z-Axe parallel.

Einige andere combinirte Flüssigkeitsbewegungen werden wir in den beiden nächsten Abschnitten behandeln.

§ 34. Mechanik reibender Flüssigkeiten; Potential- und Wirbelbewegung; Strömung in Spalten und Röhren.

Die Mechanik idealer Flüssigkeiten oder die gewöhnliche Hydrodynamik bot zu den in den ersten Abschnitten dieses Theiles angestellten allgemeinen Betrachtungen nur ein sehr specielles Beispiel, insofern die gemachten Voraussetzungen allein Druckkräfte zuliessen, welche stets normal zu dem Flächenelement stehen, gegen welches sie wirken. Anders verhalten sich die wirklichen Flüssigkeiten.

Beginnt ein mit einer solchen gefülltes Gefäss, das die Gestalt einer Rotationsfläche hat, sich um seine Axe zu drehen, so bemerken wir, dass die Flüssigkeit allmählig an der Bewegung mehr und mehr Theil nimmt; die äussern Schichten werden von dem Gefäss, die innern von den äussern mitgeführt. Hört die Rotation des Gefässes plötzlich auf, so kommt die Flüssigkeit von den äussern zu den innern Schichten fortschreitend ebenfalls allmählig zur Ruhe.

Dieser einfache Vorgang zeigt, dass bei den wirklichen Flüssigkeiten noch andere Druckkräfte vorhanden sind, als die bisher betrachteten, und dass dieselben auch tangentiale Componenten ergeben. Wir bezeichnen diese innern Kräfte mit dem Namen der Flüssigkeitsreibung und wenden uns nunmehr ihrer Betrachtung zu.

I. Die Flüssigkeitsreibung ist eine Kraft, welche nur auftritt, wenn innerhalb der Flüssigkeit Geschwindigkeitsdifferenzen vorhanden sind; sie ist unmerklich, wenn sich die Flüssigkeit wie ein starrer Körper bewegt, also auch wenn sie ruht. Dies ist dadurch erwiesen, dass sich alle Gesetze der gewöhnlichen Hydrostatik mit der Beobachtung an reibenden Flüssigkeiten vollständig in Uebereinstimmung ergeben haben.

Die Gesetze der Flüssigkeitsreibung durch das Experiment aufzusuchen, wie das für die Reibung zwischen starren Körpern möglich war, verbietet sich durch die grosse Complication der maassgebenden Verhältnisse. In diesem, wie in ähnlichen Fällen entwickelt man die

Theorie aus einem System von Annahmen, welche nach Wahrscheinlichkeit gewählt werden, und prüft dieselben durch die Vergleichung specieller von der Theorie gelieferter Folgerungen mit der Beobachtung.

Von solchen Annahmen legen wir folgende zwei der Theorie der Flüssigkeitsreibung zu Grunde.

1. Die Ursachen der Flüssigkeitsreibung sind moleculare Wirkungen, daher hängen die innerhalb eines unendlich kleinen Bereiches B erregten Druckkräfte nur von dem Zustande dieses Bereiches ab. Jede Bewegung eines nichtstarren Körpers stellt sich nun, wie wir im ersten Abschnitt dieses Theiles gesehen haben, innerhalb des Bereiches B als die Superposition einer parallelen Verschiebung, einer Drehung und einer Dehnung nach drei zu einander normalen Richtungen dar. Da nach dem Vorausgeschickten eine Reibung im Innern einer als Ganzes bewegten Flüssigkeit nicht stattfindet, so können die ersten beiden Antheile einen Einfluss auf die Reibung nicht besitzen. Da ferner im Ruhezustande keine innere Reibung auftritt, so können nicht die absoluten Werthe der Deformationen, sondern nur ihre Aenderungen mit der Zeit, die Deformationsgeschwindigkeiten, deren Grösse bestimmen.

Die Deformationsgeschwindigkeiten innerhalb des Bereiches B zerlegen sich nach dem Inhalt von § 26 in die Geschwindigkeiten der Axendehnungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x_x', \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y', \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z'$$

und die der Axenwinkeländerungen:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z', \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x', \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y';$$

von diesen Grössen allein müssen also nach dem Vorstehenden auch die von der innern Reibung herrührenden Druckkräfte abhängen.

Auf die Art der Abhängigkeit der letzteren von den ersteren bezieht sich die zweite Annahme, die wir vorausschicken.

2. Die Druckcomponenten der Flüssigkeitsreibung sind lineäre Functionen der Deformationsgeschwindigkeiten.

Das hypothetische dieser Festsetzung leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die Deformationsgeschwindigkeiten keineswegs unendlich kleine Grössen sind und es demnach von vornherein keineswegs erlaubt ist, eine Reihenentwickelung der Druckcomponenten nach Potenzen jener Unabhängigen mit den niedrigsten Gliedern abzubrechen. Indessen wird die gemachte Annahme in jedem Falle um so näher erfüllt sein, je kleiner die vorkommenden Deformationsgeschwindigkeiten sind, und die abzuleitenden Resultate werden, selbst wenn sie sich

unter Umständen nicht bewähren sollten, als Grenzwerthe, denen man bei kleinen Geschwindigkeiten sich nähert, Bedeutung behalten.

Ueberdies ist ersichtlich, dass von den nächsten Gliedern einer Reihenentwickelung erst diejenigen dritter Ordnung in Betracht kommen würden, weil die zweiter nicht mit dem Vorzeichen der Dilatationsgeschwindigkeiten das ihrige umkehren; die Annäherung erscheint hierdurch also noch bedeutender.

Da sechs Deformationsgeschwindigkeiten und sechs Druckcomponenten vorhanden sind, so wird die allgemeinste homogene lineäre Beziehung zwischen beiden 36 Constanten enthalten. Diese Anzahl reducirt sich aber durch folgende Ueberlegung sogleich auf neun.

Wir haben im ersten Abschnitt dieses Theiles gezeigt, dass für jedes System von Deformationen innerhalb des unendlich kleinen Bereiches B ein Coordinatensystem X^0, Y^0, Z^0, das sogenannte Hauptdilatationsaxensystem, existirt, in Bezug auf welches die Winkeländerungen y_z^0, z_x^0, x_y^0 und demnach auch ihre Geschwindigkeiten $(y_z^0)'$, $(z_x^0)'$, $(x_y^0)'$ verschwinden, womit zusammenhing, dass die Deformationen sich symmetrisch um dieses Axensystem gruppirten. Wir haben in dem zweiten Abschnitt für ein beliebiges System von Spannungen innerhalb des Bereiches B ein Axensystem X_1^0, Y_1^0, Z_1^0 kennen gelernt, das System der Hauptdruckaxen, in Bezug auf welches die tangentialen Druckcomponenten Y_z^0, Z_x^0, X_y^0 verschwanden, womit zusammenhing, dass die erregten Spannungen sich symmetrisch um dieses System ordneten.

Haben wir eine Flüssigkeit vor uns, bei welcher jede Richtung physikalisch gleichwerthig ist, so muss für jedes System von Deformationsgeschwindigkeiten und dadurch hervorgerufenen Druckkräften nach Symmetrie das Hauptdilatations- und das Hauptdruckaxensystem nothwendig zusammenfallen.

Dies giebt die Folgerung, dass bei Einführung dieses Coordinatensystemes X^0, Y^0, Z^0 nur drei lineäre Relationen mit drei Unabhängigen aufzustellen sind, welche also nur neun Constanten enthalten. Wir schreiben sie, indem wir den von der Geschwindigkeit unabhängigen Theil der Druckkräfte, der bei verschwindender Reibung allein übrig bleibt, mit p_h bezeichnet, hinzufügen:

$$\begin{aligned} X_x^0 &= p_1 - \left(a_{11}(x_x^0)' + a_{12}(y_y^0)' + a_{13}(z_z^0)'\right), \\ Y_y^0 &= p_2 - \left(a_{21}(x_x^0)' + a_{22}(y_y^0)' + a_{23}(z_z^0)'\right), \\ Z_z^0 &= p_3 - \left(a_{31}(x_x^0)' + a_{32}(y_y^0)' + a_{33}(z_z^0)'\right), \end{aligned} \tag{108'}$$

wobei das negative Vorzeichen ausdrückt, dass bei positiven Werthen a_{hk} die Kräfte den Deformationen entgegenwirken.

Diese Formeln vereinfachen sich noch sehr, wenn wir benutzen,

dass die drei Coordinatenaxen untereinander gleichwerthige Richtungen sind, und dass demgemäss eine Vertauschung der Coordinaten die Gleichungen nicht ändern darf. Denn ein System (I) von Deformationsgeschwindigkeiten, welches gegen das System X, Y, Z ebenso liegt, wie ein System (II) gegen das System Y, Z, X, muss auf ein System (I′) von Drucken führen, welches sich in dem Axensystem XYZ ebenso ausdrückt, als das durch (II) erregte System Drucke (II′) in dem Axensystem Y, Z, X.

Hieraus folgt, dass zwischen den neun Constanten a_{hk} und den drei p_h die Beziehungen stattfinden müssen:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2a + a', \qquad p_1 = p_2 = p_3 = p,$$
$$a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = a_{12} = a_{21} = a',$$

worin p, a und a' neue Bezeichnungen sind. Die Formeln (108) werden hierdurch, wenn man noch die Abkürzung ϑ' für die Geschwindigkeit der räumlichen Dilatation einführt, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vartheta' \tag{108''}$$

setzt:

$$\begin{aligned} X_x^0 &= p - \left(2a(x_x^0)' + a'(\vartheta^0)'\right), \\ Y_y^0 &= p - \left(2a(y_y^0)' + a'(\vartheta^0)'\right), \\ Z_z^0 &= p - \left(2a(z_z^0)' + a'(\vartheta^0)'\right). \end{aligned} \tag{108'''}$$

Indess setzen diese Gleichungen ein eigenartiges Axensystem voraus, das weder im Voraus bekannt, noch selbst innerhalb der ganzen betrachteten Flüssigkeit von gleicher Lage ist, da es ja nur durch deren Verhalten innerhalb des Bereiches B der Stelle x, y, z definirt ist. Für die Anwendung müssen daher die obigen Formeln (108‴) noch auf ein beliebiges Coordinatensystem transformirt werden und zwar in ihren beiden Seiten.

Dies geschieht sehr leicht mit Hülfe der Formeln (17) und (36), wenn man darin benutzt, dass für das System X^0, Y^0, Z^0 sowohl

$$(y_z^0)', \ (z_x^0), \ (x_y^0)' \quad \text{als} \quad Y_z^0, \ Z_x^0, \ X_y^0$$

verschwinden, und dass ϑ' in allen rechtwinkligen Coordinatensystemen sich in derselben Form ausdrückt. Man erhält so als schliessliches Resultat:

$$\begin{aligned} X_x &= p - (2ax_x' + a'\vartheta'), \\ Y_y &= p - (2ay_y' + a'\vartheta'), \\ Z_z &= p - (2az_z' + a'\vartheta'), \\ Y_z = -\,ay_z', \quad Z_x &= -\,az_x', \quad X_y = -\,ax_y'. \end{aligned} \tag{109}$$

Die beiden Constanten a und a' heissen die Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit; beachtet man die Dimensionen der Druckcomponenten

nach (19‴) und der Deformationsgeschwindigkeiten nach (108), so findet man für ihre Dimension den Werth:

$$[a] = [a'] = [m\,l^{-1}\,t^{-1}].$$

Ist die reibende Flüssigkeit incompressibel, also auch $\vartheta' = 0$, so hängt ihre Bewegung nur von a allein ab.

Setzt man die erhaltenen Resultate in die Bewegungsgleichungen (25) ein, so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{du}{dt} &= \varepsilon X - \frac{\partial p}{\partial x} + a\Delta u + (a + a')\frac{\partial \vartheta'}{\partial x},\\
\varepsilon\frac{dv}{dt} &= \varepsilon Y - \frac{\partial p}{\partial y} + a\Delta v + (a + a')\frac{\partial \vartheta'}{\partial y},\\
\varepsilon\frac{dw}{dt} &= \varepsilon Z - \frac{\partial p}{\partial z} + a\Delta w + (a + a')\frac{\partial \vartheta'}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{110}$$

Zu diesen Formeln tritt noch weiter, als für jeden Punkt im Innern der Flüssigkeit geltend, das Gesetz, welchem die Dichtigkeit ε folgt, also im Falle dieselbe nur eine Function des Druckes ist, die Gleichung:

$$\varepsilon = F(p), \quad \text{oder} \quad \int\frac{dp}{\varepsilon} = \Pi, \tag{110'}$$

ferner die Gleichung der Continuität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \vartheta' + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \tag{110''}$$

II. Die Bedingungen für die Oberfläche der Flüssigkeit bilden wir unter der Voraussetzung, dass dieselbe von einer zweiten Flüssigkeit begrenzt wird; dieser Fall umschliesst den einer festen Wand, wie auch den, dass die Grenze den Abschluss gegen ein Gas oder den leeren Raum hin bildet. Haben die Elemente der beiden Flüssigkeiten (h) und (k) an der Stelle x, y, z die Geschwindigkeitscomponenten $\overline{u}_h, \overline{v}_h, \overline{w}_h$ und $\overline{u}_k, \overline{v}_k, \overline{w}_k$, so folgt aus (18″) zunächst die Gleichung

$$(\overline{u}_h - \overline{u}_k)\cos(n, x) + (\overline{v}_h - \overline{v}_k)\cos(n, y) + (\overline{w}_h - \overline{w}_k)\cos(n, z) = 0. \tag{111}$$

Weiter kommen die in (27′) enthaltenen Bedingungen für die Druckkräfte zur Anwendung, und zwar einmal für ein Volumenelement innerhalb der Flüssigkeit (h), einmal für eines innerhalb (k).

Flüssigkeiten, welche innere Reibung besitzen, reiben sich auch an einander oder an einer festen Wand; in Folge dessen wirken in der Grenze zwei Kräfte, welche den Theilen der $X_x \ldots$ oben in (109) entsprechen, ein normaler Druck p_{hk} und eine Reibungskraft R_{hk}, welche man in Analogie zu der Reibung zwischen zwei starren Körpern der relativen Geschwindigkeit entgegen wirkend annimmt. Die relative Geschwindigkeit $\overline{V}_{hk}$ von (h) gegen (k) hat die Componenten

$$\overline{u}_h - \overline{u}_k, \qquad \overline{v}_h - \overline{v}_k, \qquad \overline{w}_h - \overline{w}_k$$

und demnach eine resultirende Grösse

$$\overline{V}_{hk} = \sqrt{(u_h - \overline{u}_k)^2 + (\overline{v}_h - \overline{v}_k)^2 + (\overline{w}_h - \overline{w}_k)^2};$$

demgemäss hat die Reibung R_{hk}, welche die Flüssigkeit (h) erfährt, die Componenten

$$-R_{hk}\frac{u_h - \overline{u}_k}{\overline{V}_{hk}}, \qquad -R_{hk}\frac{\overline{v}_h - \overline{v}_k}{\overline{V}_{hk}}, \qquad -R_{hk}\frac{\overline{w}_h - \overline{w}_k}{\overline{V}_{hk}},$$

und Analoges gilt für die auf (k) wirkende. Daher folgen aus den Gleichungen (27′) die Systeme:

$$\left.\begin{aligned}
(X_n)_h + \overline{p}_{hk}\cos(n_h, x) - R_{hk}\frac{\overline{u}_h - \overline{u}_k}{\overline{V}_{hk}} &= 0,\\
(Y_n)_h + \overline{p}_{hk}\cos(n_h, y) - R_{hk}\frac{\overline{v}_h - \overline{v}_k}{\overline{V}_{hk}} &= 0,\\
(Z_n)_h + \overline{p}_{hk}\cos(n_h, z) - R_{hk}\frac{\overline{w}_h - \overline{w}_k}{\overline{V}_{hk}} &= 0;\\
(X_n)_k + \overline{p}_{kh}\cos(n_k, x) - R_{kh}\frac{\overline{u}_k - \overline{u}_h}{\overline{V}_{kh}} &= 0,\\
(Y_n)_k + \overline{p}_{kh}\cos(n_k, y) - R_{kh}\frac{\overline{v}_k - \overline{v}_h}{\overline{V}_{kh}} &= 0,\\
(Z_n)_k + \overline{p}_{kh}\cos(n_k, z) - R_{kh}\frac{\overline{w}_k - \overline{w}_h}{\overline{V}_{kh}} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (111')$$

n_h bezeichnet hierin die äussere Normale auf der Flüssigkeit (h), ebenso n_k auf (k).

Nach dem Satz von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist p_{hk} und p_{kh}, R_{hk} und R_{kh}, und nach ihrer Definition $\overline{V}_{hk}$ und $\overline{V}_{kh}$ gleich und entgegengesetzt gerichtet; die Summe der entsprechenden Formeln beider Systeme führt also auf (27) zurück.

Die Reibung in der Grenze verschwindet nach der Beobachtung im Zustande der Ruhe, sie muss also eine Function der relativen Geschwindigkeit $\overline{V}_{hk}$ sein, und die einfachste Annahme, welche obenein der über die innere Reibung gemachten entspricht, ist die, sie mit $\overline{V}_{hk}$ proportional zu setzen. Schreiben wir demgemäss

$$R_{hk} = \overline{a}\,\overline{V}_{hk}, \qquad (111'')$$

so ist $\overline{a}$, die Constante der äussern Reibung, eine nur von der Natur der beiden zusammentreffenden Körper abhängige Grösse; ihre Dimension ist nach den Beziehungen, durch welche sie eingeführt ist:

$$[\overline{a}] = [m l^{-2} t^{-1}].$$

Tritt an Stelle der Flüssigkeit (k) ein fester Körper, so wollen wir für dessen Geschwindigkeitscomponenten im Oberflächenelement do

die Bezeichnung u_k, v_k, w_k, für diejenigen der Flüssigkeit $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ beibehalten; die Kräfte, welche die Flächeneinheit des Körpers seitens der Flüssigkeit erfährt, seien $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, wo dann also nach (27'):

$$\overline{X} = -(X_n)_k, \qquad \overline{Y} = -(Y_n)_k, \qquad \overline{Z} = -(Z_n)_k$$

ist; X_n, Y_n, Z_n seien die Drucke in der Flüssigkeit.

Dann folgern wir aus den Gleichungen (111) bis (111'') die Bedingungen:

$$(\overline{u} - u_k)\cos(n, x) + (\overline{v} - v_k)\cos(n, y) + (\overline{w} - w_k)\cos(n, z) = 0, \quad (112)$$

$$\begin{aligned}\overline{X} &= +\overline{X}_n = -\overline{p}_k\cos(n, x) + \overline{a}(\overline{u} - u_k),\\ \overline{Y} &= +\overline{Y}_n = -\overline{p}_k\cos(n, y) + \overline{a}(\overline{v} - v_k),\\ \overline{Z} &= +\overline{Z}_n = -\overline{p}_k\cos(n, z) + \overline{a}(\overline{w} - w_k).\end{aligned} \quad (112')$$

Hierin bezeichnet n die äussere Normale auf der Flüssigkeit; nehmen wir dazu eine Richtung s parallel der relativen Geschwindigkeit $\overline{V}_k$ der Flüssigkeit gegen den Körper und eine Richtung l normal zu diesen beiden und bezeichnen die auf sie bezogenen Kraftcomponenten resp. mit $\overline{N}$, $\overline{S}$, $\overline{L}$ und $\overline{N}_n$, $\overline{S}_n$, $\overline{L}_n$, so erhalten wir aus (112') mit Hülfe der Factoren $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ und $\cos(s, x)$, $\cos(s, y)$, $\cos(s, z)$ und $\cos(l, x)$, $\cos(l, y)$, $\cos(l, z)$ die Gleichungen:

$$\overline{N} = \overline{N}_n = -\overline{p}_k, \qquad \overline{S} = \overline{S}_n = +\overline{a}\,\overline{V}_k, \qquad \overline{L} = \overline{L}_n = 0, \quad (112'')$$

deren Richtigkeit sofort einleuchtet.

Beachtet man die Werthe der Componenten $X_x \ldots$ nach (109) und bezeichnet mit n_n', s_n', l_n' dieselben Ausdrücke für das System N, S, L, die für das System X, Y, Z durch x_x', y_x', z_x' gegeben sind, so erhält man auch:

$$\overline{N} = \overline{p} - 2\overline{a}\,\overline{n_n'} - a'\vartheta' = -\overline{p}_k, \quad \overline{S} = -a\,\overline{s_n'} = +\overline{a}\,\overline{V}_k, \quad \overline{L} = -a\,\overline{l_n'} = 0; \quad (112''')$$

diese Formeln sind unter Umständen für die Anwendung bequemer, als die ursprünglichen (112').

Bezüglich der Reibung der Flüssigkeit gegen den festen Körper, der sogenannten äussern Reibung, haben zwei extreme Fälle besondere Bedeutung.

Ist die Constante $\overline{a}$ ausserordentlich gross, so erfordern die vorstehenden Gleichungen sehr kleine Werthe von $\overline{V}_k$, bei unendlichem $\overline{a}$ muss $\overline{V}_k$ verschwinden und daher die dem Körper benachbarte Flüssigkeit sich vollständig mit diesem bewegen, ihn, wie man sagt, „benetzen“. Dies geschieht in den bei Weitem meisten Fällen, wo sich Flüssigkeiten in Berührung mit festen Körpern befinden, und wo man Ursache hat, das als nicht streng stattfindend anzunehmen, zeigen die

weiter unten zu besprechenden Beobachtungsmethoden eine so nahe Erfüllung dieser Bedingung, dass man an Stelle der Gleichung (112) fast immer die einfachere Form der Grenzbedingungen

$$\bar{u} = u_k, \qquad \bar{v} = v_k, \qquad \bar{w} = w_k \tag{113}$$

benutzen kann.

Die Kräfte, welche der Körper seitens der Flüssigkeit erfährt, bestimmen sich nach (112'''):

$$\bar{N} = \bar{p} - 2\bar{a}\bar{n}_n' - \bar{a}'\bar{\vartheta}', \qquad \bar{S} = -\bar{a}\bar{s}_n', \qquad \bar{L} = 0; \tag{113'}$$

ähnlich, aber complicirter für ein beliebiges Coordinatensystem nach (112'):

$$\bar{X} = \bar{X}_n, \qquad \bar{Y} = \bar{Y}_n, \qquad \bar{Z} = \bar{Z}_n. \tag{113''}$$

Ein zweiter extremer Fall ist der, dass die äussere Reibung, also $\bar{a}$, unendlich klein ist; dann bleibt Gleichung (112) bestehen, aber in (112''') wird ausser $\bar{L}$ auch $\bar{S}$ gleich Null, der begrenzende Körper erleidet nur einen Normaldruck seitens der Flüssigkeit und umgekehrt.

Aehnliche Bedingungen gelten in der Grenze gegen eine nicht reibende Flüssigkeit, z. B. ein Gas oder gegen den leeren Raum.

III. Die vorstehenden sehr allgemeinen und complicirten Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir eine incompressible Flüssigkeit voraussetzen, also $\vartheta' = 0$ nehmen, und uns auf äussere Kräfte beschränken, die ein Potential Φ haben.

Dann wird aus den Gleichungen (109):

$$\begin{aligned} X_x &= p - 2ax_x', & Y_y &= p - 2ay_y', & Z_z &= p - 2az_z', \\ Y_z &= -ay_z', & Z_x &= -az_x', & X_y &= -ax_y', \end{aligned} \tag{114}$$

aus (110):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x} + \frac{a}{\varepsilon}\Delta u, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y} + \frac{a}{\varepsilon}\Delta v, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z} + \frac{a}{\varepsilon}\Delta w, \end{aligned} \tag{114'}$$

aus (110') und (110''):

$$\Pi = \frac{p}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{114''}$$

aus (112'''):

$$\bar{N} = \bar{p} - 2\bar{a}\bar{n}_n' = -p_k, \quad \bar{S} = -\bar{a}\bar{s}_n' = +\bar{a}\bar{V}_k, \quad \bar{L} = -\bar{a}\bar{l}_n' = 0. \tag{114'''}$$

Nachdem wir bei nichtreibenden Flüssigkeiten eine so grosse Vereinfachung durch Einführung eines Geschwindigkeitspotentiales erhalten haben, liegt es nahe, zu fragen, ob auch in reibenden Flüssigkeiten reine Potentialbewegungen möglich sind.

Setzen wir also

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und beachten die aus (114″) folgende Beziehung

$$\Delta \varphi = 0,$$

so erkennen wir, dass aus den Hauptgleichungen (114′) bei Potentialbewegungen der Einfluss der innern Reibung vollständig verschwindet.

In einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit, die mit beliebigen Quellen und Senken versehen ist, sind also mit oder ohne innere Reibung dieselben Potentialbewegungen möglich und erfordern dieselben äusseren Kräfte und dieselbe Vertheilung des Druckes.

An den Grenzen können wir mit dem Geschwindigkeitspotential im Allgemeinen nur einer Oberflächenbedingung — z. B. der bei festen Wänden nach (112) stets geltenden $d\varphi/dn = 0$ — genügen; da aber bei wirkender Reibung in der Grenze für die Geschwindigkeiten drei von einander unabhängige Gleichungen zu erfüllen sind, so ist es im Allgemeinen unmöglich, die Geschwindigkeiten durch ein Geschwindigkeitspotential darzustellen.

In einer begrenzten reibenden Flüssigkeit ist eine reine Potentialbewegung im Allgemeinen unmöglich.

Es werden daher in Folge der Reibung stets Wirbel auftreten.

Bilden wir nach p. 372 die Gleichungen für die Rotationscomponenten λ, μ, ν, so erhalten wir jetzt:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{a}{\varepsilon} \Delta \lambda,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{a}{\varepsilon} \Delta \mu,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{a}{\varepsilon} \Delta \nu.$$

Die Wirbelbewegung hat also in einer reibenden Flüssigkeit auch bei Abwesenheit einer Begrenzung einen andern Charakter als in einer nicht reibenden; speciell gilt in ihr im Allgemeinen nicht der fundamentale Satz, dass ein Theilchen, welches zu irgend einer Zeit nicht rotirt, auch niemals in Drehung geräth.

Um von den vorstehenden allgemeinen Gleichungen Anwendungen auf bestimmte Probleme zu machen, die mit elementaren Hülfsmitteln durchführbar sind, betrachten wir, wie früher, ihnen entsprechende Bewegungen in einer unbegrenzten Flüssigkeit und versuchen sie dann längs aus Stromlinien gebildeten Flächen durch feste Wände zu begrenzen. Für so gewählte Flächen ist die erste Bedingung (112) stets

erfüllt, es handelt sich also, da $\overline{p}_k$ an starren Flächen jeden Werth annehmen kann, im Allgemeinen darum, noch zwei Gleichungen durch die Geschwindigkeiten in der Grenze zu befriedigen.

Der einfachste Fall, der die Reibung zur Wirkung kommen lässt, ist offenbar der, dass eine stationäre Strömung parallel einer Coordinatenaxe stattfindet. Setzen wir

$$u = v = 0,$$

so nehmen die Gleichungen (114') die Form an

$$0 = \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y}, \qquad \frac{a}{\varepsilon} \Delta' w = \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z}, \tag{115}$$

wobei schon benutzt ist, dass (114'') liefert:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{115'}$$

Jede Cylinderfläche parallel der Z-Axe ist von Stromlinien erfüllt, kann also eine feststehende Begrenzung bilden, wenn die aus (114''') hierfür folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$-a\frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = \overline{a}\,\overline{w}, \qquad \frac{\partial \overline{w}}{\partial l} = 0,$$

in denen unter n die äussere Normale auf der Begrenzung und unter l die normal zu n und z in der Begrenzung liegende Richtung verstanden ist. Die letzte Gleichung lässt sich über die Querschnittscurve der Cylinderfläche integriren und giebt, verbunden mit (115'), das Resultat, dass die Geschwindigkeit längs der festen Wand einen constanten Werth haben muss. Demnach kann man die allein übrigen Oberflächenbedingungen auch schreiben:

$$-a\frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = \overline{a}\,\overline{w}, \qquad \overline{w} = \text{Const.} \tag{115''}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (115) folgt, dass $(\Phi + \Pi)$ von x und y, aus (115'), dass w von z unabhängig ist, die dritte Gleichung (115) kann also nur dadurch erfüllt werden, dass jedes Glied für sich gleich einer Constanten C wird; sie reducirt sich daher auf:

$$\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z} = C, \qquad \Delta' w = \frac{\varepsilon}{a}\,C. \tag{115'''}$$

Aus der ersteren folgt:

$$\Phi + \Pi = Cz + C'; \tag{116}$$

dies zeigt, dass Φ und Π beliebig gegeben sein können, wenn nur ihre Summe eine lineäre Function von z ist.

Zwei besonders einfache Fälle sind folgende.

a) Es wirkt keine äussere Kraft, Φ ist gleich Null, und es ist der Druck p_0 und p_1 in zwei Querschnitten z_0 und z_1 gegeben; dann ist:

$$p_0 = \varepsilon(Cz_0 + C'), \qquad p_1 = \varepsilon(Cz_1 + C'),$$

also

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\frac{p_1 - p_0}{z_1 - z_0} \quad \text{und} \quad p = \frac{(p_1 - p_0)z + p_0 z_1 - p_1 z_0}{z_1 - z_0}. \tag{116'}$$

b) Es wirkt parallel der Z-Axe die Schwere, und im Querschnitt z_0 und z_1 hat der Druck den gleichen Werth p_0. Dann ist p überall $= p_0$ und

$$\Phi = -gz, \quad \text{also} \quad C = -g. \text{ —} \tag{116''}$$

Die zweite Gleichung (115‴) $\Delta' w = C\varepsilon/a$ kann in sehr verschiedener Weise erfüllt werden; wir beschränken uns auf einige Fälle, in denen sie sich in eine gewöhnliche Differentialgleichung verwandelt.

Der einfachste dieser Fälle ist der, dass w von y unabhängig ist; dann wird

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon C}{a}, \quad \text{also} \quad w = \frac{\varepsilon C}{a}\left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right), \tag{116‴}$$

und die Geschwindigkeit in Ebenen parallel der YZ-Axe constant.

Die hierdurch gegebene Bewegung besteht aus einer Potentialbewegung

$$w_1 = \frac{\varepsilon C C_2}{a}, \quad \text{der ein Potential} \quad \varphi = \frac{\varepsilon C}{a}(C_2 z + C_2')$$

entspricht, und aus einer Wirbelbewegung

$$w_2 = \frac{C\varepsilon}{a}\left(\frac{x^2}{2} + C_1 x\right),$$

deren Wirbelfäden der Y-Axe parallel sind und eine Rotationsgeschwindigkeit

$$\mu = -\frac{C\varepsilon}{2a}(x + C_1)$$

besitzen.

Als Begrenzung kann man zwei feste der YZ-Ebene parallele Wände z. B. in $x = 0$ und $x = h$ wählen, deren Reibung gegen die Flüssigkeit verschieden sein darf; für sie ist die letzte Bedingung (115″) durch den erhaltenen Werth von w bereits erfüllt. Die erste Gleichung (115″) liefert, auf beide Wände angewandt, die beiden Bedingungen, dass

$$\text{für } x = 0 \quad + a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \bar{a}_0 w_0,$$

$$\text{für } x = h \quad - a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_h = \bar{a}_1 w_h$$

sein muss, unter $\bar{a}_0$ und $\bar{a}_1$ die betreffenden äussern Reibungsconstanten verstanden. Man erhält hieraus:

$$w = \frac{\varepsilon C}{2a}\left(x^2 - \frac{h(x\bar{a}_0 + a)(2a + \bar{a}_1 h)}{a(\bar{a}_0 + \bar{a}_1) + h\,\bar{a}_0\,\bar{a}_1}\right). \tag{117'}$$

In dem speciellen Falle, dass beide Wände gleichartig sind, ist $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \bar{a}$, also

$$w = \frac{\varepsilon C}{2a}\left(x^2 - h\left(x + \frac{a}{\bar{a}}\right)\right), \tag{117''}$$

und die Bewegung symmetrisch in Bezug auf die Ebene $x = h/2$.

Das zwischen diesen beiden Wänden längs einer Breite b ausfliessende Flüssigkeitsvolumen Ω findet sich:

$$\Omega = b\int_0^h w\,dx = -\frac{\varepsilon C b h^3}{12a}\left(1 + \frac{6a}{h\bar{a}}\right).$$

Die Constante C bestimmt sich entweder durch Ω oder durch Φ und Π gemäss (116′) und (116″). Für die oben besprochenen speciellen Fälle wird:

$$\Omega = +\frac{p_0 - p_1}{z_1 - z_0}\frac{bh^3}{12a}\left(1 + \frac{6a}{h\bar{a}}\right) \quad \text{resp.} \quad \Omega = +\varepsilon g\frac{bh^3}{12a}\left(1 + \frac{6a}{h\bar{a}}\right).$$

Diese Formeln können zur Berechnung von a und $\bar{a}$ aus beobachtetem Ω dienen, da man sie auf den Ausfluss aus einem Rohr von rechteckigem Querschnitt anwenden kann, falls die eine Seite des Querschnittes (b) sehr gross gegen die andere (h) ist.

Ist $\bar{a}_1 = 0$, $\bar{a}_0 = \bar{a}$, so haben wir den Fall, dass die Ebene $x = h$ keine Reibung ausübt, also etwa die freie Oberfläche darstellt, wenn zugleich p in ihr constant ist. Es folgt dann aus (117′):

$$w = \frac{\varepsilon C}{2a}\left(x^2 - 2h\left(x + \frac{a}{\bar{a}}\right)\right); \tag{117'''}$$

die Formel ist dieselbe wie im vorigen Falle, nur h mit $2h$ vertauscht, eine Thatsache, deren Bedeutung man sich leicht klar macht. Die Bewegung lässt sich deuten als die Strömung in einem sehr breiten Canal mit ebenem, gegen die Horizontale geneigtem Boden. Ist der Neigungswinkel der Z-Axe gleich α und die XZ-Ebene vertical, die X-Axe nach oben positiv angenommen, so ist

$$\Phi = +g(x\cos\alpha - z\sin\alpha);$$

damit nun

$$\Phi + \Pi = Cz + C'$$

sei, muss

$$\Pi = \frac{p}{\varepsilon} = C' - gx\cos\alpha, \qquad C = -g\sin\alpha$$

sein. C' bestimmt sich durch den Druck p_0 auf die freie Oberfläche, sodass wir als Endresultat erhalten:

$$w = \frac{\varepsilon g\sin\alpha}{2a}\left(2h\left(x + \frac{a}{\bar{a}}\right) - x^2\right),$$

$$p = p_0 + \varepsilon g(h - x)\cos\alpha. \text{ —}$$

Die zweite Gleichung (115‴)

$$\Delta' w = \frac{\varepsilon C}{a}$$

verwandelt sich auch noch in dem Falle in eine gewöhnliche Differentialgleichung, dass w nur eine Function des Abstandes e von der Z-Axe ist. Dann nimmt sie wegen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{e}\frac{dw}{de}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{e}\frac{dw}{de},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{y^2}{e^3}\frac{dw}{de} + \frac{x^2}{e^2}\frac{d^2 w}{de^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{x^2}{e^3}\frac{dw}{de} + \frac{y^2}{e^2}\frac{d^2 w}{de^2}$$

die Form an:

$$\frac{1}{e}\frac{dw}{de} + \frac{d^2 w}{de^2} = \frac{1}{e}\frac{d\left(e\frac{dw}{de}\right)}{de} = \frac{\varepsilon C}{a}, \tag{118}$$

und liefert integrirt:

$$w = \frac{\varepsilon C}{4a}(e^2 + C_1\, le + C_2). \tag{118'}$$

Wiederum haben wir also eine Potentialbewegung

$$w_1 = \frac{\varepsilon C C_2}{4a} \quad \text{vom Potential} \quad \varphi = \frac{\varepsilon C}{4a}(C_2 z + C_2')$$

und eine Wirbelbewegung

$$w_2 = \frac{\varepsilon C}{4a}(e^2 + C_1\, le)$$

erhalten; letztere giebt kreisförmige Wirbelfäden um die Z-Axe, denn es ist:

$$\lambda = + \frac{\varepsilon C y}{4a}\left(1 + \frac{C_1}{2e^2}\right), \qquad \mu = - \frac{\varepsilon C x}{4a}\left(1 + \frac{C_1}{2e^2}\right).$$

Die resultirende Rotationsgeschwindigkeit ist

$$\tau = \frac{\varepsilon C e}{4a}\left(1 + \frac{C_1}{2e^2}\right).$$

Die durch (118′) gegebene Bewegung können wir nach (115″) durch zwei feste coaxiale Cylinderflächen von den Radien R_i und R_a und mit den Reibungsconstanten $\overline{a}_i$ und $\overline{a}_a$ begrenzen, indem wir setzen:

$$\text{für } e = R_i \qquad + a\frac{d\overline{w}}{de} = \overline{a}_i\,\overline{w},$$

$$\text{für } e = R_a \qquad - a\frac{d\overline{w}}{de} = \overline{a}_a\,\overline{w}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= + \frac{1}{n}\left[\overline{a}_a R_i(2a - R_i\overline{a}_i) + \overline{a}_i R_a(2a + R_a\overline{a}_a)\right], \\ C_2 &= - \frac{1}{n}\left[\left(\overline{a}_a\, l R_a + \frac{a}{R_a}\right) R_i(2a - R_i\overline{a}_i) + \left(\overline{a}_i\, l R_i - \frac{a}{R_i}\right) R_a(2a + R_a\overline{a}_a)\right], \end{aligned}\right\} \tag{118''}$$

wobei gesetzt ist:

$$\bar{a}_a\left(\bar{a}_i l R_i - \frac{a}{R_i}\right) - \bar{a}_i\left(\bar{a}_a l R_a + \frac{a}{R_a}\right) = n.$$

In dem speciellen Falle, dass der innere Cylinder verschwindet, also $R_i = 0$, $R_a = R$ ist, gilt:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -\frac{R(2a + R\bar{a})}{a}.$$

Das während der Zeiteinheit ausfliessende Volumen Ω bestimmt sich allgemein zu

$$\Omega = \frac{\pi\varepsilon C}{8a}\left[(R_a^4 - R_i^4) + C_1\left(R_a^2(lR_a^2 - 1) - R_i^2(lR_i^2 - 1)\right) + 2C_2(R_a^2 - R_i^2)\right]; \tag{118}$$

in dem speciellen Falle, dass $R_i = 0$, $R_a = R$ ist, findet sich:

$$\Omega = \frac{\pi\varepsilon C}{8a}(R^4 + 2C_2 R^2),$$

und nach Einsetzen des Werthes von C_2:

$$\Omega = -\frac{\pi\varepsilon C}{8a}\left(R^4 + 4\frac{R^3 a}{\bar{a}}\right).$$

Wirkt nur eine Druckdifferenz, so ergiebt dies nach (116′):

$$\Omega = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{8a(z_1 - z_0)}\left(R^4 + 4\frac{R^3 a}{\bar{a}}\right);$$

wirkt nur die Schwere, so folgt nach (116″):

$$\Omega = \frac{\pi\varepsilon g}{8a}\left(R^4 + 4\frac{R^3 a}{\bar{a}}\right).$$

Beobachtungen über den Ausfluss aus horizontalen Röhren, welche ziemlich lang gegen ihren Querschnitt sein müssen, damit die Voraussetzungen, die oben gemacht sind, der Wirklichkeit entsprechen, sind von Poiseuille und Hagen angestellt und haben Resultate ergeben, die mit der Annahme $\bar{a} = \infty$ verträglich sind, also der einfacheren Formel entsprechen:

$$\Omega = \frac{\pi\varepsilon g R^4}{8a}.$$

§ 35. Mechanik reibender Flüssigkeiten; Beschränkung auf unendlich kleine Geschwindigkeiten.

I. Die Behandlung der allgemeinen Gleichungen (114′) ist hauptsächlich deshalb eine schwierige, weil dieselben nicht lineär sind und in den Gliedern zweiten Grades die Geschwindigkeiten u, v, w neben einander enthalten, sodass eine Sonderung der Unbekannten unmöglich ist. Wir umgehen diese Schwierigkeit, wenn wir uns auf so kleine Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsänderungen

nach den Coordinaten beschränken, dass wir bis zu einem gewünschten Genauigkeitsgrade die Producte $u\,\partial u/\partial x$ u. s. f. neben den in die Reibungsconstante a multiplicirten lineären Gliedern $a\,\partial^2 u/\partial x^2, \ldots$ vernachlässigen können.

Dadurch erhalten die Hauptgleichungen (114′) die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x} &= \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y} &= \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z} &= \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta w. \end{aligned} \tag{119}$$

Wir können dieselben zwar ohne Rücksicht darauf benutzen, durch welche Vernachlässigungen sie entstanden sind, also auch innerhalb der Flüssigkeit Quellpunkte und discrete Wirbelfäden annehmen, in denen die Geschwindigkeiten unendlich werden; aber für unser specielles Problem sind immer nur diejenigen Bereiche anwendbar, innerhalb deren die stattfindende Bewegung die gemachten Annahmen rechtfertigt.

Ist die Bewegung stationär, so erhalten wir noch einfacher

$$\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x} = \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta u, \quad \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y} = \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta v, \quad \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z} = \frac{a}{\varepsilon}\,\Delta w; \tag{119′}$$

dazu kommt

$$\Pi = \frac{p}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{119″}$$

Aus den Gleichungen (119′) folgt mit Rücksicht auf die letzte (119″):

$$\Delta(\Phi + \Pi) = 0. \tag{120}$$

Wir bemerken, dass jede Potentialbewegung die Gleichungen (119′) und (119″) erfüllt, und zwar, was für die Anwendungen wichtig ist, speciell $(\Phi + \Pi)$ zu einer Constanten macht; ferner sehen wir, dass jede Wirbelbewegung ihr entspricht, welche den Bedingungen

$$\Delta\lambda = 0, \qquad \Delta\mu = 0, \qquad \Delta\nu = 0 \tag{120′}$$

genügt, und dass eine solche eine Veränderlichkeit von $\Phi + \Pi$ mit dem Orte verlangt.

Nach p. 399 haben Wirbelbewegungen, welche den Bedingungen (120′) genügen, die Eigenschaft, dass jedes Theilchen der Flüssigkeit seinen Rotationszustand dauernd beibehält; es sind also die bei nicht reibenden Flüssigkeiten über die Bewegung von Wirbelfäden geltenden Sätze hier ebenfalls anzuwenden.

Da eine reine Potentialbewegung, wie wir oben gesehen haben, im Allgemeinen mit den Grenzbedingungen für reibende Flüssigkeiten im Widerspruch ist, so wird man, um die Möglichkeit einer Begrenzung

zu erhalten, Wirbelbewegungen allein oder mit Potentialbewegungen combinirt anzunehmen haben. Dabei ist hervorzuheben, dass, weil die Gleichungen (119′) und (119″) in den u, v, w und $(\Phi + \Pi)$ homogen lineär sind, die Combination mehrerer Bewegungen, die einzeln ihnen genügen, auf einen Werth $\Phi + \Pi$ führt, welcher ebenfalls die Summe der den einzelnen Theilen entsprechenden ist.

II. Die auf p. 377 bis 381 betrachteten Wirbelbewegungen sind sämmtlich solche, welche den Bedingungen (120′) entsprechen.

1. Der Ansatz (98)

$$\lambda_1 = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x}, \qquad \mu_1 = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y}, \qquad \nu_1 = q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \tag{121}$$

giebt nach p. 380:

$$u_1 = -\frac{2qy}{r^3}, \qquad v_1 = +\frac{2qx}{r^3}, \qquad w_1 = 0, \tag{121′}$$

und dadurch eine Rotation der Flüssigkeit um die Z-Axe, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit in concentrischen Kugeln constant ist; wir können sie also begrenzen durch eine starre Kugel, welche mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt.

Wir verallgemeinern diese Lösung, indem wir die p. 377 aus dem Ansatz (95)

$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \nu_2 = n \tag{121″}$$

folgenden Beziehungen

$$u_2 = -ny, \qquad v_2 = +nx, \qquad w_2 = 0, \tag{121‴}$$

welche eine Rotation der ganzen Flüssigkeit mit durchweg constanter Winkelgeschwindigkeit darstellen, hinzufügen und bilden:

$$u = -y\left(\frac{2q}{r^3} + n\right), \qquad v = +x\left(\frac{2q}{r^3} + n\right), \qquad w = 0. \tag{122}$$

Diesen Werthen entspricht die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \left(\frac{2q}{r^3} + n\right),$$

welche ebenfalls in concentrischen Kugeln constant ist und zwei Constanten enthält, also an zwei Kugeln vom Radius R_a und R_i gegebene Werthe ω_a und ω_i annehmen kann; da sie im Coordinatenanfang unendlich wird, muss dieser Punkt ausserhalb der Flüssigkeit liegen.

Man kann die Lösung (122) also dem Problem anpassen, dass eine Flüssigkeit zwischen zwei concentrischen benetzten Kugeln eingeschlossen ist, welche um dieselbe Axe mit beliebigen constanten Geschwindigkeiten rotiren.

Die Constanten q und n bestimmen sich dadurch so, dass allgemein wird:

$$\omega = \frac{(\omega_i - \omega_a) R_a^3 R_i^3 + (\omega_a R_a^3 - \omega_i R_i^3) r^3}{r^3 (R_a^3 - R_i^3)}. \tag{122'}$$

Steht die innere Kugel fest, so gilt einfacher:

$$\omega = \frac{\omega_a R_a^3 (r^3 - R_i^3)}{r^3 (R_a^3 - R_i^3)}. \tag{122''}$$

Wir wollen das Drehungsmoment um die Z-Axe berechnen, welches die innere Kugel in Folge der Rotation der äussern erleidet. Hierzu benutzen wir, dass nach (114‴) die Componente $\overline{S}$ der Einwirkung der Flüssigkeit auf das Oberflächenelement des festen Körpers, genommen nach der Richtung der relativen Bewegung, gegeben ist durch

$$\overline{S} = - a s_n';$$

das gesammte Moment ist demnach:

$$\mathsf{N} = \int_{(o)} e \overline{S}\, do = - a \int_{(o)} e s_n'\, do. \tag{123}$$

Da die Richtung der äussern Normale derjenigen des Radius entgegengesetzt und eine Bewegung ihr parallel nicht vorhanden ist, so findet sich

$$s_n' = - \frac{ds'}{dr},$$

wobei

$$s' = e\omega = \frac{\omega_a R_a^3}{R_a^3 - R_i^3} \left(r - \frac{R_i^3}{r^2} \right) \sin\chi$$

ist, falls χ den Winkel zwischen der $+r$- und der $+Z$-Richtung bezeichnet.

Man erhält daher:

$$s_n' = - \frac{\omega_a R_a^3}{R_a^3 - R_i^3} \left(1 + \frac{2 R_i^3}{r^3} \right) \sin\chi, \tag{123'}$$

und wenn man dies nebst

$$do = R_i^2 \sin\chi \, d\chi \, d\psi$$

in das Integral (123) einsetzt und über die ganze Kugelfläche integrirt, folgt schliesslich:

$$\mathsf{N} = \frac{8 \pi \omega_a a R_a^3 R_i^3}{R_a^3 - R_i^3}. \tag{123''}$$

Eine mit reibender Flüssigkeit gefüllte, um einen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirende Kugel übt auf eine mit ihr concentrische in der Flüssigkeit ruhende Kugel ein Drehungsmoment aus, welches proportional mit ihrer Winkelgeschwindigkeit und der Reibungsconstante der Flüssigkeit ist.

Hängt man die innere Kugel bifilar auf, so erleidet sie in Folge der Rotation der äussern eine Ablenkung, deren Messung nach den Betrachtungen in § 20 zur Bestimmung von N dienen kann. Ist N gefunden, R_a, R_i und ω_a direct beobachtet, so lässt sich nach der letzten Formel a berechnen.

Wie die vorstehenden Betrachtungen eine Lösung ergaben, welche gestattete, die Flüssigkeit in zwei benetzten und mit gegebenen Geschwindigkeiten rotirenden Kugeln zu begrenzen, liefert die Combination der Potentialbewegung (61) mit der Wirbelbewegung (95) eine Lösung, die dieselbe Eigenschaft bezüglich zweier coaxialer Kreiscylinder besitzt. Eine Discussion des Resultates erscheint indess nicht nöthig.

2. Auch die aus dem Ansatz (97)

$$\lambda_1 = n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \qquad \mu_1 = -n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \qquad \nu_1 = 0 \tag{124}$$

auf p. 378 gewonnenen und discutirten Geschwindigkeitscomponenten

$$u_1 = +\frac{nxz}{r^3}, \qquad v_1 = +\frac{nyz}{r^3}, \qquad w_1 = +n\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \tag{124'}$$

lassen sich für unser neues Problem verwerthen, wenn wir sie mit einer Potentialbewegung von ähnlichem Charakter combiniren. Eine solche haben wir oben in der Wirkung zweier mit ihren Axen in der Z-Axe liegender Quellpaare kennen gelernt. Hatte das eine unendlich grossen Abstand, das andere unendlich kleinen und lag letzteres im Coordinatenanfang, so galt nach (67)

$$\varphi_2 = -z\left(\frac{q}{r^3} + q'\right), \tag{124''}$$

worin q und q' Abkürzungen für gewisse constante Aggregate sind; daraus folgt dann:

$$u_2 = +\frac{3qxz}{r^5}, \quad v_2 = +\frac{3qyz}{r^5}, \quad w_2 = q\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - q'. \tag{124'''}$$

Combinirt man die beiden Systeme von Werthen zu

$$\begin{gathered} u = \frac{xz}{r^5}(nr^2 + 3q), \qquad v = \frac{yz}{r^5}(nr^2 + 3q), \\ w = \frac{z^2}{r^5}(nr^2 + 3q) + \frac{n}{r} - \frac{q}{r^3} - q', \end{gathered} \tag{125}$$

so erkennt man, dass man durch Verfügung über die Constanten n, q, q' alle Geschwindigkeiten auf einer Kugelfläche vom beliebigen Radius R zu Null machen kann. Im Coordinatenanfang werden die u, v, w unendlich, dieser Punkt darf also nicht in die Flüssigkeit fallen; im Unendlichen verschwinden sie mit Ausnahme von w, welches dort gleich $-q'$ wird.

Man kann also die Lösung (125) dem Fall anpassen, dass in einem unendlichen, der Z-Axe parallel fliessenden Flüssigkeitstrome eine starre Kugel vom Radius R, an welcher die Flüssigkeit haftet, in Ruhe verharrt.

Die Constanten haben den Bedingungen

$$nR^2 + 3q = 0, \qquad \frac{n}{R} - \frac{q}{R^3} - q' = 0, \qquad -q' = w_\infty \tag{125'}$$

zu genügen, falls w_∞ die im Unendlichen stattfindende Geschwindigkeit bezeichnet. Daraus folgt:

$$q = \frac{R^3}{4} w_\infty, \qquad n = -\frac{3R}{4} w_\infty, \tag{125''}$$

und es wird schliesslich:

$$\begin{gathered} u = \frac{3xz\,Rw_\infty}{4r^5}(R^2 - r^2), \qquad v = \frac{3yz\,Rw_\infty}{4r^5}(R^2 - r^2), \\ w = w_\infty\left[\frac{3z^2R}{4r^5}(R^2 - r^2) - \frac{R}{4r^3}(R^2 + 3r^2) + 1\right]. \end{gathered} \tag{125'''}$$

Giebt man dem ganzen System die Geschwindigkeit w_∞ in entgegengesetzter Richtung, so kommt die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe und die Kugel schreitet mit derselben Geschwindigkeit w_∞ in der Flüssigkeit fort.

Um das Aggregat $\Phi + \Pi$ für diese Bewegung der Flüssigkeit zu bestimmen, hat man nur die von der Wirbelbewegung herrührenden Antheile u_1, v_1, w_1 in die Gleichungen (119') einzusetzen, am einfachsten in der Form:

$$u = -n\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial z}, \qquad v = -n\frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial z}, \qquad w = +n\left(\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial y}\right),$$

und die Hülfssätze (96'') zu benutzen; dann ergiebt sich sogleich bis auf eine additive Constante:

$$\Phi + \Pi = -\frac{2na}{\varepsilon}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}. \tag{126}$$

Schliesst man die Einwirkung äusserer Kräfte aus und setzt demgemäss $\Phi = -c/\varepsilon$, $\Pi = p/\varepsilon$, so folgt:

$$p = c - 2na\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = c + \frac{2naz}{r^3}, \tag{126'}$$

worin n den in (125'') gegebenen Werth hat und $c = p_\infty$ ist.

Die Wirkung, welche die Kugel parallel der Z-Axe seitens der Flüssigkeit erfährt und welche nach der Symmetrie die einzige stattfindende ist, berechnen wir nach der Formel

$$Z = \int Z_n\, do = -\int \left(Z_x \frac{x}{r} + Z_y \frac{y}{r} + Z_z \frac{z}{r} \right) do, \tag{126''}$$

in welcher nach (114)

$$Z_x = -a z_x', \qquad Z_y = -a z_y', \qquad Z_z = p - 2a z_z'$$

ist; wir haben auch hier für u, v, w nur die von den Wirbeln herrührenden Antheile einzusetzen, da ja die Potentialbewegung, wie wir früher gesehen haben, keinen Antheil zu Z giebt. Nach einer einfachen Rechnung erhält man:

$$Z = -12\pi a n \int_0^\pi \cos^2\chi \sin\chi\, d\chi = -8\pi a n,$$

oder in Rücksicht auf den Werth von n:

$$Z = +6\pi a R w_\infty. \tag{126'''}$$

Ein unendlicher gerader Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit w_∞ und der innern Reibungsconstante a übt auf eine in ihm ruhende benetzte Kugel vom Radius R Druckkräfte aus, welche eine Resultante parallel der Bewegungsrichtung von der Grösse $6\pi Raw_\infty$ ergeben.

Gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist die Einwirkung, wenn die unendliche Flüssigkeit ruht und die feste Kugel ohne Rotation mit der Geschwindigkeit w_∞ geradlinig fortschreitet.

§ 36. Mechanik elastischer Körper; Gleichgewichtszustände. Potentialdeformationen; homogene Deformation.

Elastisch nennen wir einen Körper dann, wenn jede durch äussere Einwirkung hervorgebrachte Deformation in ihm Kräfte erregt, welche diese Deformation rückgängig zu machen streben. Der Körper heisst vollkommen elastisch, wenn jene Reactionskräfte auf keine andere Weise, als durch Wiederherstellung der ursprünglichen Anordnung, zum Verschwinden gebracht werden können, dann aber auch stets verschwinden. Wir beschäftigen uns weiterhin ausschliesslich mit diesen vollkommen elastischen Körpern.

I. Bezüglich des Zusammenhanges zwischen den Deformationen und den durch sie erregten Reactionskräften machen wir ähnliche Annahmen, wie wir sie im vorigen Abschnitt der Theorie der Flüssigkeitsreibung zu Grunde gelegt haben.

1. Die Ursachen der elastischen Kräfte sind moleculare Wirkungen; daher hängen die Werthe dieser Kräfte in einem beliebigen Punkt p nur von dem Zustand des Körpers innerhalb des Bereiches B

dieses Punktes ab. Die Verschiebung und Drehung dieses Bereiches als eines Ganzen kann nach dem Vorausgeschickten auf die elastischen Kräfte in p keinen Einfluss haben, sondern nur seine Deformation. Letztere bestimmt sich aber nach dem in § 26 Entwickelten vollständig durch die sechs Differentialausdrücke

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} = x_x, \qquad \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} = y_y, \qquad \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = z_z,$$

$$\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y} = y_z, \qquad \frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z} = z_x, \qquad \frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x} = x_y,$$

welche wir die Deformationsgrössen genannt haben — von ihnen und etwa noch von ihren Differentialquotienten nach der Zeit können also allein die elastischen Drucke an der Stelle p abhängen.

Der Bequemlichkeit halber bezeichnen wir weiterhin die Verschiebungen δx, δy, δz selbst mit den Buchstaben u, v, w, die wir im vorigen Abschnitt für $\delta x/\delta t$, $\delta y/\delta t$, $\delta z/\delta t$ angewandt haben; u, v, w haben also weiterhin nicht mehr die frühere Bedeutung von Geschwindigkeitscomponenten, sondern sind die Verrückungscomponenten an der Stelle x, y, z. Zugleich wird jetzt gelten:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} = x_x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y.\end{gathered} \tag{127}$$

Die räumliche Dilatation ϑ ist gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vartheta, \tag{127'}$$

die Drehungswinkel um die Coordinatenaxen durch

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \mu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \nu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{127''}$$

2. Die Druckcomponenten sind lineäre Functionen der Deformationsgrössen. Diese zweite Annahme ist hier viel weniger willkürlich, als die entsprechende in § 34, da die Deformationsgrössen elastischer Körper in der Praxis in der That immer ausserordentlich kleine Zahlen sind, also die unbekannte Function, welche den Zusammenhang mit Strenge angiebt, bis zu einer grossen Genauigkeit durch das erste Glied der Potenzentwickelung dargestellt werden kann.

Da alle Kräfte nur dann, aber dann auch stets verschwinden sollen,

wenn alle Deformationen verschwinden, so können Glieder, welche die Differentialquotienten der Deformationsgrössen nach der Zeit enthalten, nicht vorkommen, eine Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten ist unmöglich, auch darf ein constantes Glied nicht auftreten.

Der allgemeinste Ansatz für die Druckcomponenten ist also:

$$-X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y,$$
$$-Y_y = c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y \text{ u. s. f.}$$

Beschränken wir uns aber auf Körper, in denen alle Richtungen physikalisch gleichwerthig sind, also sogenannte isotrope Medien, z. B. homogene unkrystallinische feste oder flüssige Körper, so lässt sich nach dem im vorigen Abschnitt in gleichem Falle angewandten Verfahren eine grosse Vereinfachung erzielen und wir können das dortige Resultat mit anderen Constanten ohne Weiteres auf unser Problem übertragen und setzen:

$$\begin{aligned} -X_x &= cx_x + c'y_y + c'z_z, \\ -Y_y &= c'x_x + cy_y + c'z_z, \\ -Z_z &= c'x_x + c'y_y + cz_z, \end{aligned} \tag{128}$$
$$-Y_z = \frac{c-c'}{2}y_z, \quad -Z_x = \frac{c-c'}{2}z_x, \quad -X_y = \frac{c-c'}{2}x_y.$$

Die beiden Coefficienten c und c' sind der Substanz des betrachteten Körpers individuell und heissen seine Elasticitätsconstanten; sie sind für feste Körper theoretisch weder unter einander noch mit anderen physikalischen Constanten des Mediums in Zusammenhang zu bringen und nur durch directe Beobachtungen zu bestimmen.

Für Flüssigkeiten, in denen nach den Resultaten der früheren Abschnitte im Gleichgewichtszustande tangentiale Druckkräfte nicht bestehen können, muss $c = c'$ sein und demgemäss statt (128) folgendes System gelten:

$$\begin{aligned} -X_x &= -Y_y = -Z_z = c\vartheta, \\ -Y_z &= -Z_x = -X_y = 0. \end{aligned} \tag{128'}$$

Die Dimension einer Elasticitätsconstanten ist die einer Druckkraft, also

$$[c] = [c'] = [ml^{-1}t^{-2}]. \tag{128''}$$

Mit den Beziehungen (128) sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen (25) aus § 27 zu verbinden. Dabei wollen wir ebenso, wie in den Definitionen der Deformationsgrössen, x, y, z consequent in der Bedeutung der Coordinaten der Anfangslage des Volumenelementes weiterführen, auf welches sich die Formen beziehen. In den Beschleunigungen d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 haben sie aber die Bedeutung der Coordinaten der verschobenen Lage. Wir werden in ihnen also an Stelle von x, y, z nunmehr $x + u$, $y + v$, $z + w$ setzen und berück-

sichtigen, dass hierin die x, y, z sich nicht mit der Zeit ändern. Demgemäss erscheint d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 mit d^2u/dt^2, d^2v/dt^2, d^2w/dt^2 vertauscht.

Diese vollständigen Differentialquotienten sind nun weiter, da wir u, v, w als Functionen von x, y, z und t ansehen, in ihre Theile zu zerlegen gemäss dem Schema:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \cdots;$$

da aber u, v, w und ihre Differentialquotienten als sehr kleine Grössen angesehen werden, so können wir die Glieder, welche in Bezug auf sie zweiter Ordnung sind, neben denen erster vernachlässigen und also einfach d^2u/dt^2 mit $\partial^2u/\partial t^2$, d^2v/dt^2 mit $\partial^2v/\partial t^2$, d^2w/dt^2 mit $\partial^2w/\partial t^2$ vertauschen.

Die Grundgleichungen, von denen wir bei der Behandlung elastischer Körper auszugehen haben, sind hiernach folgende. Erstens die „Hauptgleichungen“ (25), für einen jeden innern Punkt geltend:

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varepsilon X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right), \\ \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varepsilon Y - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right), \\ \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varepsilon Z - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right); \end{aligned} \tag{129}$$

zweitens die Oberflächenbedingungen (27) für die Druckkräfte an der Grenze zweier Körper (h) und (k):

$$(\overline{X}_n)_h + (\overline{X}_n)_k = 0, \quad (\overline{Y}_n)_h + (\overline{Y}_n)_k = 0, \quad (\overline{Z}_n)_h + (\overline{Z}_n)_k = 0, \tag{129'}$$

welche wir, wenn in dem einen der Grenzdruck direct gegeben ist, nach (27') schreiben:

$$\overline{X}_n + \overline{X} = 0, \quad \overline{Y}_n + \overline{Y} = 0, \quad \overline{Z}_n + \overline{Z} = 0; \tag{129''}$$

drittens die Grenzbedingungen für die Verrückungen in der Grenze zweier Körper (h) und (k), in der Form (18''):

$$(\overline{u}_h - \overline{u}_k)\cos(n,x) + (\overline{v}_h - \overline{v}_k)\cos(n,y) + (\overline{w}_h - \overline{w}_k)\cos(n,z) = 0, \tag{130}$$

falls die Körper in Berührung sind, aber sich an einander verschieben können, oder aber nach (18'''):

$$\overline{u}_h = \overline{u}_k, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_k, \quad \overline{w}_h = \overline{w}_k, \tag{130'}$$

falls sie fest zusammenhängen; viertens die Bestimmung des Anfangszustandes oder die Festsetzung der Werthe der Verrückungen und Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt, die wir so formuliren, dass für $t = 0$:

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v', \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w' \tag{130''}$$

gegeben sein soll, unter $u^0, v^0, w^0, u', v', w'$ stetige Functionen der Coordinaten verstanden.

Diese vier Systeme von Gleichungen bestimmen vollständig die Deformationen für einen freien elastischen Körper als Functionen des Ortes und der Zeit, wobei allerdings zu bemerken ist, dass die wirkenden Kräfte so gegeben sein müssen, dass die Verschiebungen u, v, w unendlich klein bleiben.

Ist der Körper nicht frei, so kommt zu den obigen noch ein fünftes System von Gleichungen, welches man passend dasjenige der Befestigungsbedingungen nennen kann, und welches, je nach den Umständen, in verschiedener Weise zu formuliren ist.

Meistens wird man einen Punkt p_0, in den man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Coordinatenanfang legen kann, absolut festhalten, also

$$u = v = w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \tag{131}$$

machen können; mit einem zweiten p_1 oder dritten p_2 wäre aber dasselbe im Allgemeinen nicht möglich, da ihre Abstände vom ersten wie auch die Winkel zwischen ihren Verbindungslinien sich in Folge der Deformation ändern können.

Aber man kann die Richtung der Verbindungslinie von p_0 und p_1 unverändert erhalten, d. h. wenn man sie etwa zur Z-Axe wählt, auch

$$u = v = 0 \quad \text{für} \quad x = y = 0, \quad z = z_1, \tag{131'}$$

setzen.

Für einen dritten Punkt p_2 kann man dann nur noch fordern, dass er in einer festen Ebene durch die feste Richtung $\overline{p_0 p_1}$ bleiben soll, während seine Verschiebung in derselben beliebig ist. Wählt man diese Ebene zur YZ-Ebene, so muss noch

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \quad y = y_2, \quad z = z_2 \tag{131''}$$

sein.

Ein besonders wichtiger Fall ist der, dass die Punkte p_1 und p_2 unendlich nahe bei p_0 liegen; die vorstehenden Bedingungen werden dann in Rücksicht auf die Beziehungen (1), welche für die Verschiebungen unendlich naher Punkte gelten, die Form annehmen, dass für $x = y = z = 0$ gelten muss:

$$u = v = w = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{132}$$

Man kann sie dahin deuten, dass der Coordinatenanfangspunkt an seinem Ort, das erste Element der Z-Axe in seiner Richtung, das erste Element der YZ-Ebene in seiner Ebene festgehalten wird.

Eine andere wichtige Art der Befestigung ist die, dass der Coordinatenanfang an seiner Stelle verharrt und das ihm benachbarte

Volumenelement keinerlei Drehung um irgend eine Axe erfährt. Nach (4″) sind die Bedingungen dann die, dass für $x = y = z = 0$ gilt:

$$u = v = w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (132')$$

II. Wir wenden uns nunmehr zur Behandlung **specieller Probleme des Gleichgewichtes eines homogenen isotropen Körpers.**

Die bei nur einem Körper für die Kräfte in Betracht kommenden Gleichungen sind folgende; für jeden innern Punkt gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varepsilon Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varepsilon Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (133)$$

für jedes Oberflächenelement:

$$\overline{X}_n + \overline{X} = \overline{Y}_n + \overline{Y} = \overline{Z}_n + \overline{Z} = 0, \quad (133')$$

worin n die äussere Normale bezeichnet. Hierzu nehmen wir nach (24) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z), \\ Y_n &= Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) + Y_z \cos(n,z), \\ Z_n &= Z_x \cos(n,x) + Z_y \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z), \end{aligned} \quad (133'')$$

und für die $X_x \ldots$ die sie definirenden Gleichungen (128).

Bei ihrer Behandlung wenden wir ein Verfahren an, das genau dem in den übrigen Abschnitten dieses Theiles benutzten entspricht.

Die Schwierigkeit zu vermeiden, welche die Erfüllung der Grenzbedingungen bietet, sehen wir zunächst von diesen ganz ab, betrachten also gewissermaassen einen **unendlichen** Körper. Für diesen nehmen wir willkürlich Werthe der Verrückungen u, v, w an, bestimmen die ihnen entsprechenden Deformationen $x_x, y_y, \ldots$ nach (127), die Moleculardrucke X_x, $Y_y, \ldots$ nach (128) und setzen dieselben in die Hauptgleichungen (133) ein; dadurch finden sich diejenigen Werthe der äussern Kräfte X, Y, Z, welche die angenommenen Deformationsgrössen bewirken könnten. Hierauf suchen wir den Körper passend zu begrenzen, zumeist so, dass er längs eines Stückes seiner Oberfläche einen constanten äussern Druck, z. B. den Druck Null, erfährt, weil dies practisch am ersten realisirbar ist.

Die für u, v, w einzuführenden Functionen der Coordinaten müssen im ganzen Körper eindeutig und stetig sein; Stellen, in welchen eine oder alle unendlich werden würden, müssen durch eine Begrenzung des Körpers aus ihm ausgeschieden werden.

Sind in dieser Weise mehrere Lösungen u_h, v_h, w_h der Differentialgleichungen erhalten, so lassen sich aus ihnen neue bilden, indem man sie mit willkürlichen Constanten multiplicirt und zusammenaddirt, also setzt:

$$u = \sum A_h u_h, \qquad v = \sum A_h v_h, \qquad w = \sum A_h w_h.$$

Da die Gleichungen sämmtlich in u, v, w, X, Y, Z, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ lineär homogen sind, so entsprechen die combinirten Lösungen äussern und Oberflächendruckkräften, welche in demselben Zusammenhang mit denjenigen stehen, die den einzelnen Lösungen zugehören, wie u, v, w mit den u_h, v_h, w_h.

Indessen ist hervorzuheben, dass die dargelegte Methode, die sich in der Hydrodynamik so fruchtbar erwiesen hat, in der Elasticitätslehre erheblich weniger leistet. Der Grund ist leicht einzusehen.

In der Hydrodynamik gaben die begrenzenden festen Wände direct ein Gesetz für die Bewegung und konnten umgekehrt aus gegebener Bewegung direct erschlossen werden; der Druck, den sie erfuhren, blieb zumeist ganz ausser Betracht.

Starre Wände, welche die Deformation eines elastischen Körpers in ähnlicher Weise leiten und umgekehrt aus seiner Deformation erschlossen werden könnten, giebt es aber nicht, denn unsere Betrachtungen betreffen zumeist die Veränderungen eben derjenigen Körper, welche den starren von allen am nächsten kommen und welche Flüssigkeiten gegenüber auch als starr angesehen werden konnten.

Demzufolge haben wir in Wirklichkeit bei den elastischen Körpern fast ausschliesslich die Kräfte in den Grenzen als gegeben anzusehen, und diese hängen mit den Deformationen in so complicirter Weise zusammen, dass es sehr schwierig ist, zu übersehen, ob irgend ein Deformationssystem in einer practisch möglichen Weise hervorzubringen ist.

In der That ist deshalb in einigen Gebieten der Elasticitätslehre zur Durchführung specieller Probleme erfolgreich ein Weg eingeschlagen worden, der dem unserigen in mancher Hinsicht gerade entgegengesetzt ist; es sind nämlich zunächst die Gesetze für die elastischen Kräfte willkürlich angenommen, welche in einfacher Weise gegebenen Grenzbedingungen entsprechen, und aus diesen die Gesetze der Verrückungen abgeleitet.

Wir wollen uns hier auf den schon angedeuteten Weg beschränken, weil er interessante Beziehungen zwischen Erscheinungen der Hydrodynamik und Elasticität ergiebt und fast nur diejenigen Hülfsmittel benutzt, welche wir in den früheren Abschnitten kennen gelernt haben, dabei aber doch zur Lösung einiger auch practisch wichtiger Probleme führt.

In der Hydrodynamik haben wir zwei Arten von Bewegungen unterschieden, Potentialbewegung und Wirbelbewegung, und haben bemerkt, dass aus diesen die allgemeinste sich zusammensetzen lässt; es liegt nahe, dieselbe Theilung hier bei dem elastischen Gleichgewichtsproblem bezüglich der Verrückungen u, v, w vorzunehmen, welche in vieler Hinsicht den Geschwindigkeitscomponenten in der Hydrodynamik parallel gehen.

Wir nennen eine Deformation eine Potentialdeformation, wenn sich die Verrückungen u, v, w darstellen lassen als die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function φ der Coordinaten, welche das Deformationspotential heissen mag, d. h. wenn die Beziehungen gelten:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{134}$$

Ueber die geometrischen Eigenschaften dieses Verrückungssystemes gelten nach p. 344 folgende Sätze:

Construirt man das System der Oberfächen

$$\varphi = C$$

für um constante Incremente δC wachsende Werthe der Constanten, so ist für jede Stelle des Raumes die Richtung der Verrückung gegeben durch die Normale auf der Potentialfläche, welche durch jene Stelle geht, positiv gerechnet von kleinen zu grossen Potentialwerthen, ihre Grösse ist indirect proportional mit dem Abstand zweier Nachbarflächen an jener Stelle.

Aus den Bedingungen für die Existenz eines Deformationspotentiales

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

folgt weiter in Verbindung mit der Definition der Drehungs- oder Drillungswinkel an der Stelle x, y, z

$$2\lambda = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2\mu = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\nu = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}:$$

Deformationspotential und Drillung schliessen sich gegenseitig aus.

Aus den Werthen der u, v, w ergeben sich die Deformationen gemäss den Formeln:

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, & y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & z_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ y_z &= 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}, & z_x &= 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z}, & x_y &= 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}; \end{aligned} \tag{134'}$$

zugleich folgt die räumliche Dilatation

$$\vartheta = \Delta\varphi. \tag{134''}$$

Erfüllt das Deformationspotential die Beziehung

$$\Delta\varphi = 0,$$

so ist die Deformation von einer räumlichen Dilatation nicht begleitet.

Die Anwendung der Betrachtungen auf p. 345 giebt den weiteren Satz:

Die Hauptdilatationsaxen und, falls das Medium isotrop ist, die mit ihnen parallelen Hauptdruckaxen liegen für jeden Punkt den Hauptaxen derjenigen Fläche zweiten Grades parallel, mit welcher innerhalb des dem Punkt zugehörigen Bereiches B die Oberfläche $\varphi = C$ zusammenfällt.

In dem speciellen Falle, dass das Deformationspotential eine Function zweiten Grades ist, tritt natürlich die Potentialfläche selbst an die Stelle jener Hülfsfläche.

Setzen wir die Werthe $x_x \ldots$ nach (134') in die Ausdrücke für die Druckcomponenten ein, so lauten dieselben:

$$\begin{aligned} -X_x &= (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + c'\Delta\varphi, \\ -Y_y &= (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + c'\Delta\varphi, \\ -Z_z &= (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + c'\Delta\varphi, \end{aligned} \tag{135}$$

$$-Y_z = (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}, \quad -Z_x = (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}, \quad -X_y = (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

und die Hauptgleichungen (133) werden unter Benutzung hiervon:

$$\begin{aligned} \varepsilon X &= -c\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} = -c\Delta u, \qquad \varepsilon Y = -c\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} = -c\Delta v, \\ \varepsilon Z &= -c\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial z} = -c\Delta w. \end{aligned} \tag{135'}$$

Existirt also ein Deformationspotential φ, so müssen die wirkenden Kräfte nothwendig ein Kraftpotential Φ haben, dessen Werth sich bis auf eine additive Constante bestimmt durch

$$\Phi = \frac{c}{\varepsilon}\Delta\varphi = \frac{c}{\varepsilon}\vartheta. \tag{135''}$$

Potentialdeformationen mit constanter oder verschwindender cubischer Dilatation können nur eintreten, wenn keine äussern Kräfte wirken.

Umgekehrt erfordert das Fehlen äusserer Kräfte, dass das Deformationspotential der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt.

Der Druck P_n gegen ein beliebig gelegenes Flächenelement hat nach (135) die Componenten:

$$
\begin{aligned}
-X_n &= (c-c')\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos(n,x)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\cos(n,z)\right)+c'\Delta\varphi\cos(n,x),\\
-Y_n &= (c-c')\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cos(n,y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\cos(n,z)\right)+c'\Delta\varphi\cos(n,y),\quad(136)\\
-Z_n &= (c-c')\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\cos(n,z)\right)+c'\Delta\varphi\cos(n,z).
\end{aligned}
$$

Gehört das Flächenelement einer Potentialfläche an, was wir durch die Vertauschung der Normalen n mit ν andeuten wollen, so ist:

$$
\cos(\nu,x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\Theta\varphi,\qquad \cos(\nu,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big/\Theta\varphi,\qquad \cos(\nu,z)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big/\Theta\varphi,
$$

worin

$$
\Theta^2\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2;
$$

es gilt demgemäss:

$$
\begin{aligned}
-X_\nu &= (c-c')\frac{\partial\Theta\varphi}{\partial x}+c'\Delta\varphi\cos(\nu,x),\\
-Y_\nu &= (c-c')\frac{\partial\Theta\varphi}{\partial y}+c'\Delta\varphi\cos(\nu,y),\qquad(136')\\
-Z_\nu &= (c-c')\frac{\partial\Theta\varphi}{\partial z}+c'\Delta\varphi\cos(\nu,z).
\end{aligned}
$$

In dem speciellen Fall, dass $\Delta\varphi=0$ ist, stehen also die Drucke gegen die Potentialflächen an jeder Stelle normal zu der durch sie hindurchgehenden Fläche $\Theta\varphi=$ Const. und haben die Resultante

$$
P_\nu=(c-c')\Theta(\Theta\varphi).
$$

Allgemein erhält man die Normalcomponente N_ν, wenn man die letzteren Formeln mit den Factoren

$$
\cos(\nu,x)=\frac{dx}{d\nu},\qquad \cos(\nu,y)=\frac{dy}{d\nu},\qquad \cos(\nu,z)=\frac{dz}{d\nu}
$$

zusammenfasst; es folgt dann nämlich:

$$
-N_\nu=(c-c')\frac{\partial\Theta\varphi}{\partial\nu}+c'\Delta\varphi=(c-c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2}+c'\Delta\varphi.\qquad(136'')
$$

Aehnlich liefern die Factoren

$$
\cos(\sigma,x)=\frac{dx}{d\sigma},\qquad \cos(\sigma,y)=\frac{dy}{d\sigma},\qquad \cos(\sigma,z)=\frac{dz}{d\sigma}
$$

die Componente S_ν nach der Richtung einer beliebigen Tangente σ an der Potentialfläche; es wird

$$
-S_\nu=(c-c')\frac{\partial\Theta\varphi}{\partial\sigma}=(c-c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma\,\partial\nu}.\qquad(136''')
$$

Die Resultirende P_ν steht normal zu der Potentialfläche, wenn S_ν für jede Richtung σ verschwindet, also in der Fläche neben φ auch $\Theta\varphi=\partial\varphi/\partial\nu$ constant ist.

Diese Resultate kommen in Betracht, wenn es sich darum handelt, bei gegebenem Deformationspotential in dem unendlichen elastischen Körper eine Oberfläche zu bestimmen, welche die Begrenzung eines Theiles desselben bilden kann.

Man kann den Satz aussprechen:

Eine Fläche, in welcher das Deformationspotential φ constant ist, kann bei Einwirkung äusserer Druckkräfte, welche normal gegen sie wirken, eine Oberfläche des elastischen Körpers bilden, falls in ihr $\partial\varphi/\partial\nu$ constant ist. Die äusseren Druckkräfte erhalten dabei constante Werthe, wenn gleichzeitig in ihr auch

$$-P_\nu = (c - c')\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2} + c'\varDelta\varphi \tag{136''''}$$

constant ist.

Was die Bedingungen der Befestigung anbetrifft, so beschränken sich dieselben, wenn ein Deformationspotential existirt, darauf, dass für einen beliebigen Punkt, z. B. den Coordinatenanfang, u, v, w verschwinden müssen; denn da die Rotation irgend eines Volumenelementes durch die Annahme eines Deformationspotentiales bereits ausgeschlossen ist, so sind die Bedingungen (132') nicht nur für einen Punkt, sondern allgemein erfüllt.

IV. Der denkbar einfachste Fall einer Potentialdeformation ist der, dass die Deformation homogen ist, die Deformationsgrössen $x_x, \ldots$ nämlich Constante sind, das Deformationspotential also eine Function zweiten Grades ist. Diese Verfügung ist nicht nur an sich der practischen Beziehungen halber von grossem Interesse, sondern auch in der Combination mit andern Potentialen von Nutzen.

Wir machen, um u, v, w im Coordinatenanfang verschwinden zu lassen, für das Potential der homogenen Deformation den Ansatz

$$2\varphi = m_1x^2 + m_2y^2 + m_3z^2 + 2(n_1yz + n_2zx + n_3xy), \tag{137}$$

haben also:

$$x_x = m_1, \quad y_y = m_2, \quad z_z = m_3, \quad y_z = 2n_1, \quad z_x = 2n_2, \quad x_y = 2n_3; \tag{137'}$$

die räumliche Dilatation ist

$$\vartheta = m_1 + m_2 + m_3. \tag{137''}$$

Die Druckkräfte werden constant, nämlich:

$$\begin{aligned} -X_x &= (c - c')m_1 + c'\vartheta = M_1, \\ -Y_y &= (c - c')m_2 + c'\vartheta = M_2, \\ -Z_z &= (c - c')m_3 + c'\vartheta = M_3, \end{aligned} \tag{137'''}$$

$$-Y_z = (c - c')n_1 = N_1, \quad -Z_x = (c - c')n_2 = N_2, \quad -X_y = (c - c')n_3 = N_3,$$

worin die M_h und N_h Abkürzungen sind, die wir auch weiterhin benutzen wollen.

Sind die M_h und N_h bekannt, so folgen aus ihnen die m_h und n_h nach den Formeln:

$$
\left.\begin{aligned}
m_1 &= \frac{(c+c')M_1 - c'(M_2+M_3)}{(c-c')(c+2c')},\\
m_2 &= \frac{(c+c')M_2 - c'(M_3+M_1)}{(c-c')(c+2c')},\\
m_3 &= \frac{(c+c')M_3 - c'(M_1+M_2)}{(c-c')(c+2c')},\\
n_1 = \frac{N_1}{c-c'},\quad & n_2 = \frac{N_2}{c-c'},\quad n_3 = \frac{N_3}{c-c'}.
\end{aligned}\right\} \tag{137''''}
$$

Die äussern Kräfte finden sich nach (135') gleich Null; homogene Deformationen sind also nur durch Oberflächendrucke hervorzubringen.

a) Die elastischen Druckcomponenten gegen ein beliebig gelegenes Flächenelement nehmen die Werthe an:

$$
\begin{aligned}
-X_n &= M_1\cos(n,x) + N_3\cos(n,y) + N_2\cos(n,z),\\
-Y_n &= N_3\cos(n,x) + M_2\cos(n,y) + N_1\cos(n,z),\\
-Z_n &= N_2\cos(n,x) + N_1\cos(n,y) + M_3\cos(n,z);
\end{aligned} \tag{138}
$$

sie sind also gegen alle Flächenelemente normal, wenn

$$M_1 = M_2 = M_3 = M, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

ist; in diesem Falle haben sie auch für alle Flächen die gleiche Grösse. Der hierdurch characterisirte Zustand lässt sich hervorbringen, indem man den Körper einem allseitig gleichen Druck p aussetzt. Da ein solcher der äussern Normalen n entgegenwirkt, ist nach den Gleichungen (133')

$$-X_n = \overline{X} = -p\cos(n,x), \qquad -Y_n = \overline{Y} = -p\cos(n,y),$$
$$-Z_n = \overline{Z} = -p\cos(n,z)$$

zu setzen und es folgt daraus:

$$M = -p.$$

Setzen wir dies in die Formeln (137) und (137'''') ein, so erhalten wir den Satz:

Das Deformationspotential eines unter dem allseitig gleichen Druck p stehenden homogenen, isotropen Körpers ist:

$$\varphi = \frac{mr^2}{2} = -\frac{p(x^2+y^2+z^2)}{2(c+2c')}; \tag{138'}$$

seine Verrückungen haben die Werthe:

$$u = -\frac{px}{c+2c'}, \qquad v = -\frac{py}{c+2c'}, \qquad w = -\frac{pz}{c+2c'}, \tag{138''}$$

seine Deformationen sind:

$$x_x = y_y = z_z = \frac{-p}{c+2c'}, \qquad y_z = z_x = x_y = 0, \tag{138'''}$$

seine cubische Dilatation ist:

$$\vartheta = \frac{-3p}{c + 2c'}.$$

Die Dilatations- und Druckellipsoide sind hier nach p. 288 und 307 Kugeln.

Zu diesen Resultaten machen wir eine allgemeine Bemerkung.

Nach unserer Grundannahme über die elastischen Drucke und nach den Fundamentalgleichungen, welche diese mit den äussern und Oberflächendruckkräften verbinden, werden wir bei allen elastischen Problemen lineäre Beziehungen zwischen den ausgeübten Kräften K_h und den Deformationen δ_k erhalten, also Gleichungen von der Form

$$\delta_k = \sum_h A_{hk} K_h,$$

in welchen die A_{hk} nur von der Gestalt des Körpers, auf welchen die K_h wirken, und von seinen Elasticitätsconstanten c und c' abhängen. Häufig nehmen dabei die A_{hk} specieller eine Form an, bestehend aus einem Factor C_{hk}, der nur die Elasticitätsconstanten, und einem andern B_{hk}, der nur die Dimensionen des Körpers enthält und von der Dimension Null sein muss, wenn die K_h Druckkräfte, bezogen auf die Flächeneinheit, sind.

Die hier auftretenden Aggregate C_{hk} nennen wir die Coëfficienten der betreffenden Deformation oder die Deformationscoëfficienten, ihre Reciproken, die um so grösser sind, je geringer der Effect der Kraft ist, die Deformationswiderstände der Substanz des Körpers.

Ein sehr einfacher Fall der besprochenen Art, in welchem die $B_{hk} = 1$ sind, ist der obige. Die Grösse $1/(c + 2c')$ wird man demgemäss den Coëfficienten der lineären Dilatation, $3/(c + 2c')$ den Coëfficienten der cubischen Dilatation bei allseitig gleichem Druck nennen; ihre Reciproken sind die bezüglichen Dilatationswiderstände.

Für Flüssigkeiten wird wegen $c = c'$ gelten:

$$x_x = y_y = z_z = -\frac{p}{3c}, \qquad \vartheta = -\frac{p}{c};$$

ihre einzige Elasticitätsconstante c ist also direct als ihr Compressionswiderstand definirt.

Wir wollen weiterhin allgemein den Coëfficienten der cubischen Dilatation bei allseitig gleichem Drucke

$$\frac{3}{c + 2c'} = \mathsf{K}$$

setzen.

Zur experimentellen Bestimmung von K dient das Piëzometer (Figur 45), ein mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefülltes starkwandiges Reservoir R, innerhalb dessen in einem Quecksilbernapf Q das eigent-

liche Beobachtungsgefäss G in Form einer grossen Thermometerkugel mit graduirtem Messrohr rr und das geschlossene Luftmanometer M aufrecht steht. Der Druck p, welchen man mit Hülfe der Schraube S auf die äussere Flüssigkeit ausüben kann, pflanzt sich durch das Quecksilber des Napfes Q auf den Inhalt des Gefässes G und die Luft im Manometer fort; die Ablesung des Standes des Quecksilbers in M gestattet die Bestimmung des im Innern herrschenden Druckes p, diejenige des Standes in $\bar{r}\bar{r}$ die Bestimmung der Volumenänderung des Inhaltes von G. Zu letzterem Zwecke hat man zu überlegen, dass der ganze Raum, welchen G darbietet, gegeben ist durch das Volumen V bis zur Nullmarke auf $\bar{r}\bar{r}$ weniger dem Volumen, welches von dem in der Röhre stehenden Quecksilber eingenommen wird, also weniger lq, wenn l die Länge der Säule vom Nullpunkt aus und q den Querschnitt der Röhre bezeichnet. Dieses Volumen erleidet nach der obigen Formel bei dem stattfindenden allseitig gleichen Druck die Verminderung $(V - lq)p\mathsf{K}_g$, wenn K_g den Compressionscoëfficienten des Gefässes G bezeichnet; denn da jeder Volumentheil des comprimirten Körpers in demselben Verhältniss verkleinert wird, gilt Gleiches auch von dem Hohlraum.

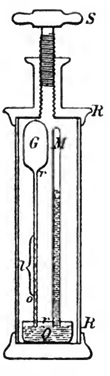


Fig. 45.

Das Volumen der Flüssigkeit, die zunächst das Gefäss G erfüllen mag, erleidet die Verminderung $(V - lq)p\mathsf{K}_f$, wenn K_f den Compressionscoëfficienten für sie bezeichnet. Die Differenz beider Volumenänderungen oder die relative Volumenänderung ruft die Veränderung des Standes im Messrohr um dieLänge l' hervor, so dass

$$l'q = (V - lq)p(\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g)$$

ist. Hierbei kann der Querschnitt q auf der linken Seite als dem ursprünglichen gleich angesehen werden, da wir sehr kleine Deformationen vorausgesetzt haben und in Praxi stets erhalten. Die letztere Formel giebt

$$\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g = \frac{l'q}{p(V - lq)},$$

und dies zeigt, dass die Beobachtungsmethode nur die Differenz der beiden Coëfficienten K_f und K_g giebt, der eine also auf andere Weise bestimmt werden muss. Hierin liegt eine bedeutende practische Schwierigkeit; denn zumal wenn das Gefäss G, wie meist, aus Glas besteht, ist die Benutzung des an einem andern gläsernen Körper auf andere Weise bestimmten K sehr bedenklich, da verschiedene Glasstücke, selbst von der gleichen Sorte, in ihrem elastischen Verhalten häufig stark differiren.

Die Methode des Piëzometers ist auf feste Körper anwendbar, wenn man dieselben mit einer Flüssigkeit in das Gefäss G bringt. Ist das Volumen des festen Körpers V_k, sein Compressionscoëfficient K_k, so ist seine Volumenänderung $V_k p \mathsf{K}_k$, die der Flüssigkeit

$$(V - V_k - lq) p \mathsf{K}_f,$$

die gesammte relative Volumenänderung also:

$$(V - lq) p (\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g) + V_k p (\mathsf{K}_k - \mathsf{K}_f);$$

sie wird gemessen durch eine Veränderung des Standes im Messrohr $\overline{rr}$ um die Länge l''. Beobachtet man in G erst die Flüssigkeit allein, dann mit dem festen Körper zusammen, so gelten die beiden Gleichungen:

$$l' q = (V - lq) p (\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g),$$
$$l'' q = (V - lq) p (\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g) + V_k p (\mathsf{K}_k - \mathsf{K}_f),$$

und hieraus folgt:

$$\mathsf{K}_k - \mathsf{K}_f = \frac{(l'' - l') q}{V_k p}.$$

Für diese Beobachtungsart ist also die Kenntniss des Compressionscoëfficienten K_g des Gefässes nicht nöthig, wohl aber desjenigen K_f der Flüssigkeit. —

b) Hat der betrachtete Körper die Gestalt eines Voll- oder Hohlcylinders von beliebigem Querschnitt, die Axe parallel der Z-Richtung, so sind die Gleichungen (138) auf die Cylinder- und die Grundflächen gesondert anzuwenden; sie geben für erstere:

$$\begin{aligned} -X_n &= M_1 \cos(n, x) + N_3 \cos(n, y), \\ -Y_n &= N_3 \cos(n, x) + M_2 \cos(n, y), \\ -Z_n &= N_2 \cos(n, x) + N_1 \cos(n, y), \end{aligned} \tag{139}$$

hingegen für letztere:

$$-X_n = N_2 \cos(n, z), \quad -Y_n = N_1 \cos(n, z), \quad -Z_n = M_3 \cos(n, z).$$

Die Drucke gegen die Cylinderfläche sind überall normal gegen dieselbe und von constanter Grösse, wenn

$$M_1 = M_2, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

ist, zugleich sind dann auch die auf die Grundflächen wirkenden Drucke normal zu jenen und überall gleich stark.

Wirkt auf die Mantelflächen von aussen nach innen ein Druck von der Grösse p', so folgt für sie aus den Gleichungen (133')

$$-X_n = \overline{X} = -p' \cos(n, x), \quad -Y_n = \overline{Y} = -p' \cos(n, y), \quad -Z_n = \overline{Z} = 0,$$

und man erhält daraus:

$$M_1 = M_2 = -p'.$$

Wirkt auf die Grundflächen von aussen nach innen ein normaler Druck p, so ist ebenda zu setzen

$$-X_n = \overline{X} = 0, \qquad -Y_n = \overline{Y} = 0, \qquad -Z_n = \overline{Z} = -p\cos(n, z),$$

und es folgt:

$$M_3 = -p.$$

Setzt man diese Werthe in (137) und (137'''') ein, so erhält man den Satz:

Das Deformationspotential eines homogenen isotropen Cylinders, der auf seinen Mantelflächen den constanten Druck p', auf den Grundflächen den constanten Druck p erfährt, hat den Werth:

$$\varphi = \frac{me^2 + m_3 z^2}{2} = -\frac{(cp' - c'p)(x^2 + y^2) + \big((c + c')p - 2c'p'\big)z^2}{2(c - c')(c + 2c')}; \qquad (139')$$

seine Verrückungen haben also die Grössen:

$$u = -\frac{(cp' - c'p)x}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad v = -\frac{(cp' - c'p)y}{(c - c')(c + 2c')},$$
$$w = -\frac{\big((c + c')p - 2c'p'\big)z}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad (139'')$$

seine Deformationen sind:

$$x_x = y_y = -\frac{cp' - c'p}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad z_z = -\frac{(c + c')p - 2c'p'}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad (139''')$$
$$y_z = z_x = x_y = 0,$$

seine räumliche Dilatation ist:

$$\vartheta = -\frac{p + 2p'}{c + 2c'}.$$

Dilatations- und Druckellipsoide sind ersichtlich Rotationsflächen um Parallele zur Z-Axe.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass die Cylinderflächen frei sind, also $p' = 0$ ist und nur auf die Grundflächen ein constanter Zug oder Druck ausgeübt wird, was sehr nahe realisirt ist, wenn ein Draht oder Stab durch ein angehängtes Gewicht gedehnt wird. Dann findet sich

$$x_x = y_y = +\frac{c'p}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad z_z = -\frac{(c + c')p}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad (140)$$

und diese Formeln zeigen, wie bei positivem p, also ausgeübtem Druck, eine Längscontraction und Querdilatation, bei negativem p, also ausgeübtem Zug, eine Längsdilatation und Quercontraction eintritt. Die Coëfficienten Λ und Λ' der Längs- und Querdilatation bei einseitigem Druck sind resp.

$$\Lambda' = \frac{c'}{(c - c')(c + 2c')}, \qquad \Lambda = \frac{c + c'}{(c - c')(c + 2c')}; \qquad (140')$$

beide sind der Beobachtung zugänglich und geben Mittel, die beiden Elasticitätsconstanten gesondert zu berechnen. Da die practische Anwendung der vorstehenden Formeln einen Cylinder voraussetzt, dessen Länge sehr viel grösser ist als sein Querschnitt, damit die Art der Vertheilung der äussern Kraft auf den Grundflächen, welche von der Befestigung des dehnenden Gewichtes abhängig und uns unbekannt ist, keinen Einfluss übt, so wird die gesammte Längsdeformation viel grösser ausfallen als die Querdeformation, letztere also der Messung grössere Schwierigkeiten bieten. Man kann statt ihrer mit Vortheil die cubische Dilatation bei einseitigem Zug messen, indem man als zu dehnenden Körper einen Hohlcylinder wählt, der unten vollständig und oben durch einen mit einem feinen getheilten Glasröhrchen versehenen Stopfen verschlossen ist. Füllt man den Hohlraum mit Flüssigkeit, sodass deren obere Fläche in dem Glasrohr steht, so wird bei einer Längsdehnung des Hohlcylinders die Flüssigkeit in dem Röhrchen sinken, und die Messung dieser Verschiebung gestattet die cubische Dilatation des Hohlcylinders und hierdurch die Constante $1/(c+2c')$ zu bestimmen.

c) Hat der betrachtete Körper die Form eines rechteckigen Prismas, so kann man längs jeder seiner Flächen die innern Normaldrucke zu Constanten, die Tangentialdrucke zu Null machen, indem man $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ setzt. Dann wird

$$\begin{array}{lll} -X_x = M_1 \cos(n,x), & -Y_y = M_2 \cos(n,y), & -Z_z = M_3 \cos(n,z), \\ -Y_z = 0, & -Z_x = 0, & -X_y = 0. \end{array} \tag{141}$$

Uebt man also von aussen auf die Flächen normal zur X-Axe den constanten Druck p_1, auf die normal zur Y-Axe p_2, auf die normal zur Z-Axe p_3 aus, so geben die Gleichungen (133′)

$$\begin{array}{ll} \text{für die Flächen normal zur } X\text{-Axe} & -X_n = \overline{X} = -p_1 \cos(n,x), \\ \text{„ „ „ „ „ } Y\text{-Axe} & -Y_n = \overline{Y} = -p_2 \cos(n,y), \\ \text{„ „ „ „ „ } Z\text{-Axe} & -Z_n = \overline{Z} = -p_3 \cos(n,z), \end{array}$$

woraus folgt:

$$M_1 = -p_1, \qquad M_2 = -p_2, \qquad M_3 = -p_3.$$

Die Berücksichtigung dieser Werthe ergiebt den Satz:

Das Deformationspotential für ein homogenes isotropes rechteckiges Prisma, welches auf den Flächenpaaren normal zur X, Y, Z-Axe resp. die constanten Drucke p_1, p_2, p_3 erfährt, hat den Werth:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{m_1 x^2 + m_2 y^2 + m_3 z^2}{2} \\ &= -\frac{\big((c+c')p_1 - c'(p_2+p_3)\big)x^2 + \big((c+c')p_2 - c'(p_3+p_1)\big)y^2 + \big((c+c')p_3 - c'(p_1+p_2)\big)z^2}{2(c-c')(c+2c')}. \end{aligned} \tag{141'}$$

Verrückungen und Deformationen berechnen sich wie oben; die Dilatations- und Druckaxen liegen den Prismenkanten parallel.

IV. Wir wollen nun einige derjenigen Functionen, die in der Hydrodynamik ein Geschwindigkeitspotential darstellen können, als Deformationspotential wählen.

1. Setzen wir

$$\varphi = q\, le, \tag{142}$$

worin $e^2 = x^2 + y^2$ und q constant ist, so giebt dies eine Deformation, welche, da $\Delta\varphi$ verschwindet, nach (135′) nur ohne Einwirkung äusserer Kräfte auf den elastischen Körper bestehen kann.

Da φ nur von e abhängt, so ist sowohl $\partial\varphi/\partial e$ als $\partial^2\varphi/\partial e^2$ längs coaxialer Kreiscylinder um die Z-Axe constant und man kann nach p. 420 das Medium durch einen solchen Kreiscylinder vom beliebigen Radius R begrenzen, wenn man gegen dessen Fläche eine normale constante Druckkraft wirken lässt. Da aber $\partial\varphi/\partial x, \ldots$ in der Z-Axe unendlich wird, muss diese ausserhalb des Mediums liegen, der Cylinder also einen Hohlraum begrenzen.

Der elastische Druck gegen eine Cylinderfläche ist nach (136″″)

$$-P_e = (c - c')\, q \frac{d^2 le}{de^2} = -(c - c') \frac{q}{e^2}; \tag{142′}$$

wirkt also gegen die Wand des Hohlraumes der Druck p parallel mit e, so bestimmt sich die Constante q aus

$$-p = -\overline{P}_e = -(c - c')\frac{q}{R^2}, \tag{142″}$$

und es gilt der Satz:

Die Function

$$\varphi = \frac{pR^2 le}{c - c'} \tag{142‴}$$

ist das Deformationspotential für ein unendliches homogenes, isotropes Medium mit einem cylindrischen Hohlraum vom Radius R, gegen dessen Wand der Druck p wirkt.

Um das Medium noch in einer zweiten Cylinderfläche begrenzen und für beide Flächen den Druck beliebig vorschreiben zu können, combiniren wir das Potential $\varphi = q\, le$ mit dem oben betrachteten Potential der homogenen Deformation (139′)

$$\varphi' = \frac{1}{2}(me^2 + m_3 z^2),$$

welches die Antheile der Drucke $-P_e' = M$, $-Z_z' = M_3$ liefert.

Es entspricht demgemäss dem Deformationspotential

$$\varphi = q\, le + \frac{1}{2}(me^2 + m_3 z^2) \tag{143}$$

das Resultat:

$$-P_e = M - (c - c')\frac{q}{e^2}, \qquad -Z_z = M_3, \tag{143′}$$

welches zeigt, dass neben den Drucken auf die Mantelflächen noch ein Druck oder Zug p' auf die Grundflächen des Hohlcylinders ausgeübt werden kann.

Erfahre die innere Cylinderfläche vom Radius R_i den Druck p_i parallel mit $+e$, die äussere vom Radius R_a den Druck p_a parallel mit $-e$, so ist zu setzen:

$$-p_i = -(P_e)_i = M - (c-c')\frac{q}{R_i^2},$$

$$-p_a = -(P_e)_a = M - (c-c')\frac{q}{R_a^2},$$

woraus folgt:

$$M = \frac{p_i R_i^2 - p_a R_a^2}{R_a^2 - R_i^2}, \qquad q = \frac{(p_i - p_a) R_a^2 R_i^2}{(c-c')(R_a^2 - R_i^2)}; \tag{143''}$$

dazu kommt $M_3 = -p'$.

Wird eine Zugkraft auf die Grundflächen nicht ausgeübt, ist also $M_3 = 0$, so folgt aus (137'''') wegen $M_1 = M_2 = M$:

$$m_1 = m_2 = m = \frac{cM}{(c-c')(c+2c')}, \qquad m_3 = \frac{-2c'M}{(c-c')(c+2c')}. \tag{143'''}$$

Das Deformationspotential eines homogenen isotropen Hohlcylinders von den Radien R_i und R_a, welcher auf den Mantelflächen die constanten Drucke p_i und p_a erfährt, ist also:

$$\varphi = \frac{1}{(c-c)(R_a^2 - R_i^2)}\left(\frac{ce^2 - 2c'z^2}{2(c+2c')}(p_i R_i^2 - p_a R_a^2) + (p_i - p_a) R_a^2 R_i^2 le\right). \tag{144}$$

Behalten wir die Abkürzung (143) bei, so folgen daraus die Verrückungen:

$$u = x\left(m + \frac{q}{e^2}\right), \qquad v = y\left(m + \frac{q}{e^2}\right), \qquad w = m_3 z, \tag{144'}$$

die Deformationen:

$$\begin{gathered} x_x = m + q\left(\frac{1}{e^2} - \frac{2x^2}{e^4}\right), \quad y_y = m + q\left(\frac{1}{e^2} - \frac{2y^2}{e^4}\right), \quad z_z = m_3, \\ y_z = z_x = 0, \qquad x_y = -\frac{4qxy}{e^4}. \end{gathered} \tag{144''}$$

Für eine Stelle der XZ-Ebene ist $y = 0$, also

$$x_x = m - \frac{q}{e^2}, \quad y_y = m + \frac{q}{e^2}, \quad z_z = m_3, \quad y_z = z_x = x_y = 0;$$

die Hauptdilatationsaxen sind dort also den Coordinatenaxen parallel. Ist der innere Druck p_i grösser als der äussere p_a, so ist $q > 0$, und es findet die grösste Dilatation parallel der Y-Axe statt; daher wird ein Zerspringen des Rohres mit Spalten in den Meridianebenen, und zwar von innen her, beginnen.

2. Der Werth des Deformationspotentiales

$$\varphi = \frac{q}{r},$$

worin $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, erfüllt die Gleichung $\Delta\varphi = 0$, giebt also keine räumliche Dilatation und kann daher nur stattfinden, wenn äussere Kräfte nicht wirken.

Als Begrenzung lässt sich hier eine beliebige Kugel um den Coordinatenanfang wählen, in welcher ein constanter Normaldruck p herrscht; denn für eine solche ist sowohl $\partial\varphi/\partial r$ als $\partial^2\varphi/\partial r^2$ constant.

Da aber $\partial\varphi/\partial x, \ldots$ für $r = 0$ unendlich wird, so muss der Coordinatenanfang ausserhalb des elastischen Mediums liegen, die Kugel also einen Hohlraum begrenzen.

Die elastische Druckkraft gegen eine Kugel um den Coordinatenanfang berechnet sich nach (136'''') zu

$$-P_r = (c - c')q \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dr^2} = 2(c - c')\frac{q}{r^3}; \tag{145'}$$

wirkt also gegen die Wand des Hohlraumes parallel mit r der Druck p, so bestimmt sich die Constante q aus

$$-p = -\overline{P}_r = 2(c - c')\frac{q}{R^3}, \tag{145''}$$

und man erhält den Satz:

Die Function

$$\varphi = -\frac{pR^3}{2(c - c')r} \tag{145'''}$$

ist das Deformationspotential für ein unendliches, homogenes, isotropes Medium mit einem kugelförmigen Hohlraum vom Radius R, gegen dessen Wandung der Druck p wirkt.

Um noch in einer zweiten Kugelfläche den normalen Druck willkürlich vorschreiben zu können, combiniren wir das Potential $\varphi = q/r$ mit dem Potential $mr^2/2$ der homogenen Deformation aus (138') zu:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{mr^2}{2}; \tag{146}$$

hieraus folgt in der früheren Abkürzung:

$$-P_r = M + 2(c - c')\frac{q}{r^3}. \tag{146'}$$

Wirkt auf die innere Kugelfläche vom Radius R_i der Druck p_i parallel $+r$, auf die äussere vom Radius R_a der Druck p_a parallel $-r$, so gilt:

$$-p_i = -(P_r)_i = M + 2(c - c')\frac{q}{R_i^3},$$

$$-p_a = -(P_r)_a = M + 2(c - c')\frac{q}{R_a^3},$$

und daher:

$$M = \frac{p_i R_i^3 - p_a R_a^3}{R_a^3 - R_i^3}, \qquad q = \frac{(p_a - p_i) R_a^3 R_i^3}{2(c - c')(R_a^3 - R_i^3)}; \tag{146''}$$

zugleich folgt aus (137'''''), da $M_1 = M_2 = M_3 = M$ ist:

$$m = \frac{M}{c + 2c'}. \tag{146'''}$$

Das Deformationspotential φ für eine homogene isotrope Hohlkugel von dem innern Radius R_i, dem äussern R_a, welche unter dem innern constanten Druck p_i, dem äussern p_a steht, ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{1}{R_a^3 - R_i^3}\left(\frac{r^2}{2(c + 2c')}(p_i R_i^3 - p_a R_a^3) + \frac{(p_a - p_i) R_a^3 R_i^3}{2(c - c')r}\right). \tag{147}$$

Unter Benutzung der abgekürzten Form (146) folgen die Werthe der Verrückungen:

$$u = x\left(m - \frac{q}{r^3}\right), \qquad v = y\left(m - \frac{q}{r^3}\right), \qquad w = z\left(m - \frac{q}{r^3}\right); \tag{147'}$$

die Deformationen sind:

$$\begin{gathered} x_x = m - q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right), \quad y_y = m - q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right), \quad z_z = m - q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right), \\ y_z = \frac{6qyz}{r^5}, \qquad z_x = \frac{6qzx}{r^5}, \qquad x_y = \frac{6qxy}{r^5}. \end{gathered} \tag{147''}$$

3. Schliesslich wollen wir noch ein Beispiel für die Deformation in Folge der Einwirkung einer äussern Kraft behandeln.

Sei eine Kugel vom Radius R, von der Masse M und der Dichte ε gegeben, deren Theile nach dem Newton'schen Gesetz auf einander wirken, dann ist das Kräftepotential, auf die Masseneinheit bezogen,

$$\Phi = \alpha + \beta r^2,$$

worin $\beta = fM/R^3$ (unter f die Constante des Newton'schen Gesetzes verstanden), α aber willkürlich ist, da Φ nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Für das Deformationspotential φ gilt dann nach (135'') die Bedingung

$$\frac{\varepsilon}{c}(\alpha + \beta r^2) = \Delta\varphi,$$

aus welcher sich, da φ nur r enthalten kann, leicht findet:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{c}\left(\frac{\alpha r^2}{6} + \frac{\beta r^4}{20} + \gamma + \frac{\delta}{r}\right);$$

γ und δ sind die Integrationsconstanten.

Da $d\varphi/dr$ für $r = 0$ nicht unendlich werden kann, so muss δ verschwinden; γ hat auf die Deformation keinen Einfluss. Soll die

Kugel von aussen keine Druckkraft erleiden, so muss nach p. 420 für $r = R$

$$(c - c')\frac{d^2\varphi}{dr^2} + c'\Delta\varphi = 0$$

sein. Setzt man den erhaltenen Werth von φ ein, so findet sich:

$$\alpha = -\frac{3}{5}\beta R^2 \frac{3c + 2c'}{c + 2c'}.$$

Eine homogene Kugel von der Dichte ε und dem Radius R erleidet durch die Newton'sche Anziehung zwischen ihren Theilen eine Deformation, deren Potential gegeben ist durch:

$$\varphi = \frac{2\pi f \varepsilon^2}{15c}\left(\frac{r^4}{2} - r^2 R^2 \frac{3c + 2c'}{c + 2c'}\right).$$

Die Verkürzung des Radius in Folge dieser Deformation beträgt:

$$\varrho = \frac{8\pi R^3 f \varepsilon^2}{15(c + 2c')} = \frac{2Mf\varepsilon}{5(c + 2c')}.$$

§ 37. Mechanik elastischer Körper; Gleichgewichtszustände. Drillungsdeformationen; gleichförmige Drillung. Combinirte Deformationen.

I. Hatten wir im Vorstehenden Deformationen betrachtet, welche in Analogie traten zu den Potentialbewegungen einer Flüssigkeit, so wollen wir uns nunmehr zu denjenigen wenden, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Weil für dieselben characteristisch ist, dass die Drehungswinkel oder Drillungscomponenten

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{149}$$

der Volumenelemente nicht verschwinden, nennen wir sie Drillungsdeformationen und nehmen aus der Hydrodymanik den Begriff der Drillungslinie herüber, als einer Curve, deren Element an jeder Stelle in die Richtung der dort vorhandenen Drillungsaxe fällt, also der Gleichung:

$$dx : dy : dz = \lambda : \mu : \nu \tag{149'}$$

genügt. Zwischen den λ, μ, ν besteht die identische Relation:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0. \tag{149''}$$

Führen wir die den Wirbelfunctionen entsprechenden Drillungsfunctionen U, V, W durch die Beziehungen

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \tag{150}$$

ein, so treten dieselben, falls wir sie noch der Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{150'}$$

unterwerfen, mit den Drillungen λ, μ, ν in den Zusammenhang

$$\Delta U = -2\lambda, \qquad \Delta V = -2\mu, \qquad \Delta W = -2\nu. \tag{150''}$$

Da diese Werthe von u, v, w die räumliche Dilatation ϑ zu Null machen, so schreiben sich die Druckcomponenten in der Form:

$$\begin{aligned}
-X_x &= (c-c')\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -Y_z = (c-c')\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \lambda\right) = (c-c')\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda\right),\\
-Y_y &= (c-c')\frac{\partial v}{\partial y}, \quad -Z_x = (c-c')\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \mu\right) = (c-c')\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\right),\\
-Z_z &= (c-c')\frac{\partial w}{\partial z}, \quad -X_y = (c-c')\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\right) = (c-c')\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\right),
\end{aligned} \tag{150'''}$$

und die Gleichgewichtsbedingungen werden zu

$$\begin{aligned}
\varepsilon X &= -\frac{c-c'}{2}\Delta u = -\frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (c-c')\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right),\\
\varepsilon Y &= -\frac{c-c'}{2}\Delta v = -\frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) = (c-c')\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right),\\
\varepsilon Z &= -\frac{c-c'}{2}\Delta w = -\frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (c-c')\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{150''''}$$

wo auf der rechten Seite je drei verschiedene Formen für dieselbe Function stehen.

Zieht man den letzten der angegebenen Werthe in Betracht, so erkennt man den Satz:

Eine reine Drillungsdeformation kann nur dann ohne Einwirkung äusserer Kräfte bestehen, wenn die Drillungscomponenten an jeder Stelle durch die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function ψ, des Drillungspotentiales, nach den Coordinaten gegeben sind, nämlich

$$\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \mu = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \nu = \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{151}$$

ist; wegen der identischen Beziehung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0$$

muss dabei gelten

$$\Delta \psi = 0. \tag{151'}$$

Die Bedingungen für eine begrenzende Fläche sind hier minder einfach als bei dem Deformationspotential, weil sich die u, v, w nicht durch das derselben Stelle entsprechende ψ ausdrücken lassen.

Während unter den Potentialdeformationen diejenigen, denen im ganzen Körper constante Werthe der Deformationsgrössen entsprechen, eine ganz besondere Wichtigkeit und vielfältige Anwendung besitzen, geben die Drillungsdeformationen, für welche die Drillungscomponenten constant sind, überhaupt kein elastisches Problem; denn, wie schon aus dem Inhalt von § 16 hervorgeht, treten solche Werthe nur auf, wenn der Körper als Ganzes bewegt wird. Trotzdem findet der diesem Fall entsprechende Werth des Drillungspotentiales

$$\psi = n_1 x + n_2 y + n_3 z$$

in der Combination mit anderen Potentialen Anwendung.

Der einfachste Fall von Potentialdrillung, welcher wirklich auf ein elastisches Problem führt, ist derjenige der sogenannten gleichförmigen Drillung um eine, etwa die Z-Axe. Man versteht darunter eine Deformation, bei welcher sich alle Ebenen normal zur Drillungsaxe als Ganzes drehen und der Drillungswinkel eine lineäre Function des Abstandes von einer willkürlichen Anfangsebene ist.

Nach dem p. 377 Besprochenen wird eine solche Drillung um die Z-Axe definirt sein durch

$$u = -\tau y z, \quad v = +\tau x z, \quad \text{also } \nu = \tau z, \tag{152}$$

worin τ die gegenseitige Drehung zweier um die Länge Eins parallel der Z-Axe von einander entfernter Ebenen bezeichnet.

Wegen dieses Werthes von ν nimmt die Gleichung (149″) die Form an:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \tau = 0,$$

und die Bedingungen für die Existenz eines Drillungspotentiales ψ liefern die Formeln:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0. \tag{152'}$$

Hieraus folgt, dass ψ die Gestalt besitzt

$$\psi = \tau\left(\frac{z^2}{2} + \psi'\right),$$

worin ψ' nur x und y enthält und der Gleichung

$$\Delta' \psi' + 1 = 0$$

genügen muss.

Die Werthe (152) von u und v ergeben, in die Formel

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

eingeführt, das Resultat, dass w nur x und y enthalten kann; wir setzen demgemäss:

$$w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \chi(x, y). \tag{152''}$$

Für χ folgt eine Bedingung durch Combination der letzten Formel (152′) mit den Beziehungen $\varDelta U = -2\lambda$, $\varDelta V = -2\mu$; sie lautet:

$$\varDelta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \tau \varDelta' \chi = 0; \tag{152‴}$$

U, V, W einzeln zu bestimmen ist in unserm Falle nicht nöthig, es handelt sich nur um die Function χ.

Die elastischen Drucke nehmen nach dem Vorstehenden die Werthe an:

$$\begin{aligned} -X_x &= 0, & -Y_z &= \frac{c-c'}{2}\tau\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + x\right), \\ -Y_y &= 0, & -Z_x &= \frac{c-c'}{2}\tau\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - y\right), \\ -Z_z &= 0, & -X_y &= 0; \end{aligned} \tag{153}$$

Da sie von z unabhängig sind, so wollen wir versuchen, das elastische Medium durch einen Cylinder von beliebigem Querschnitt parallel der Z-Axe zu begrenzen. Ein Element seiner Querschnittscurve nennen wir ds, dasjenige der äusseren Normale darauf dn und nehmen an, ds liege zu dn wie Y zu X.

Dann sind die Cosinus der Richtungswinkel der äusseren Normale

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos(n, z) = 0,$$

und die Druckcomponenten gegen ein Oberflächenelement werden:

$$-X_n = 0, \quad -Y_n = 0, \quad -Z_n = \frac{c-c'}{2}\tau\left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + x\right)\frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{dn}\right). \tag{153′}$$

Setzen wir:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = +\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \tag{153″}$$

so ergiebt sich nach einfacher Reduction:

$$-Z_n = \frac{c-c'}{2}\tau\frac{d}{ds}\left(\Omega + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right).$$

Soll die Cylinderfläche eine freie Oberfläche sein, so müssen alle drei Componenten X_n, Y_n, Z_n längs derselben verschwinden. Wir erkennen, dass dies stattfindet, wenn längs des Randes ihres Querschnittes

$$\Omega + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0 \tag{153‴}$$

ist; eine willkürliche Constante denken wir dabei in Ω hineingenommen. Da diese Formel eine endliche Relation zwischen den Coordinaten der Punkte der Querschnittscurve enthält, so stellt sie die Gleichung dieser Curve dar.

Aus der Beziehung (153″) folgt unmittelbar:

$$\varDelta' \Omega = 0, \tag{153⁗}$$

und wir können die Behandlung des Problemes auch mit Bestimmung der Function Ω, statt der Function χ, beginnen, gemäss dem folgenden Satz.

Ist Ω eine Function von x und y, welche die Gleichung $\Delta'\Omega = 0$ erfüllt, ist

$$\Omega + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0$$

die Gleichung einer geschlossenen Curve S und bezeichnet ferner χ die durch

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = - \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

definirte Function von x und y, dann stellen die Werthe

$$u = - \tau y z, \quad v = + \tau x z, \quad w = \tau \chi(x, y)$$

eine gleichförmige Drillung des Cylinders dar, dessen Querschnitt von der Curve S begrenzt ist. Das ihr entsprechende Drillungspotential hat den Werth:

$$\psi = \frac{\tau}{2}\left(\Omega + z^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\right).$$

Die Bestimmung einer Function χ aus Ω ist dabei stets ohne Schwierigkeit möglich, da

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = - \frac{\partial \Omega}{\partial y} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dy$$

wegen der Gleichung $\Delta'\Omega = 0$ stets ein vollständiges Differential ist.

Um eine solche Drillung wirklich hervorzubringen, muss man den Cylinder in zwei Querschnitten begrenzen und in denselben äussere Kräfte auf ihn ausüben. Da nach (153) bei unsern Voraussetzungen alle Druckkräfte, mit Ausnahme von Y_z und Z_x, gleich Null sind, so können diese äusseren Drucke nur tangentiale sein.

Führen wir in die Ausdrücke für Y_z und X_z ebenfalls Ω statt χ ein, so wird:

$$\begin{aligned} - Y_z &= + \frac{c - c'}{2} \tau \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x\right) \\ - X_z &= - \frac{c - c'}{2} \tau \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + y\right). \end{aligned} \tag{154}$$

Die äussere Kraft, welche auf den nach $+ Z$ liegenden Querschnitt ausgeübt wird, habe die Componenten $\overline{X}$ und $\overline{Y}$, dann ist:

$$\overline{X} = - X_z, \quad \overline{Y} = - Y_z;$$

entgegengesetzte Componenten sind auf dem nach $- Z$ liegenden Querschnitt anzubringen. Ueber den ganzen Querschnitt q summirt, geben $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ ein Drehungsmoment

$$N = \int \left(x\bar{Y} - y\bar{X}\right) dq = \frac{c-c'}{2}\tau \int \left(x\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x\right) + y\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + y\right)\right) dq$$
$$= \frac{c-c'}{2}\tau\left(\int\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)dq + Q\varkappa^2\right), \qquad (154')$$

worin mit $\varkappa$ der Trägheitsradius des Querschnittes um die Z-Axe bezeichnet ist.

Ist der Querschnitt des Cylinders klein gegen seine Länge, so kann man annehmen, dass der Cylinder mit Ausnahme der den Enden unmittelbar benachbarten Theile überall eine gleichförmige Drillung erleidet, deren Grösse nur von dem Gesammtmoment der ausgeübten Kräfte, nicht aber von ihrer Vertheilung auf dem Querschnitt abhängt. Dann kann man die einzige Constante der Lösung τ bestimmen durch die aus (154') folgende Beziehung:

$$\tau = \frac{2N}{(c-c')\left(\int\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)dq + Q\varkappa^2\right)}. \qquad (154'')$$

Hierin wird man nach dem p. 422 Gesagten $(c-c')/2$ den Drillungswiderstand, $2/(c-c') = \mathsf{T}$ den Drillungscoëfficienten des isotropen Körpers nennen. T enthält die beiden Constanten c und c' in einer andern Combination als K und Λ; seine Bestimmung, welche keine experimentellen Schwierigkeiten bietet, ist also mit derjenigen von Λ zusammen sehr geeignet, um c und c' gesondert zu ergeben.

Es ist nach dem Vorstehenden ohne alle Schwierigkeit, eine grosse Anzahl von Querschnitten zu finden, für welche das Drillungsproblem sich in geschlossener Form lösen lässt; schon die Annahme ganzer rationaler Functionen für Ω giebt Fälle von hervorragendem Interesse.

Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall einer Function zweiten Grades und setzen demgemäss, um die Formel (153'''') zu erfüllen:

$$2\Omega = C(x^2 - y^2) - D; \qquad (155)$$

die Gleichung (153''') der Querschnittscurve verwandelt sich hierdurch in:

$$(1 + C)x^2 + (1 - C)y^2 = D,$$

welche, falls man

$$\frac{D}{1+C} = a^2, \qquad \frac{D}{1-C} = b^2, \qquad (155')$$

also

$$C = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \qquad D = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

setzt, die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

annimmt und eine Ellipse von den Halbaxen a und b darstellt.

Nach (154″) folgt dann

$$\tau = \frac{2N}{(e-e')\big((1+C)\int x^2\,dq + (1-C)\int y^2\,dq\big)}$$
$$= \frac{N(a^2+b^2)}{(e-e')\,Q\,(a^2\varkappa_x^2 + b^2\varkappa_y^2)},$$

falls $\varkappa_x$ und $\varkappa_y$ die Trägheitsradien des Querschnittes um die X- und Y-Axe bezeichnen. Deren Grösse bestimmt sich nach dem p. 168 entwickelten Verfahren leicht zu

$$\varkappa_x = \frac{b}{2}, \qquad \varkappa_y = \frac{a}{2},$$

und es resultirt daher

$$\tau = \frac{2N(a^2+b^2)}{(e-e')\,Q\,a^2b^2}.$$

Wendet man dies auf einen Cylinder von der Länge L an, der, da die Drillung gleichförmig ist, eine Gesammtdrehung $\tau L = T$ erfährt, so findet sich das Resultat:

Die Drillung eines elliptischen Cylinders von der Länge L und den Halbaxen a, b seines Querschnittes durch ein um seine Axe wirkendes Moment N hat die Grösse:

$$T = \frac{2NL}{(e-e')Q}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \tag{156}$$

Für einen Kreiscylinder vom Radius R geht diese Formel über in:

$$T = \frac{4NL}{(e-e')\pi R^4}. \tag{156'}$$

Aus dem Werth

$$2\Omega = C(x^2 - y^2) - D$$

erhält man gemäss

$$d\chi = Cy\,dx + Cx\,dy:$$
$$\chi = Cxy + E,$$

also, falls w für $x = y = 0$ selbst verschwindet, in Rücksicht auf den Werth von C:

$$w = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\tau xy. \tag{156''}$$

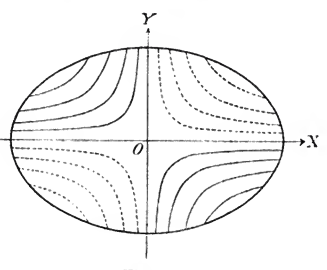


Fig. 46.

Bei positiver Drehung und $a > b$ tritt also bei der Drillung der erste und dritte Quadrant eines jeden Querschnittes nach der negativen, der zweite und vierte nach der positiven Seite aus seiner Ebene. Die Curven constanter Verschiebung w sind gleichseitige Hyperbeln; Figur 46 verdeutlicht den Vorgang.

II. Das Newton'sche und das logarithmische Potential bieten Mittel zur Aufstellung von Functionen, welche Drillungspotentiale sein können.

Ein Beispiel hierfür giebt die Function

$$\psi = q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}; \tag{157}$$

aus ihr folgt

$$\lambda = q \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z}, \quad \mu = q \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z}, \quad \nu = q \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \tag{157'}$$

und die Gleichungen (150″) gestatten die Lösung:

$$U = -q \frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial z}, \quad V = -q \frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial z}, \quad W = -q \left(\frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial z} - \frac{2}{r} \right), \tag{157''}$$

wobei in W das Glied $2q/r$ zugefügt ist, um die Beziehung (150′) zu erfüllen. Es folgen die Werthe der Verrückungen:

$$u = +2q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad v = -2q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad w = 0; \tag{157'''}$$

sie stellen eine Drehung um die Z-Axe dar um einen Winkel $2q/r^3$, der also auf Kugeln um den Coordinatenanfang constant ist. Im Coordinatenanfang wird $\tau = \infty$, dieser Punkt muss daher ausserhalb des elastischen Körpers liegen; wir können letzteren demgemäss durch eine Kugel vom Radius R um den Coordinatenanfang begrenzen, falls wir auf derselben die Drehung gleich τ gegeben annehmen. Die Constante q bestimmt sich dann $= \tau R^3/2$ und wir gelangen zu dem Satze:

Ein unendliches elastisches Medium, in welchem ein kugelförmiger Theil vom Radius R um den Winkel τ um die Z-Axe gedreht ist, erleidet eine Deformation, welcher das Drillungspotential

$$\psi = \frac{\tau R^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{\tau R^3 z}{2 r^3}$$

entspricht.

Durch Zufügung der aus dem Ansatz $\psi' = nz$ folgenden Verrückungen

$$u' = -ny, \quad v' = +nx, \quad w' = 0$$

erhält man eine allgemeinere Lösung, welche gestattet, das elastische Medium zwischen zwei Kugeln einzuschliessen, an denen beiden will-

kürliche Drehungen τ_i und τ_a vorgeschrieben sind. Die Formeln stimmen mit (122) bis (122″) überein, auch lässt sich gemäss dem jenen Folgenden leicht das Moment N berechnen, welches nöthig ist, um die innere oder äussere Kugel in der abgelenkten Lage zu erhalten.

III. Da reine Drillungsdeformationen ohne Einwirkung äusserer Kräfte nur stattfinden können, wenn ein Drillungspotential existirt, so wird dadurch die Anzahl der einfachen und interessanten Fälle sehr beschränkt. Grössere Mannigfaltigkeit bieten die combinirten Deformationen, die so gewählt werden können, dass die einzelnen Theile für sich Einwirkungen äusserer Kräfte erfordern, welche sich aber durch die Combination aufheben.

Nach p. 389 ist der allgemeinste Ansatz für u, v, w der folgende:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \tag{158}$$

wobei die Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

besteht; in die Gleichgewichtsbedingungen (133) eingeführt, liefert er die Gleichungen, welche den Summen der resp. Formeln in (135′) und (150″″) entsprechen:

$$\begin{aligned} -\varepsilon X &= c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c-c'}{2}\varDelta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (c-c')\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right), \\ -\varepsilon Y &= c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{c-c'}{2}\varDelta\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) = c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (c-c')\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right), \\ -\varepsilon Z &= c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{c-c'}{2}\varDelta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = c\varDelta\frac{\partial \varphi}{\partial z} - (c-c')\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right); \end{aligned} \tag{158'}$$

hierin haben λ, μ, ν die frühern Bedeutungen.

Ein Beispiel für eine combinirte Deformation liefert die Uebertragung der p. 378 für eine Flüssigkeitsbewegung angewandten Lösung.

Durch

$$\lambda_1 = +n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \qquad \mu_1 = -n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \qquad \nu_1 = 0 \tag{159}$$

ist eine Drillungsdeformation

$$u_1 = +\frac{nxz}{r^3}, \qquad v_1 = +\frac{nyz}{r^3}, \qquad w_1 = n\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \tag{159'}$$

gegeben, durch

$$\varphi_2 = \frac{qz}{r} \tag{159''}$$

eine Potentialdeformation

$$u_2 = -\frac{qxz}{r^3}, \qquad v_2 = -\frac{qyz}{r^3}, \qquad w_2 = q\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right). \tag{159'''}$$

Setzt man diese Werthe für λ, μ, ν und φ in die Gleichungen (158') ein, so lauten sie in Rücksicht auf die Relation $\Delta(1/r) = 0$:

$$-\varepsilon X = cq\,\Delta\frac{\partial\frac{z}{r}}{\partial x} - (c-c')\,n\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z},$$

$$-\varepsilon Y = cq\,\Delta\frac{\partial\frac{z}{r}}{\partial y} - (c-c')\,n\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z},$$

$$-\varepsilon Z = cq\,\Delta\frac{\partial\frac{z}{r}}{\partial z} - (c-c')\,n\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

und nach (96'') genügen ihnen die Werthe

$$X = Y = Z = 0,$$

falls

$$2cq - (c-c')\,n = 0$$

ist. Die hiernach durch Combination von (159') und (159''') resultirenden Verrückungen

$$u = n\frac{(c+c')\,xz}{2cr^3}, \qquad v = n\frac{(c+c')\,yz}{2cr^3}, \qquad w = n\frac{(c+c')\,z^2 + (3c-c')\,r^2}{2cr^3} \tag{160}$$

kommen also ohne äussere Kräfte zu Stande.

Die Deformationen bestimmen sich zu:

$$x_x = n\frac{c+c'}{2c}\left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3}, \qquad y_y = n\frac{c+c'}{2c}\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3},$$

$$z_z = n\frac{c+c'}{2c}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3} - n\frac{c-c'}{c}\frac{z}{r^3}, \qquad \vartheta = -n\frac{c-c'}{c}\frac{z}{r^3}, \tag{160'}$$

$$y_z = -n\frac{(c+c')\,6yz^2}{2cr^5} - n\frac{(c-c')\,y}{cr^3}, \qquad z_x = -n\frac{(c+c')\,6xz^2}{2cr^5} - n\frac{(c-c')\,x}{cr^3},$$

$$x_y = -n\frac{(c+c')\,6xyz}{2cr^5}.$$

Von Druckcomponenten wollen wir nur diejenigen angeben, welche gegen eine Kugelfläche um den Coordinatenanfang wirken; diese lauten:

$$+X_r = \frac{3n\,(c^2-c'^2)\,xz}{2cr^4}, \qquad +Y_r = \frac{3n\,(c^2-c'^2)\,yz}{2cr^4},$$

$$+Z_r = \frac{3n\,(c^2-c'^2)\,z^2}{2cr^4} + \frac{n(c-c')^2}{2cr^2}. \tag{160''}$$

Denkt man sich eine derartige Kugel vom Radius R als Hohlraum in dem unendlichen Medium hergestellt, so müssten, um die Ver-

rückungen (160) hervorzubringen, gegen deren innere Fläche Kräfte $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ wirken, gegeben durch

$$\overline{X} = \overline{X}_r, \qquad \overline{Y} = \overline{Y}_r, \qquad \overline{Z} = \overline{Z}_r.$$

Ist der Hohlraum unendlich klein, so wird auf den Zustand an in merklicher Entfernung gelegenen Punkten nicht die Vertheilung, sondern nur die Grösse und Richtung der Resultirenden dieser Kräfte Einfluss haben. Diese Resultirende liegt parallel der Z-Axe und hat die von R nicht abhängende Grösse

$$K = 4\pi n (c - c'); \tag{160'''}$$

eine gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete müssen die Kräfte geben, welche zur Erhaltung des Gleichgewichts in unendlich fernen Punkten anzubringen sind.

Drückt man n durch K aus, so erhält man das Resultat:

Uebt man auf einen Punkt eines unendlichen Mediums eine Kraft K parallel der Z-Axe aus, so haben die dadurch hervorgebrachten Verrückungen die Werthe:

$$u = \frac{K(c + c') x z}{8\pi c (c - c') r^3}, \qquad v = \frac{K(c + c') y z}{8\pi c (c - c') r^3}, \qquad w = \frac{K\big((c + c') z^2 + (3c - c') r^2\big)}{8\pi c (c - c') r^3}.$$

§ 38. Mechanik elastischer Körper; ebene Wellen in einem unendlichen elastischen Medium; transversale Verrückungen eines gespannten unendlichen Fadens.

I. Die Hauptgleichungen für die Bewegungen in einem elastischen Medium bilden wir aus (129) durch Einsetzen der Werthe (128) und erhalten so folgendes System:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varepsilon X + \frac{c - c'}{2} \Delta u + \frac{c + c'}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\
\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varepsilon Y + \frac{c - c'}{2} \Delta v + \frac{c + c'}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\
\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varepsilon Z + \frac{c - c'}{2} \Delta w + \frac{c + c'}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{161}$$

Von der Einwirkung äusserer Kräfte nach Art der Schwere wollen wir absehen, weil dieselben in Praxi auf die Bewegung neben den innern Kräften nur verschwindenden Einfluss haben; wir setzen also fernerhin:

$$X = Y = Z = 0.$$

Solange wir das elastische Medium nach allen Seiten unbegrenzt annehmen, kommen ausser den vorstehenden Hauptgleichungen nur

noch die Festsetzungen über den Anfangszustand in Betracht, dahin lautend, dass für $t = 0$

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v', \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w' \qquad (161')$$

gegebene Functionen der Coordinaten sind.

Wie wir in dem vorigen Abschnitt die Verrückungen u, v, w für einen beliebigen Zeitmoment in die beiden Theile Potentialverrückung und Torsionsverrückung zerlegt haben, indem wir setzten

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2, \qquad w = w_1 + w_2,$$

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad (161'')$$

$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v_2 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w_2 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

so können wir auch die Anfangswerthe zerlegen und setzen

$$u^0 = u_1^0 + u_2^0, \qquad v^0 = v_1^0 + v_2^0, \qquad w^0 = w_1^0 + w_2^0,$$

$$u_1^0 = \frac{\partial \varphi^0}{\partial x}, \qquad v_1^0 = \frac{\partial \varphi^0}{\partial y}, \qquad w_1^0 = \frac{\partial \varphi^0}{\partial z}, \qquad (161''')$$

$$u_2^0 = \frac{\partial W^0}{\partial y} - \frac{\partial V^0}{\partial z}, \; v_2^0 = \frac{\partial U^0}{\partial z} - \frac{\partial W^0}{\partial x}, \; w_2^0 = \frac{\partial V^0}{\partial x} - \frac{\partial U^0}{\partial z}, \; \frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} + \frac{\partial W^0}{\partial z} = 0;$$

$$u' = u_1' + u_2', \qquad v' = v_1' + v_2', \qquad w' = w_1' + w_2',$$

$$u_1' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \qquad v_1' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \qquad w_1' = \frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

$$u_2' = \frac{\partial W'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial z}, \; v_2' = \frac{\partial U'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial x}, \; w_2' = \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial y}, \; \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = 0.$$

Hierin bezeichnen φ^0, U^0, V^0, W^0 die Anfangswerthe des Deformationspotentiales und der Drillungsfunctionen, φ', U', V', W' die Anfangswerthe ihrer resp. Differentialquotienten nach der Zeit oder ihrer Geschwindigkeiten.

Da die Grössen u_1^0, u_2^0, u_1', u_2' u. s. f. von einander vollständig unabhängig gegeben, z. B. alle mit Ausnahme einer einzigen gleich Null sein können, und die Gleichungen sämmtlich lineär sind, so ergiebt sich, dass die u, v, w in je vier Theile zerfallen müssen, von denen ein jeder nur von einer dieser willkürlichen Functionen abhängen muss. Wir werden demgemäss auch die Potential- und die Torsionsbewegungen gesondert betrachten können.

Behandeln wir zunächst die Potentialverrückungen u_1, v_1, w_1 und berücksichtigen die Beziehungen, welche dieselben definiren, so nehmen die Gleichungen (161) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c\Delta u_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c\Delta\varphi\right) = 0,\\
\varepsilon\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c\Delta v_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c\Delta\varphi\right) = 0,\\
\varepsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - c\Delta w_1 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t} - c\Delta\varphi\right) = 0,
\end{aligned}\tag{162}$$

woraus wir schliessen, dass

$$\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c\Delta\varphi$$

eine nur von der Zeit abhängige Grösse sein kann; da eine solche auf die Werthe der Verrückungen u, v, w nach der Definition des Deformationspotentiales φ nicht influirt, so können wir sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit in φ hineingezogen denken und schreiben:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c\Delta\varphi. \tag{162'}$$

Beachten wir, dass sich aus dieser Formel durch zweimalige Differentiation nach x, y, z und Addition der Resultate ergiebt

$$\varepsilon\frac{\partial^2\Delta\varphi}{\partial t^2} = c\Delta(\Delta\varphi),$$

berücksichtigen wir ferner, dass selbst bei gleichzeitigem Vorhandensein von Drillungsdeformationen die räumliche Dilatation doch nur von den Potentialdeformationen abhängt, gemäss der Beziehung

$$\Delta\varphi = \vartheta,$$

so erhalten wir ganz allgemein für die räumliche Dilatation die Gleichung:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = c\Delta\vartheta. \tag{162''}$$

Wenden wir uns nun zu den Torsionsverrückungen u_2, v_2, w_2 und bedenken, dass sie keinen Anteil an ϑ geben, so erhalten wir aus (161):

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2}\Delta u_2,\qquad \varepsilon\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2}\Delta v_2,\qquad \varepsilon\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2}\Delta w_2 \tag{163}$$

oder nach Einführung der Werthe (161''):

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) &= \frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),\\
\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) &= \frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),\\
\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \frac{c-c'}{2}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).
\end{aligned}\tag{163'}$$

Da die in jeder einzelnen Gleichung vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial W}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial V}{\partial z},\qquad \frac{\partial U}{\partial z} \text{ und } \frac{\partial W}{\partial x},\qquad \frac{\partial V}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial U}{\partial y}$$

von einander unabhängig sind, zerfallen diese Formeln in drei Paare von der Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c-c'}{2} \Delta U\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c-c'}{2} \Delta U\right) = 0.$$

Diese sechs Formeln sagen aus, dass die Aggregate

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c-c'}{2} \Delta U, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{c-c'}{2} \Delta V, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{c-c'}{2} \Delta W$$

drei resp. nur von x und t, von y und t, von z und t abhängigen Functionen gleich sein müssen. Da aber nach der Definition der Torsionsverrückungen solche Functionen auf die Werthe der Verrückungen ohne Einfluss sind, können wir dieselben ohne Beschränkung der Allgemeinheit in U, V, W hineingezogen denken und daher schreiben:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2} \Delta U, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2} \Delta V, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{c-c'}{2} \Delta W. \quad (163'')$$

Alle diese Gleichungen fallen also unter dieselbe Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Phi, \quad (164)$$

und wir behandeln, indem wir sie integriren, zugleich die Gesetze für das Deformationspotential φ, die Drillungsfunctionen U, V, W, für die Verrückungscomponenten u, v, w und für die räumliche Dilatation ϑ; nur hat die Constante a nicht in allen Fällen den gleichen Werth. Des bequemeren Ausdruckes wegen wollen wir aber weiterhin, was auch den wichtigsten Fällen entspricht, Φ eine Verrückung, $\partial\Phi/\partial t$ eine Geschwindigkeit nennen.

Sind die Anfangswerthe von Φ und $\partial\Phi/\partial t$ in parallelen Ebenen, die wir der XY-Ebene parallel denken wollen, constant, und sind auch etwaige Oberflächenbedingungen längs solcher Ebenen in constanter Weise gegeben, so wird nach Symmetrie Φ und $\partial\Phi/\partial t$ jederzeit in dieser Ebene constant, also nur von t und z abhängig sein. Die Gleichung (164) reducirt sich nach den gemachten Annahmen auf:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (164')$$

Wir bemerken beiläufig, dass diese Gleichung zugleich ein anderes wichtiges Problem umfasst, nämlich dasjenige der transversalen Schwingungen eines absolut biegsamen Fadens, welcher durch ein Gewicht gespannt ist und den man eine Saite zu nennen pflegt, obgleich seine Eigenschaften diesem Namen nicht ganz entsprechen. Wir wollen dies kurz begründen.

Sei der Faden von der Länge l ursprünglich parallel der Z-Axe ausgespannt und während des Bewegungszustandes unendlich wenig aus dieser Richtung entfernt, sodass sowohl die Verrückungen u und v neben l als auch ihre Differentialquotienten nach z neben Eins unendlich klein sind. Dann ist an jeder Stelle die Spannung, d. h. die Kraft, die sich längs des Fadens fortpflanzt, nur unendlich wenig von dem angehängten Gewicht P verschieden.

Ein Linienelement δs des Fadens erleidet durch die Spannung an seinen beiden Enden α und β Kräfte, welche in der Richtung des Fadens an jenen Stellen liegen und nach den allgemeinen mechanischen Gleichungen die Beschleunigungen d^2u/dt^2, d^2v/dt^2 oder auch $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$ hervorrufen, gegeben durch die Formeln:

$$\varepsilon Q \delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P\left(\cos(s, x)_\beta - \cos(s, x)_\alpha\right),$$

$$\varepsilon Q \delta s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P\left(\cos(s, y)_\beta - \cos(s, y)_\alpha\right),$$

in welchen ε die Dichte, Q den constanten Querschnitt des Fadens bezeichnet und sich α auf das negative, β auf das positive Ende von δs bezieht. Wegen der Kleinheit von $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial z$ sind die $\cos(s, x)$, $\cos(s, y)$ mit diesen Werthen selbst identisch, und es wird:

$$\cos(s, x)_\beta - \cos(s, x)_\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\delta s, \quad \cos(s, y)_\beta - \cos(s, y)_\alpha = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\delta s.$$

Es resultiren demgemäss die Gleichungen

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P}{Q}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{P}{Q}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{164''}$$

welche, wie gesagt, unter die Form von (164') fallen.

II. Wir wenden uns nun zu ihrer Behandlung unter Zugrundelegung der allgemeinen Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{164'}$$

und wollen dabei zunächst von ihrer Bedeutung für das Problem der Saite ganz absehen.

Das zu behandelnde Problem ist das folgende.

I n einem nach allen Seiten unbegrenzten homogenen elastischen Medium werde zur Zeit $t = 0$ eine Anfangsverrückung $\Phi = \Phi^0(z)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\partial\Phi/\partial t = \Phi'(z)$ erregt und das Medium von da ab sich selbst überlassen.

Da der ganze Vorgang nur von zwei Variabeln z und t abhängt, so können wir ihn bequem durch eine Darstellung in einem rechtwinkligen ebenen Coordinatensystem anschaulich machen. Wählen wir die von einer beliebigen Anfangsebene gerechnete Coordinate z zur

Abscisse, das a-fache der von einem beliebigen Anfang gerechneten Zeit t zur Ordinate, so repräsentirt ein Punkt p der ZT-, genauer der ZaT-Ebene, den Zustand einer bestimmten Wellenebene zu einer bestimmten Zeit.

Die Zustände, welche dieselbe Ebene zu verschiedener Zeit durchläuft, sind durch die Punkte der verticalen Geraden, die, welche verschiedene Ebenen zu derselben Zeit aufweisen, durch die Punkte der horizontalen Geraden durch p dargestellt.

Ist der Zustand des Mediums zur Zeit $t = 0$ gegeben, so heisst dies, dass in unserer Figur die Werthe von Φ und $\partial\Phi/\partial t$ für alle Punkte der Z-Abscissenaxe bekannt sind, und die Aufgabe der Integration der Gleichung (164′) besteht darin, den einem beliebigen Punkt p entsprechenden Werth Φ durch die längs der Z-Axe gegebenen Werthe $\Phi = \Phi^0(z)$, $\partial\Phi/\partial t = \Phi'(z)$ auszudrücken.

Wir lösen sie am bequemsten und anschaulichsten durch Einführung zweier neuer Variabeln ξ und η durch die Beziehungen

$$\xi = \frac{z - at}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = \frac{z + at}{\sqrt{2}}, \tag{165}$$

welche nach z und t aufgelöst lauten:

$$z = \frac{\eta + \xi}{\sqrt{2}}, \qquad at = \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}}.$$

Aus ihnen folgt:

$$\frac{\partial\Phi}{a\,\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right),$$

oder umgekehrt: (165′)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{a\,\partial t}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{a\,\partial t}\right);$$

ebenso weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{a^2\partial t^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}, \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}. \end{aligned} \tag{165''}$$

Die von uns zu integrirende Gleichung (164′) nimmt hierdurch die Form an:

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0. \tag{165'''}$$

Die geometrische Darstellung unseres Problemes erleidet durch die Einführung der neuen Variabeln ξ und η nur insofern eine Aenderung, als die betrachteten Punkte p der ZT-Ebene auf ein Coordinatensystem bezogen werden, dessen Axen Ξ und H die Winkel zwischen der Z- und aT-Axe halbiren; zugleich wird aber die Differentialgleichung

auf eine Form gebracht, welche durch Multiplication mit $d\xi\,d\eta$ und durch Integration über irgend ein Flächenstück F der ΞH-Ebene, d. h. durch Berechnung des Integrales

$$\iint\limits_{(F)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta = 0, \tag{165''''}$$

eine endliche Relation zwischen den auf verschiedene Stellen bezüglichen Werthen Φ abzuleiten gestattet. Bei der Anwendung hat man die Flächenstücke F so zu wählen, dass nach ausgeführter Integration ausser dem gesuchten Φ nur noch gegebene Werthe in der Gleichung auftreten.

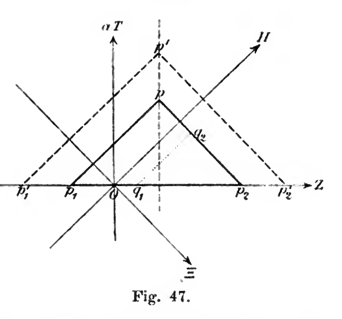


Fig. 47.

Bei unserem speciellen Problem wird dies erreicht, wenn man als Fläche F das rechtwinklige Dreieck $p\,p_1\,p_2$ wählt, welches durch zwei Parallele zur Ξ- und H-Axe vom Punkt p aus und durch die Z-Axe begrenzt wird (Figur 47).

Integriren wir zunächst nach η, so werden damit die Werthe längs einer Parallelen zur H-Axe, z. B. längs $\overline{q_1 q_2}$, summirt. Das Resultat ist:

$$\int\limits_{(p)}^{(p_2)} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\,d\xi - \int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\,d\xi = 0.$$

Das erste Integral ist in der That längs einer Parallelen zur Ξ-Axe zu nehmen, das zweite aber längs der Z-Axe. Daher ersetzen wir in letzterem nach geometrischer Anschauung $d\xi$ durch $dz/\sqrt{2}$ und $\partial\Phi/\partial\xi$ durch seinen Werth aus (165') und erhalten so:

$$\int\limits_{(p)}^{(p_2)} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\,d\xi - \int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{a\,\partial t}\right)\frac{dz}{2} = 0.$$

Hierin lässt sich die Integration der ersten zwei Glieder ausführen und giebt, wenn man die Werthe von Φ an den Stellen p, p_1, p_2 mit Φ, Φ_1, Φ_2 bezeichnet:

$$\Phi_2 - \Phi - \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{1}{2a}\int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dz = 0$$

oder

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{1}{2a}\int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dz.$$

Wir bedenken nun, dass längs der ganzen Z-Axe, d. h. für $t = 0$,

$$\Phi = \Phi^0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi'$$

gegeben ist; die Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1^0 + \Phi_2^0) + \frac{1}{2a}\int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \Phi'\, dz \tag{166}$$

drückt also den Werth Φ an der Stelle p aus durch die gegebenen Werthe von Φ^0 in den Schnittpunkten p_1 und p_2 der durch p zur Ξ- und H-Axe gelegten Parallelen mit der Z-Axe und durch alle zwischen diesen Punkten liegenden Φ'.

Dabei ist zu bemerken, dass, wenn die Stelle p der Ordinate z und der Zeit t entspricht, p_1 die Ordinate $(z - at)$, p_2 die Ordinate $(z + at)$ besitzt, und man demgemäss die letzte Formel auch schreiben kann:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2}\big(\Phi^0(z - at) + \Phi^0(z + at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{z-at}^{z+at} \Phi'(z)\, dz. \tag{166'}$$

III. Wie bereits gesagt, setzt sich $\Phi(z, t)$ aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine nur von Φ^0, der andere nur von Φ' abhängt; wir können also setzen:

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{I}} + \Phi_{\mathrm{II}}, \tag{166''}$$

wo die beiden Theile die Eigenschaft haben, dass

für $t = 0$ und

$$\left.\begin{array}{lll} -\infty < z < +\infty & \Phi_{\mathrm{I}} = \Phi^0(z), & \dfrac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}{\partial t} = 0, \\ & \Phi_{\mathrm{II}} = 0, & \dfrac{\partial \Phi_{\mathrm{II}}}{\partial t} = \Phi'(z). \end{array}\right\} \tag{166'''}$$

Der erste Theil von Φ ist gegeben durch:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}(\Phi_1^0 + \Phi_2^0) = \frac{1}{2}\big(\Phi^0(z + at) + \Phi^0(z - at)\big). \tag{167}$$

Nach dem ersten Werth und der Figur 47 wird die Verrückung an der Stelle p durch das Mittel aus den Werthen an den Stellen p_1 und p_2 gegeben, welche Punkte, während t wächst, mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach beiden Seiten hin fortrücken. Der zweite Ausdruck

spricht dasselbe Resultat in der Form aus, dass, um die Verrückung an jeder Stelle zu jeder Zeit zu bestimmen, das ganze System von Anfangsverrückungen Φ^0 in halber Stärke nach der positiven, in halber nach der negativen Seite hin mit der Geschwindigkeit a zu verschieben und überall die Summe der an dieselbe Stelle gelangenden Verrückungen zu nehmen ist.

Dass hierdurch nicht nur eine Deutung der Endformel, sondern der wirkliche Vorgang gegeben ist, erkennt man durch Betrachtung des speciellen Falles, dass die Anfangsverrückung Φ^0 nur in der unmittelbaren Nähe einer Stelle $z = z_q$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Da Φ^0 eine stetige Function von z sein soll, so ist genauer ein Werthsystem anzunehmen, das unmittelbar vor z_q von Null an aufsteigt und nach z_q zu Null herabsinkt; wir wollen weiter aber immer nur von dem in z_q eintretenden Maximalwerth sprechen.

In Folge der gemachten Annahme ist nun Φ_I zu jeder Zeit t überall gleich Null, mit Ausnahme der Stellen, in welchen

$z - at = z_q$ und $z + at = z_q$

ist; d. h. längs der beiden Geraden $\overline{qq_1}$ und $\overline{qq_2}$, welche der Ξ- und H-Axe parallel in der Figur 48 durch q gelegt sind; dort besitzt die Verrückung den halben Werth der Anfangsverrückung in q.

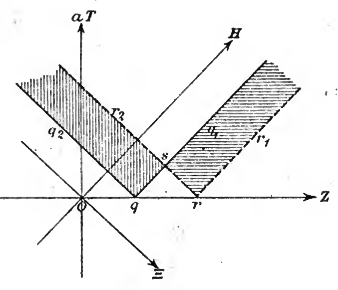


Fig. 48.

Man erkennt also deutlich, wie die anfängliche Verrückung an der Stelle q verschwindet und statt dessen an andern auftritt, deren Entfernung mit der Zeit proportional wächst. Man drückt dies Resultat mit den Worten aus, dass sich die Anfangsverrückung Φ^0 nach beiden Seiten hin in halber Stärke und mit der Geschwindigkeit a fortpflanzt.

Ist noch an einer zweiten Stelle r eine Anfangsverrückung vorhanden, so ist deren Fortpflanzung durch die Geraden $\overline{rr_1}$ und $\overline{rr_2}$ gegeben; sie wird durch die von q ausgehende in keiner Hinsicht gestört.

Jedes beliebige Verrückungssystem kann man nun für das Studium der von ihm fortgepflanzten Verrückungen in ein System solcher

Einzelverrückungen zerlegen und erhält dadurch die Bestätigung des ausgesprochenen Resultates, welches wir in den Satz fassen:

In einem unendlichen elastischen Medium pflanzt sich eine Anfangsverrückung, welche eine Function nur einer Coordinate ist, mit halber Stärke nach deren positiver, mit halber Stärke nach deren negativer Richtung mit constanter Geschwindigkeit a fort. —

Der zweite Theil von Φ ist nach (166') bis (166''') gegeben durch

$$\Phi_{II} = \frac{1}{2a}\int_{(p_1)}^{(p_2)} \Phi' dx = \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at} \Phi'(z) dz, \tag{167'}$$

woraus durch Differentiation nach t auch folgt:

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} = \frac{1}{2}(\Phi_1' + \Phi_2') = \frac{1}{2}\big(\Phi'(z+at) + \Phi'(z-at)\big). \tag{167''}$$

Vergleicht man die letzte Formel mit (167), so erkennt man das Resultat:

Ebenso wie eine von nur einer Coordinate abhängige Anfangsverrückung pflanzt sich auch eine ebensolche Anfangsgeschwindigkeit in einem unendlichen elastischen Medium fort.

Was die durch die anfängliche Geschwindigkeit erregte Verrückung angeht, so lässt sich, indem wir

$$\frac{1}{a}\int_0^z \Phi'(z) dz = \mathsf{X}(z) \tag{167'''}$$

setzen, die erste Formel auch schreiben:

$$\Phi_{II} = \frac{1}{2}\big(\mathsf{X}(z+at) - \mathsf{X}(z-at)\big). \tag{167''''}$$

Sie spricht das Resultat aus, dass man die durch eine nur von z abhängige Anfangsgeschwindigkeit Φ' erregte Verrückung erhält, indem man eine Art Anfangsverrückung von der Grösse

$$\mathsf{X}(z) = \frac{1}{a}\int_0^z \Phi'(z) dz$$

zu Hülfe nimmt, welche proportional ist mit der Fläche, die von der durch $\Phi'(z)/a$ gegebenen Curve und der Z-Abscissenaxe einerseits, den $z = 0$ und $z = z$ entsprechenden Ordinaten andererseits begrenzt ist. Diese Anfangsverrückung $\mathsf{X}(z)$ muss man sich dann nach der positiven Seite mit dem halben negativen, nach der negativen mit dem halben positiven Werthe und der Geschwindigkeit a fortpflanzen und an jeder Stelle summiren lassen, um den Werth der erregten Verrückung an jeder Stelle zu erhalten.

Dass diese Vorstellung dem wirklichen Vorgang entspricht, erkennt man wiederum am besten durch Betrachtung des Falles, dass die Anfangsgeschwindigkeit nur in unmittelbarer Nähe der Stelle $z = z_q$ von Null verschieden ist. Dann hat die Function $X(z)$ den Werth Null, solange $z < z_q$ ist, und ist constant, etwa gleich C, für $z > z_q$. Hieraus folgt, dass in der Figur 48 die durch die Anfangsgeschwindigkeit in q erregte Verrückung Φ_{II} für alle Punkte, welche zwischen den beiden Parallelen $\overline{qq_1}$ und $\overline{qq_2}$ zur H- und Ξ-Axe durch q liegen, den Werth $C/2$ besitzt, — diese Verrückung pflanzt sich also nicht eigentlich fort, sondern breitet sich mit der Geschwindigkeit a nach beiden Seiten hin aus. Dies rührt davon her, dass im Anfangszustand das ganze Medium eine Schwerpunktsgeschwindigkeit besitzt, welche von selbst nicht wieder verschwinden kann.

Ist an einer zweiten Stelle r eine entgegengesetzte Geschwindigkeit erregt, welche dem obigen Integral für $z > z_r$ den Werth $-C$ ertheilt, so breitet sich von dieser Stelle eine entgegengesetzte Verrückung aus, welche die von q ausgehende an den Stellen der ZT-Ebene, die beide erreichen, aufhebt.

Der Vorgang ist in der Figur 48 in der Weise dargestellt, dass dasjenige Bereich der ZT-Ebene, in welchem $\Phi_{II} = +\frac{1}{2}C$ ist, vertical, dasjenige, in welchem $\Phi_{II} = -\frac{1}{2}C$ ist, horizontal schraffirt ist.

Jedes System von Anfangsgeschwindigkeiten kann man nun in solche auf unendlich kleinen Raum beschränkte Theile zerlegen, und darum erscheint die oben gegebene Deutung der Formel (167'''') berechtigt.

IV. Nachdem wir bisher die Bedeutung von Φ ganz offen gelassen haben, wollen wir dafür nunmehr die einzelnen Componenten der Verrückung wählen.

Die Gleichungen (161'') reduciren sich durch die Annahme ebener Wellen normal zur Z-Axe auf:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad u_2 = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad v_2 = +\frac{\partial U}{\partial z}, \quad w_2 = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ergiebt, wie man sieht, die Verschiebungscomponente parallel der Wellennormale Z, welche man longitudinal nennt, eine Potentialdeformation; für sie repräsentirt also die allgemeine Gleichung (164') specieller die für dergl. gültigen (162) bis (162''); a^2 hat die Bedeutung c/ε.

Die Componenten normal zur Wellennormale Z, welche man transversal nennt, geben nach denselben Formeln Torsionsdefor-

mationen; für sie vertritt also die allgemeine Formel (164') die speciellere (163) resp. (163'') und a^2 hat die Bedeutung von $(c-c')/2\varepsilon$.

Ganz dasselbe wie für die Verrückungs- gilt auch für die Geschwindigkeitscomponenten.

Wir erhalten daher den wichtigen Satz:

Sind in einem durch die Elasticitätsconstanten c und c' definirten Medium in Wellenebenen beliebige Anfangsverrückungen und Anfangsgeschwindigkeiten gegeben, so pflanzen sich die longitudinalen und transversalen Componenten mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort; erstere mit der Geschwindigkeit

$$a=\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}},$$

letztere mit der Geschwindigkeit

$$a=\sqrt{\frac{c-c'}{2\varepsilon}}.$$

In Flüssigkeiten wird wegen der Beziehung $c=c'$ die letztere Geschwindigkeit gleich Null; in ihnen pflanzen sich transversale Verrückungen gar nicht fort, denn sie erregen dort keine elastischen Reactionskräfte; die longitudinalen bringen eine cubische Dilatation ϑ hervor, die sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit $a=\sqrt{c/\varepsilon}$ fortpflanzt.

Verstehen wir unter Φ eine der Componenten der transversalen Verrückung einer Saite, so ergeben die Formeln (164'') das weitere Resultat:

Auf einer unbegrenzten Saite von dem Querschnitt Q und der Dichte ε, welche durch die Kraft P gespannt ist, pflanzen sich die transversalen Verrückungen fort mit der Geschwindigkeit

$$a=\sqrt{\frac{P}{Q\varepsilon}}. \quad —$$

Bisher haben wir über die Gesetze $\Phi^0(x)$ und $\Phi'(x)$ der Anfangsverrückungen und Geschwindigkeiten keinerlei Voraussetzungen gemacht.

Nehmen wir jetzt aber specieller den Werth

$$\Phi^0(x)=A\sin\frac{2\pi x}{L}, \tag{168}$$

so stellt sich die Anfangsverrückung, als Ordinate zur Abscisse x construirt, durch eine Sinuslinie dar mit der Periode L und der Amplitude A; die fortgepflanzte Verrückung folgt nach (167) dem Gesetz:

$$\Phi_1=\frac{A}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{L}(x+at)+\sin\frac{2\pi}{L}(x-at)\right). \tag{168'}$$

Jeder Theil für sich lässt sich durch eine mit der Geschwindigkeit a nach der negativen oder positiven Seite fortschreitende Sinuscurve

repräsentiren, ergiebt also eine fortschreitende einfache Sinusschwingung, welche jedem Punkte $z = z_q$ eine periodische Bewegung mit der Schwingungsdauer $T = L/a$ ertheilt.

Zieht man beide Theile in ein Glied zusammen, so erhält man die Formel:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = A \cos \frac{2\pi a t}{L} \sin \frac{2\pi z}{L}; \tag{168''}$$

sie giebt, wie Φ^0 construirt, gleichfalls eine Sinuscurve, die sich aber mit der Zeit nur insofern ändert, als die sämmtlichen Ordinaten mit der Periode $T = L/a$ gleichzeitig und proportional wachsen oder abnehmen, so dass also die Stellen, welche einmal die Verrückung Null haben, auch immer ruhen. Man nennt solche Bewegungen stehende einfache Sinusschwingungen. L heisst die zur Schwingungsdauer T gehörige Wellenlänge; zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$L = aT;$$

die Wellenlänge ist also gleich dem Weg, durch welchen sich eine Verrückung während einer Zeit gleich der Schwingungsdauer fortpflanzt.

Betrachtet man den Vorgang an einer Stelle $z = z_q$, so erkennt man, dass dort eine Schwingung mit der Amplitude $A \sin(2\pi z_q/L)$ stattfindet, welche verschwindet, wenn

$$z_q = \frac{hL}{2}, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist, und den grössten Werth besitzt, wenn

$$z_q = \frac{(2h+1)L}{4}, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

erstere Stellen nennt man Schwingungsknoten, letztere Schwingungsbäuche.

Die Geschwindigkeit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{2\pi A}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{2\pi z}{L} \tag{168'''}$$

besitzt ihre grössten und kleinsten Werthe an denselben Stellen, wie die Amplitude; dagegen wird die Dilatation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = +\frac{2\pi A}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi z}{L} \tag{168''''}$$

am grössten in den Knoten und ist dauernd gleich Null in den Bäuchen.

Aehnliche Betrachtungen, wie an den Werth der Anfangsverrückung $\Phi^0(z) = A \sin bz$, lassen sich an den Werth der Anfangsgeschwindigkeit $\Phi'(z) = A \sin bz$ knüpfen; sie ergeben indess nichts Anderes, als im Vorstehenden besprochen worden, und mögen darum unterbleiben.

§ 39. Mechanik elastischer Körper; ebene Wellen in einem durch eine Ebene begrenzten elastischen Medium; der einseitig begrenzte Faden.

Während wir im vorigen Abschnitt das elastische Medium nach allen Richtungen hin unendlich voraussetzten, wollen wir es nun durch eine der Wellenebene parallele Ebene begrenzt denken. Da Φ überall nur von x und t abhängt, so kann in dieser Ebene am einfachsten entweder Φ und damit zugleich $\partial\Phi/\partial t$ oder aber $\partial\Phi/\partial x$ als Function der Zeit gegeben sein; der für $t=0$ stattfindende Werth muss dabei natürlich mit diesen Angaben vereinbar gewählt werden. Diese beiden Fälle wollen wir zunächst durchführen und darnach diejenigen wirklichen Verhältnisse aufsuchen, denen diese Verfügungen entsprechen.

I. In einem unendlichen homogenen elastischen Medium sei für positive Werthe von x für $t=0$ sowohl $\Phi=\Phi^0(x)$ als $\partial\Phi/\partial t=\Phi'(x)$ und für die Ebene $x=0$ für positive Werthe von t zugleich $\Phi=\Psi^0(t)$ gegeben.

Bei Darstellung des Problemes in der wie früher entworfenen Figur 49 handelt es sich jetzt um die Bestimmung von Φ für Punkte des ersten Quadranten aus gegebenen Werthen von Φ und $\partial\Phi/\partial t$ längs der positiven Z-Axe und von Φ längs der positiven T-Axe.

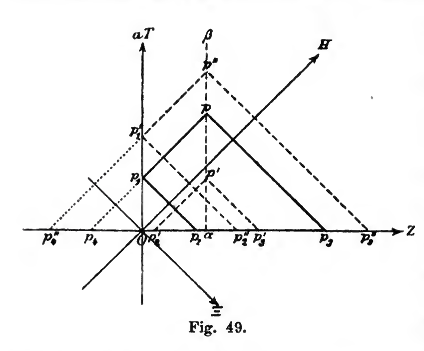


Fig. 49.

Liegt der Punkt, wie p' in der Figur, zwischen der $+H$- und der $+Z$-Axe, so ist das bei dem Problem auf p. 447 angewandte Verfahren zu benutzen und daher auch das dort erhaltene Resultat gültig. Dies hat folgende Bedeutung:

So lange $at < x$ ist, hat Φ denselben Werth, als wäre die Begrenzung in $x=0$ nicht vorhanden, und es gilt demgemäss:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi^0_{2'} + \Phi^0_{3'}\right) + \frac{1}{2a}\int_{(p_2')}^{(p_3')} \Phi'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi^0(x+at) + \Phi^0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Phi'(x)\,dx. \qquad (169)$$

Anders, wenn p zwischen der $+H$- und $+T$-Axe liegt, also $at > z$ ist; denn dann würde die früher gewählte Fläche F sich in das Bereich $z < 0$ erstrecken, welches mit dem Betrachteten in keinem Zusammenhang steht, z. B. die elastische Substanz gar nicht zu enthalten braucht, und demnach auf die Werthe von Φ für $z > 0$ keinen Einfluss haben kann.

Wir wählen deshalb zur Fläche F das in der Figur 49 mit $p p_1 p_2 p_3$ bezeichnete Paralleltrapez. Die Integration nach η ergiebt:

$$\int\limits_{(p)}^{(p_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\, d\xi - \int\limits_{(p_1)}^{(p_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\, d\xi - \int\limits_{(p_3)}^{(p_2)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\, d\xi = 0.$$

Im letzten Integral ersetzen wir $d\xi$ durch $dz/\sqrt{2}$ und $\partial\Phi/\partial\xi$ durch den Werth aus (165′); dann findet sich:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_3 - \Phi_2) + \frac{1}{2a}\int\limits_{(p_2)}^{(p_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dz + \Phi_1, \tag{169′}$$

worin rechts nur gegebene Werthe der Functionen Φ^0, Φ' und Ψ^0 stehen. Führt man die den Punkten p_h entsprechenden Werthe der Variabeln ein, so schreibt sich das für $at > z$ geltende Resultat:

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi^0(z+at) - \Phi^0(at-z)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-z}^{z+at} \Phi'(z)\, dz + \Psi^0\left(t - \frac{z}{a}\right). \tag{169″}$$

Die Lösung setzt sich ersichtlich aus drei Theilen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} zusammen, die für sich genommen folgenden Bedingungen genügen:

für $t = 0$ und			für $z = 0$ und	
$0 < z < \infty$	$\Phi_{\text{I}} = \Phi^0(z)$,	$\frac{\partial \Phi_{\text{I}}}{\partial t} = 0$,	$0 < t < \infty$	$\Phi_{\text{I}} = 0$,
	$\Phi_{\text{II}} = 0$,	$\frac{\partial \Phi_{\text{II}}}{\partial t} = \Phi'(z)$,		$\Phi_{\text{II}} = 0$,
	$\Phi_{\text{III}} = 0$,	$\frac{\partial \Phi_{\text{III}}}{\partial t} = 0$,		$\Phi_{\text{III}} = \Psi^0(t)$.

Wir wollen diese Theile einzelnen discutiren.

Der erste Theil ist gegeben durch die beiden Formeln:

$$\begin{aligned} at < z, \quad & \Phi_{\text{I}} = \tfrac{1}{2}\left(\Phi^0_{3'} + \Phi^0_{2'}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\Phi^0(z+at) + \Phi^0(z-at)\right), \\ at > z, \quad & \Phi_{\text{I}} = \tfrac{1}{2}\left(\Phi^0_3 - \Phi^0_2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\Phi^0(z+at) - \Phi^0(at-z)\right); \end{aligned} \tag{170}$$

verbindet man mit ihnen die Figur 49 und lässt wieder den Punkt p längs der Parallelen zur T-Axe von α nach β fortschreiten, so erkennt man leicht, wie die Nullebene $z = 0$ auf den Vorgang einwirkt.

So lange der Punkt p sich noch unterhalb der H-Axe befindet,

senden die rechts und links von α befindlichen Theile der Z-Axe in normaler Weise ihre Functionswerthe Φ^0 zu ihm hin; wenn er aber die H-Axe überschritten hat, geschieht dies ferner nur mit den **rechts** liegenden Theilen; **links** kommen die schon einmal in Wirksamkeit gewesenen Elemente zum zweiten Mal daran und die Figur weist darauf hin, dass dies in derselben Weise geschieht, als wanderten die von den einzelnen Elementen gelieferten Antheile erst bis zur Nullebene hin und kehrten dort zugleich ihre Bewegungsrichtung und ihr Vorzeichen um. Dass dies wirklich so geschieht, erweist am besten die Betrachtung des schon früher behandelten speciellen Falles.

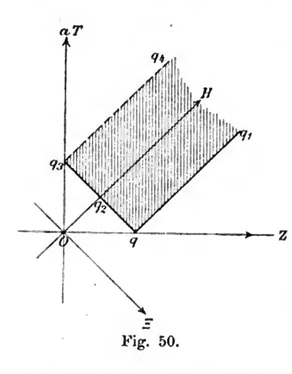


Fig. 50.

Ist nämlich zur Zeit $t = 0$ überall $\Phi = 0$ mit Ausnahme eines sehr kleinen Bereiches in der Nähe des Werthes $z = z_q$, dann ergeben die obigen Formeln, dass Φ überhaupt einen von Null verschiedenen Werth nur auf einem gewissen System von Geraden besitzt; und zwar ist:

$$\Phi = +\frac{\Phi^0}{2} \quad \text{für } at < z \quad \text{längs } z + at = z_q,$$
$$\text{längs } z - at = z_q,$$
$$\text{für } at > z \quad \text{längs } z + at = z_q;$$
$$\Phi = -\frac{\Phi^0}{2} \quad \text{längs } at - z = z_q.$$

Dies sind in Figur 50 ersichtlich die vier Geraden $\overline{qq_2}$, $\overline{qq_1}$, $\overline{q_2q_3}$, $\overline{q_3q_4}$, und man erkennt deutlich, wie die Fortpflanzung nach der positiven Seite ungehindert stattfindet, die nach der negativen zu einer Reflexion an der Nullebene führt, bei welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie die Verrückung, nicht die Grösse, wohl aber das Vorzeichen ändert. Die Geraden, auf welchen $\Phi = +\Phi^0/2$ ist, sind in der Figur ausgezogen, diejenigen, auf welchen $\Phi = -\Phi^0/2$ ist, gestrichelt.

Der **zweite Theil** von Φ ist gegeben durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} at < z, \qquad \Phi_{II} &= \frac{1}{2a}\int_{(p_1')}^{(p_2')} \Phi' dz = \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at} \Phi'(z)\, dz, \\ at > z, \qquad \Phi_{II} &= \frac{1}{2a}\int_{(p_2)}^{(p_3)} \bar{\Phi}' dz = \frac{1}{2a}\int_{at-z}^{z+at} \Phi'(z)\, dz; \end{aligned}\right\} \quad (170')$$

zu ihnen fügen wir:

$$\begin{aligned} at < z, \qquad \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\Phi'_{3'} + \Phi'_{2'}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi'(z+at) + \Phi'(z-at)\right), \\ at > z, \qquad \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\Phi'_{3} - \Phi'_{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi'(z+at) - \Phi'(at-z)\right). \end{aligned} \tag{170''}$$

Wir erkennen durch Vergleichung der Formeln (170″) mit (170) zunächst, dass sich die fortgepflanzte Geschwindigkeit $\partial \Phi_{II}/\partial t$ durchaus verhält, wie die fortgepflanzte Verrückung Φ_I, die soeben untersucht ist.

Die durch die Anfangsgeschwindigkeit Φ' hervorgerufene Verrückung Φ_{II} bestimmt sich aus den Werthen Φ', welche zwischen den Punkten p_2' und p_3', resp. zwischen p_2 und p_3 liegen, analog wie bei dem vorigen Problem. Genaueres ergiebt wieder die Betrachtung eines speciellen Falles.

Ist nur in einem sehr kleinen Bereich nächst der Wellenebene $z = z_q$ eine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so breitet sich die durch sie erregte Verrückung solange regelmässig aus, bis sie die Nullebene erreicht; die von jener reflectirten Theile zerstören, als mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet, die direct erregten, so dass die Verrückung nur in dem von den Geraden $\overline{qq_1}$, $\overline{qq_3}$, $\overline{q_3q_4}$ begrenzten Streifen der Figur 50 von Null verschieden ist. Eine jede Wellenebene erleidet also dieselbe Verschiebung und geht nach einer bestimmten Zeit in die ursprüngliche Lage zurück.

Diese Betrachtungen zeigen, dass man die Wirkung der Nullebene ($\Phi_{z=0} = 0$) auf die Ausbreitung von Anfangsverrückungen und Anfangsgeschwindigkeiten innerhalb des Bereiches $0 < z < +\infty$ auch dadurch erreichen kann, dass man sich das Medium bis $z = -\infty$ erstrecken lässt und an jeder Stelle $z = -z_q$ die Anfangswerthe Φ^0 und Φ' denen entgegengesetzt gleich vorschreibt, welche an der entsprechenden Stelle $z = +z_q$ gegeben sind.

In der That würde dann, wie die Figur 49 auf p. 454 erläutert, die im vorigen Problem angewandte Methode die beiden Theile von Φ bestimmen zu:

$$\Phi_I = \frac{1}{2}(\Phi_3^0 + \Phi_4^0), \quad \Phi_{II} = \frac{1}{2a}\int_{(p_4)}^{(p_3)} \Phi' \, dz;$$

da aber der Werth von Φ^0 in p_4 entgegengesetzt gleich dem Werth in p_2 ist, und Φ' auf der ganzen Strecke $\overline{p_4p_0}$ die entgegengesetzten Werthe hat, wie auf $\overline{p_0p_2}$ — unter p_0 den Coordinatenanfang verstanden —, so reduciren sich diese Ausdrücke auf die obigen:

$$\Phi_{\rm I} = \frac{1}{2}(\Phi_2^0 - \Phi_1^0), \qquad \Phi_{\rm II} = \frac{1}{2a}\int\limits_{(p_1)}^{(p_2)} \Phi' dx.$$

Dies Verfahren, eine Nullebene durch eine Verlängerung der Anfangswerthe zu ersetzen, werden wir weiter unten vortheilhaft verwenden.

Der dritte Theil der fortgepflanzten Verrückung ist gegeben durch die Formeln:

$$at < z, \quad \Phi_{\rm III} = 0, \qquad at > z, \quad \Phi_{\rm III} = \Psi_1^0 = \Psi^0\left(t - \frac{z}{a}\right); \qquad (170''')$$

sie ergeben den Werth $\Phi_{\rm III}$ in einer Ebene z zur Zeit t gleich dem, welcher in der Ebene $z = 0$ zur Zeit $t - z/a$ stattfand, und sprechen das einfache Resultat aus, dass die gesammte der Ebene $z = 0$ mitgetheilte Bewegung sich unvermindert mit der Geschwindigkeit a nach der $+ Z$-Richtung hin fortpflanzt. Ist z. B.

$$\Psi^0 = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so wird für $at > z$ die fortgepflanzte Verrückung:

$$\Phi_{\rm III} = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{L}\right).$$

Die vorstehenden Gesetze gelten bei der Bewegung in einem unendlichen elastischen Medium sowohl für die transversale, wie longitudinale Bewegung, doch haben sie nur für letztere direct practische Bedeutung. Man kann nämlich den Oberflächentheilen elastischer Körper im Allgemeinen nur dadurch eine vorgeschriebene Bewegung ertheilen, dass man sie an einen Körper von viel grösserer Starrheit befestigt und diesen bewegt. Solche Körper sind den Gasen gegenüber die als fest bezeichneten; tropfbaren Flüssigkeiten und festen elastischen Körpern können wir aber keine derartigen gegenüberstellen und daher gestatten unsere Formeln zunächst eine strenge Anwendung nur für die normale Reflexion von Luftwellen an einer ruhenden festen Wand oder für die Erregung von Luftwellen durch die Bewegung einer solchen. Angenährt werden die obigen Resultate aber überall gültig sein, wo ein elastisches Medium von geringem elastischen Widerstande durch ein solches von erheblich grösserem in einer Ebene begrenzt wird.

Wir fassen die erhaltenen Resultate in folgende Sätze zusammen:

Trifft eine ebene Welle senkrecht auf eine das elastische Medium begrenzende starre Wand, so wird sie in der Weise reflectirt, dass die zurückkehrende Verrückung und Geschwindigkeit das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, als die ankommende.

Wird eine Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig bewegt, so pflanzt sich die betreffende Verrückung und Geschwindigkeit in ebenen Wellen mit voller Stärke und mit der Geschwindigkeit a in das elastische Medium hin fort.

Im Uebrigen reflectirt die bewegte Ebene auffallende Wellen in derselben Weise, wie eine starre ruhende Wand.

Berücksichtigt man, dass die transversale Bewegung eines gespannten Fadens durch die Gleichung (164′) ebenfalls gegeben war, so kann man ergänzend hinzufügen:

Alle diese Resultate übertragen sich ungeändert auf die an einem Ende befestigte oder in gegebene transversale Bewegung versetzte Saite.

II. In einem unendlichen elastischen Medium sei für positive Werthe von z für $t = 0$ sowohl $\Phi = \Phi^0(z)$ als $\partial\Phi/\partial t = \Phi'(z)$ und für die Ebene $z = 0$ von $t = 0$ an $\partial\Phi/\partial z = \Psi'(t)$ gegeben.

Wie bei dem vorigen Problem ist für Punkte p', welche in der Figur 49 auf p. 454 zwischen der $+Z$- und $+H$-Axe liegen, die Begrenzung in $z = 0$ noch ganz ohne Einfluss, und es gilt daher für die fortgepflanzte Verrückung, solange $at < z$ ist, das Gesetz (169):

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) &= \frac{1}{2}\left(\Phi^0_{3'} + \Phi^0_{2'}\right) + \frac{1}{2a}\int_{(p_2')}^{(p_3')} \Phi' dz \\ &= \frac{1}{2}\left(\Phi^0(z+at) + \Phi^0(z-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at} \Phi'(z)\, d(z).\end{aligned} \tag{171}$$

Um das Analoge für Punkte zwischen der $+H$- und $+T$-Axe zu erhalten, wenden wir das frühere Verfahren erst auf das Trapez $pp_1p_0p_3$ und sodann auf das Dreieck $p_1p_2p_0$ an; p_0 ist wieder der Coordinatenanfang.

Ersteres ergiebt nach leichter Rechnung:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_3 + \Phi_1) + \frac{a}{2}\int_{(p_1)}^{(p_0)} \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt + \frac{1}{2a}\int_{(p_0)}^{(p_3)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} dz,$$

letzteres:

$$0 = \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{a}{2}\int_{(p_1)}^{(p_0)} \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt + \frac{1}{2a}\int_{(p_0)}^{(p_2)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} dz.$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, so fällt das unbekannte Φ_1 heraus, und wir erhalten:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_3) + \frac{1}{a}\int_{(p_0)}^{(p_3)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} dz + \frac{1}{2a}\int_{(p_3)}^{(p_2)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} dz + a\int_{(p_1)}^{(p_0)} \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt. \tag{171'}$$

Nach Einsetzen der Coordinaten der Punkte p_h und der gegebenen Functionen Φ^0, Φ', Ψ' giebt dies auch:

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi^0(z+at) + \Phi^0(at-z)\right)$$
$$+ \frac{1}{a}\int_0^{at-z} \Phi'(z)dz + \frac{1}{2a}\int_{at-z}^{z+at} \Phi'(z)dz - a\int_0^{t-z/a} \Psi'(t)dt. \qquad (171'')$$

Wiederum zerfällt Φ in drei Theile Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}, und zwar ist:

für $t=0$ und $0<z<\infty$:

$$\Phi_I = \Phi^0(z), \quad \frac{\partial\Phi_I}{\partial t} = 0,$$
$$\Phi_{II} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{II}}{\partial t} = \Phi'(z),$$
$$\Phi_{III} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{III}}{\partial t} = 0,$$

für $z=0$ und $0<t<\infty$:

$$\frac{\partial\Phi_I}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{II}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{III}}{\partial z} = \Psi'(t).$$

Die Discussion dieser Werthe ist genau wie bei dem vorhergehenden Problem auszuführen.

Die beiden ersten geben die Reflexion der durch eine Anfangsverrückung oder Anfangsgeschwindigkeit hervorgerufenen Verrückungen an der Ebene $z=0$, wo jetzt nicht Φ, sondern $\partial\Phi/\partial z$ gleich Null ist, und zeigen, dass die reflectirte Verrückung und Geschwindigkeit dasselbe Vorzeichen besitzt, wie die auffallende. Bei Darstellung in der ZT-Ebene wird also der von der Anfangsverrückung Φ^0 an der Stelle q herrührende Theil Φ_I sich längs der Geraden $\overline{qq_1}$ und $\overline{qq_2q_4}$ fortpflanzen, ohne das Vorzeichen zu wechseln; diese Linien sind daher in der Figur 51 durchweg ausgezogen. Der von einer Anfangsgeschwindigkeit Φ' in q herrührende Theil Φ_{II} wird sich in dem Streifen zwischen den Geraden $\overline{q_1q}$, $\overline{qq_3}$, $\overline{q_3q_4}$ mit halber, in dem Winkelraum zwischen der Geraden $\overline{q_3q_4}$ und der T-Axe mit voller Stärke ausbreiten, denn der reflectirte Antheil summirt sich zu dem direct erregten; demgemäss sind jene Bereiche in der Figur resp. in einfacher und doppelter Dichte vertical schraffirt.

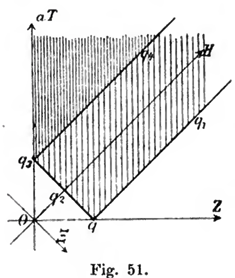


Fig. 51.

Diese Resultate zeigen, dass man die Wirkung der Nullebene $((\partial\Phi/\partial z)_{z=0}=0)$ auf die Ausbreitung von Anfangsverrückungen und Anfangsgeschwindigkeiten innerhalb des Bereiches $0<z<\infty$ auch dadurch erreichen kann, dass man das

elastische Medium sich bis $z = -\infty$ erstrecken lässt und an jeder Stelle $z = -z_q$ die Anfangswerthe Φ^0 und Φ' denen gleich vorschreibt, welche an der entsprechenden Stelle $z = +z_q$ gegeben sind.

Der Beweis ist in der p. 457 angegebenen Weise leicht zu führen.

Der dritte Theil Φ_{III} giebt die Einwirkung der für $z = 0$ gegebenen Deformation $\partial \Phi / \partial z = \Psi'(t)$; da

$$\text{für } at < z \quad \Phi_{III} = 0, \quad \text{für } at > z \quad \Phi_{III} = -a\int_0^{t-z/a} \Psi'(t)\,dt \tag{172}$$

ist, so stellt sich dieser Antheil $at > z$ dar als die Fläche, welche unter der Curve, die $-a\Psi'(t)$ als Function von t darstellt, zwischen den Ordinaten 0 und $t - z/a$ liegt.

Ist beispielsweise

$$\Psi'(t) = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so wird für $at > z$ die fortgepflanzte Verrückung:

$$\Phi_{III}(z, t) = -\frac{AL}{2\pi}\left(1 - \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{L}\right)\right).$$

Was die Anwendung dieser allgemeinen Resultate auf ein unendliches elastisches Medium angeht, so folgt aus den allgemeinen Formeln (128) für die elastischen Drucke unter der Voraussetzung, dass u, v, w nur von z abhängen:

$$-X_z = \frac{c - c'}{2}\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad -Y_z = \frac{c - c'}{2}\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad -Z_z = c\frac{\partial w}{\partial z}; \tag{172'}$$

ferner gelten längs eines Oberflächenelementes, dessen äussere Normale die $-Z$-Richtung ist, die Beziehungen:

$$\overline{X}_z = \overline{X}, \qquad \overline{Y}_z = \overline{Y}, \qquad \overline{Z}_z = \overline{Z};$$

versteht man also unter Φ successive die Verrückungscomponenten u, v, w, so erkennt man, dass die Anwendung der gegebenen Werthe von $\partial \Phi / \partial z$ die Annahme gegebener Werthe der Drucke X_z, Y_z, Z_z in der XY-Ebene oder aber gegebener äusserer Drucke gegen dieselbe enthält.

Sind $\partial u / \partial z$, $\partial v / \partial z$, $\partial w / \partial z$ für $z = 0$ selbst gleich Null gegeben, so entspricht dies dem Falle, dass die XY-Ebene eine freie Oberfläche des elastischen Körpers ist. Angenähert sind die Formeln auch dann anzuwenden, wenn der elastische Körper in dieser Ebene an einen zweiten von viel geringerem elastischen Widerstand grenzt, z. B. ein fester oder flüssiger Körper an ein Gas; desgleichen wenn ein mit Luft erfülltes Rohr sich an einem Ende nach dem freien Raum der Atmosphäre öffnet, denn in dem Querschnitt der Oeffnung können dann Verdünnungen und Verdichtungen nur in geringem Maasse zu Stande kommen, weil die Luft nach allen Seiten hin auszuweichen vermag.

Wir können daher folgende Sätze aussprechen:

Trifft eine ebene Welle senkrecht auf die durch eine parallele Ebene gebildete freie Oberfläche des elastischen Mediums, so wird sie in der Weise reflectirt, dass die umkehrende Verrückung gleiche Grösse und gleiche Richtung besitzt, wie die ankommende.

Wird auf die begrenzende Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung gleichförmig eine mit der Zeit beliebig variirende Druckkraft mit den Componenten $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ ausgeübt, so entstehen dadurch Verrückungen, welche sich mit der Geschwindigkeit a fortpflanzen und ihrer Grösse nach durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{1}{\varepsilon a}\int\limits_0^{t-x/a} \overline{X}(t)\,dt, & a^2 &= \frac{c-c'}{2\varepsilon}, \\ v(x,t) &= -\frac{1}{\varepsilon a}\int\limits_0^{t-x/a} \overline{Y}(t)\,dt, & a^2 &= \frac{c-c'}{2\varepsilon}, \\ w(x,t) &= -\frac{1}{\varepsilon a}\int\limits_0^{t-x/a} \overline{Z}(t)\,dt, & a^2 &= \frac{c}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{172''}$$

Im Uebrigen reflectirt die Ebene, gegen welche diese gegebenen Drucke wirken, auffallende Wellen ebenso, als wäre sie eine freie Oberfläche.

Für das Problem der transversal schwingenden Saite gestatten diese Resultate keine directe Anwendung.

§ 40. Mechanik elastischer Körper; ebene Wellen in einem nach zwei Seiten begrenzten Medium, Pfeifen und Saiten; Kugelwellen.

I. Die Resultate, welche wir im vorigen Abschnitt für die Einwirkung einer den Wellenebenen parallelen Begrenzung des elastischen Mediums erhalten haben, können dazu dienen, das analoge Problem zu erledigen, wenn zwei dergleichen Begrenzungen, etwa für $x = 0$ und $x = l$, vorhanden sind. Das Wesentliche des Vorganges zu übersehen, behandeln wir zuerst den einfachen Fall, dass die Anfangsverrückung Φ^0 und die Anfangsgeschwindigkeit Φ' nur in unmittelbarer Nähe der Stelle $x = x_q$ von Null verschieden gegeben ist. Hier liegen die Verhältnisse so einfach, dass es genügt, die geltenden Gesetze zusammenzustellen; die Vergleichung mit den Resultaten für die einfache Begrenzung, die in den Figuren 50 und 51 veranschaulicht sind, lässt ihre Richtigkeit sofort einleuchten.

Ist an beiden Grenzen $\Phi = 0$ gegeben, so giebt bei der Darstellung des Vorganges in einer ZT-Ebene (Figur 52) eine positive Anfangsverrückung in q für die fortgepflanzte Verrückung positive Werthe längs der ausgezogenen Geraden $\overline{qq_1}$, $\overline{qq_2}$, $\overline{q_2q_5}$, $\overline{q_1q_6}$ u. s. f., negative längs der gestrichelten Geraden $\overline{q_1q_3}$, $\overline{q_2q_4}$ u. s. f.; eine positive Anfangsgeschwindigkeit in q giebt positive Verrückungen in den vertical schraffirten Streifen S_1, $S_3\ldots$, negative in den horizontal schraffirten S_2, $S_4\ldots$. Ein jeder Zustand des Mediums kehrt nach der Figur 52 von Neuem wieder, wenn at um $2l$ wächst; man nennt daher $T = 2l/a$ die Schwingungsdauer des so begrenzten Mediums.

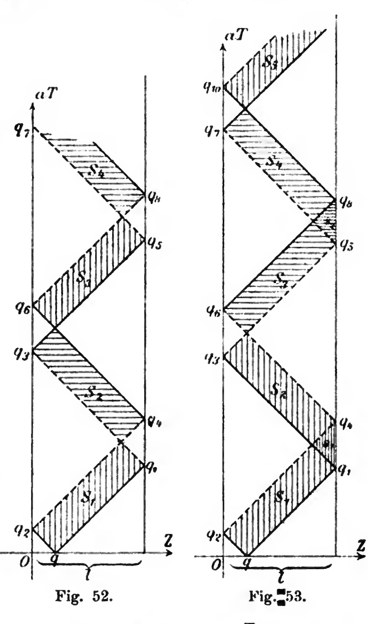


Fig. 52. Fig. 53.

Ist $\Phi = 0$ für $z = 0$, aber $\partial\Phi/\partial z = 0$ für $z = l$, so giebt Figur 53 das stattfindende Verhalten. Die ausgezogenen und die gestrichelten Linien haben dieselbe Bedeutung wie zuvor; in den vertical oder horizontal weit schraffirten Feldern hat die von der Anfangsgeschwindigkeit herrührende Verrückung den einfachen, in den dicht schraffirten den doppelten positiven oder negativen Werth. Die gleichen Zustände entsprechen hier verticalen Abständen $aT = 4l$; die Schwingungsdauer des so begrenzten Mediums ist also $T = 4l/a$.

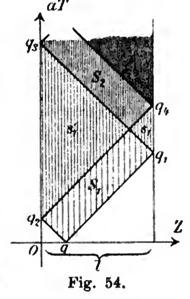


Fig. 54.

Ist endlich $\partial\Phi/\partial z = 0$ für $z = 0$ und für $z = l$, so wird bei keiner Reflexion das Vorzeichen umgekehrt; in der Figur 54, welche diesem Falle entspricht, sind daher alle Linien, welche die Fortpflanzung der positiven Anfangsverrückung

darstellen, ausgezogen. Aber die von der Anfangsgeschwindigkeit in q herrührenden Verrückungen bleiben hier nicht wie in den vorigen Fällen in bestimmten Grenzen, sondern wachsen unausgesetzt, denn die dem Medium mitgetheilte Anfangsgeschwindigkeit wird hier nicht durch die Wirkung der Begrenzung zerstört; ein vollständig freier elastischer Stab z. B. wird in Folge der einem seiner Querschnitte mitgetheilten Anfangsgeschwindigkeit im Ganzen fortschreiten, was nicht stattfindet, wenn eines seiner Enden oder beide festgehalten sind. In der Figur 54 ist dies Verhalten durch die wachsende Dichtigkeit der Schraffirung von Feld zu Feld angedeutet.

Ein jeder Zustand wird hier also hinsichtlich des absoluten Werthes der Verrückungen im Allgemeinen nie wieder erreicht, der relative der einzelnen Theile gegen einander nach einer Zeit $T = 2l/a$.

II. Sind in dem ganzen Intervall $0 < x < l$ Anfangsverrückungen und Anfangsgeschwindigkeiten gegeben, so nimmt von jeder Stelle aus eine Verrückung ebenso ihren Ausgang, wie es in den Figuren 52 bis 54 für eine Stelle dargestellt ist, und es kehren die Anfangszustände nach denselben Intervallen T wieder. Indessen giebt diese Betrachtungsweise nicht die Anschauung des Zustandes des ganzen Intervalles $0 < x < l$ für jeden Zeitpunkt. Eine solche erhalten wir in vollkommener Weise durch die Methode der Verlängerung der Functionen Φ^0 und Φ' über das Bereich $0 < x < l$ hinaus, auf welche wir schon p. 457 und 460 hingewiesen haben.

Um ihre Anwendung zu zeigen, nehmen wir den zweiten der oben besprochenen drei Fälle vor, setzen also voraus, dass $\Phi = 0$ ist für $x = 0$ und $\partial \Phi / \partial x = 0$ für $x = l$.

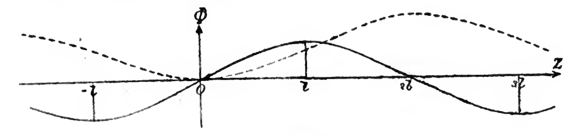


Fig. 55.

Wir denken uns innerhalb des Bereiches $0 < x < l$ das gegebene $\Phi^0(x)$ oder $\Phi'(x)$ für jede Stelle durch die Coordinate einer Curve repräsentirt, welche im Coordinatenanfange die Abscissenaxe schneiden und bei $x = l$ eine horizontale Tangente besitzen muss, um mit den für $x = 0$ und $x = l$ gegebenen Bedingungen im Einklang zu stehen. Die Verlängerung muss die Curve in Bezug auf den Punkt $x = 0$ und in Bezug auf die Verticale in $x = l$ symmetrisch erscheinen lassen, und man erkennt leicht, dass man dadurch zu der Figur (55) geführt wird.

Der Zustand für das ganze zu untersuchende Intervall wird dann, soweit er nur von der Anfangsverrückung $\Phi^0(z)$ herrührt, nach der Formel (167)

$$\Phi_{\text{I}} = \frac{1}{2}\left(\Phi^0(z + at) + \Phi^0(z - at)\right)$$

erhalten, indem man ein Abbild der ganzen Curve mit der Geschwindigkeit a nach rechts, ein anderes nach links verschiebt und an jeder Stelle und zu jeder Zeit die halbe Summe der beiden entsprechenden Coordinaten bildet.

Um den Einfluss einer Anfangsgeschwindigkeit $\Phi'(z)$ zu erhalten, ist die Function Φ' in derselben Weise zu verlängern, wie zuvor Φ^0, und sodann die Function

$$X(z) = \frac{1}{a}\int_0^z \Phi'(z)\,dz$$

zu construiren, welche proportional mit der Fläche ist, die zwischen den Ordinaten 0 und z und unter der Curve für $\Phi'(z)/a$ liegt. Repräsentirt die ausgezogene Curve in Figur 55 die Function $\Phi'(z)$, so giebt die gestrichelte ein Bild von $X(z)$.

Um für jede Zeit t die Verrückung innerhalb des Bereiches $0 < z < l$ zu bilden, hat man dann nach der Formel (167'''')

$$\Phi_{\text{II}} = \frac{1}{2}\left(X(z + at) - X(z - at)\right)$$

ein Abbild der Curve für X mit der Geschwindigkeit a nach der positiven, ein anderes nach der negativen Seite zu verschieben und an jeder Stelle die Hälfte der Differenz ihrer Ordinaten zu bilden. Man erkennt leicht, besonders für den Fall, dass die Anfangsverrückung und Geschwindigkeit nur an einer Stelle von Null verschieden ist, wie das so erhaltene Resultat mit dem oben anders abgeleiteten vollkommen übereinstimmt.

Die Behandlung der beiden andern Fälle bietet keine Schwierigkeit und bestätigt die in dem speciellen Falle erhaltenen Resultate. Soweit dieselben die Schwingungsdauer betreffen, können wir sie in folgenden Satz fassen.

In einem bei $z = 0$ und $z = l$ begrenzten elastischen Medium entsteht durch beliebige anfängliche Verrückungen und Geschwindigkeiten, die nur von z abhängen, ein Schwingungszustand, welcher, wenn

$$\Phi = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und für } z = l$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und für } z = l$$

ist, die Periode

$$T = \frac{2l}{a},$$

hingegen, wenn

$$\Phi = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ für } z = l$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } \Phi = 0 \text{ für } z = l$$

ist, die Periode

$$T = \frac{4l}{a}$$

besitzt.

Dieser Satz gilt für jedes beliebig gewählte System von Anfangsverrückungen Φ^0 und Geschwindigkeiten Φ'; in gewissen speciellen Fällen gestattet er aber eine Erweiterung, die wir durch Betrachtung der p. 453 gegebenen Gesetze der einfachen stehenden Sinusschwingungen leicht finden werden.

III. Eine stehende Schwingung war dargestellt durch die Formel

$$\Phi = A \cos \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{2\pi z}{L},$$

in welcher $L = aT$ gesetzt, und t, wie z, von ganz beliebigen Anfangspunkten aus gerechnet war; die Dilatation $\partial \Phi / \partial z$ folgt daraus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{2\pi A}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi z}{L}.$$

An den Stellen

$$z = \frac{hL}{2}, \quad (h = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

war dauernd $\Phi = 0$, also je ein Schwingungsknoten, an den Stellen

$$z = \frac{(2h+1)L}{4}, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

war dauernd $\partial \Phi / \partial z = 0$, also je ein Schwingungsbauch vorhanden.

Man kann nun bei dergleichen stehenden Schwingungen das elastische Medium in zwei Ebenen begrenzen, die durch beliebige Knoten gelegt sind, wenn man in ihnen Φ dauernd gleich Null erhält; ihr Abstand l muss dann den Werth haben:

$$l = \frac{kL}{2} = \frac{kaT}{2}, \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

Man kann ferner das Medium in zwei Ebenen begrenzen, die durch beliebige Bäuche gelegt sind, wenn dort $\partial \Phi / \partial z$ dauernd gleich Null erhalten wird; ihr Abstand l muss dann der gleiche sein wie oben, nämlich:

$$l = \frac{kL}{2} = \frac{kaT}{2}, \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

Endlich kann man das Medium begrenzen in einer Ebene durch einen Knoten, einer durch einen Bauch, falls in ersterer Φ, in letzterer $\partial\Phi/\partial x$ gleich Null erhalten wird; ihr Abstand ist dann:

$$l = \frac{(2k-1)L}{4} = \frac{(2k-1)aT}{4}, \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

Die erhaltenen Resultate können wir in der Weise umkehren, dass wir den Abstand l der beiden Begrenzungen als gegeben und L oder T als verfügbar betrachten. Dann ergiebt sich der Satz:

Ist ein unendliches elastisches Medium in zwei parallelen Ebenen im Abstand l so begrenzt, dass in beiden $\Phi = 0$, oder in beiden $\partial\Phi/\partial x = 0$ ist, so können in demselben einfache stehende Sinusschwingungen bestehen von der Periode

$$T = \frac{2l}{ka};$$

ist hingegen in der einen $\Phi = 0$, in der andern $\partial\Phi/\partial x = 0$, so können analoge Schwingungen von der Periode

$$T = \frac{4l}{(2k-1)a}$$

zu Stande kommen.

Dieser Satz enthält die Ergänzung des auf p. 465 gegebenen für den speciellen Fall, dass die dort willkürlich gelassenen Schwingungsformen einfache Sinusschwingungen sind; die dort erhaltenen Schwingungsdauern erscheinen jetzt als die grössten unter den überhaupt möglichen und ergeben sich aus den allgemeinen Werthen, wenn man darin $k = 1$ setzt.

Die erhaltenen Gesetze gestatten nach dem früher Gesagten die Anwendung auf die Theorie der Schwingungen von Luftsäulen in Röhren, d. h. der Töne von Pfeifen. Beiderseitig offene und beiderseitig geschlossene Pfeifen von der Länge l gestatten also stehende Schwingungen und sprechen demgemäss bei geeigneter Erregung auf Töne an, welche die Schwingungsdauern $T = 2l/ka$ besitzen, einseitig offene auf solche von den Schwingungsdauern $4l/(2k-1)a$. Gleiches wie von der beiderseitig geschlossenen Pfeife gilt von der beiderseitig befestigten Saite. Da die elastischen Gleichungen die Superposition verschiedener Bewegungen gestatten, so können beliebige der überhaupt möglichen Töne von Pfeifen und Saiten zugleich erklingen; die gewöhnlichen Arten der Erregung — Anblasen bei Pfeifen, Streichen, Zupfen oder Schlagen bei Saiten — bringen in der That nicht einfache, sondern in bestimmter Weise zusammengesetzte Töne hervor. Auf eine nähere Erörterung dieser Verhältnisse müssen wir hier verzichten. —

IV. Die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Phi \tag{173}$$

lässt sich noch in anderen Fällen auf die bisher behandelte specielle Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

zurückführen.

Wir wollen um einen im Raum beliebig gewählten Punkt p eine Kugelfläche vom Radius r construiren, deren Flächenelement do sein möge, die Gleichung (173) mit do multipliciren und über die ganze Kugelfläche integriren; setzen wir den Werth

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{(o)} \Phi \, do = \Omega, \tag{173'}$$

so haben wir dann:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{a^2}{4\pi r^2} \int\limits_{(o)} \Delta \Phi \, do. \tag{173''}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung formen wir um mit Hülfe des Satzes (22') auf p. 298, wonach für ein beliebiges Volumen k' und dessen Oberfläche o' gilt:

$$\int\limits_{(k')} \Delta \Phi \, dk' = - \int\limits_{(o')} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, do',$$

unter n die innere Normale verstanden.

Ist k' ein unendlich kleines Volumen an der Stelle x, y, z, so kann man auch schreiben:

$$\Delta \Phi = - \frac{1}{k'} \int\limits_{(o')} \frac{\overline{\partial \Phi}}{\partial n} \, do'. \tag{173'''}$$

Um diesen Werth in (173'') zu benutzen, wollen wir als Raum k' speciell das an do anliegende kleine Volumenelement $do\,dr$ wählen, das erhalten wird, wenn man um den Punkt p eine zweite Kugelfläche mit dem Radius $r - dr$ construirt und die dadurch erhaltene Schaale durch Elementarkegel nach allen Oberflächenelementen do zerlegt. Das Integral über o' zerfällt hiernach in drei Theile, die sich auf die Mantelfläche o_m und die beiden Grundflächen do_a und do_i von k' beziehen. Das Element von o_m drücken wir durch das Element ds der Randcurve s von do aus, gemäss:

$$do_m = dr\, ds,$$

und do_a und do_i durch die do entsprechende Kegelöffnung $d\omega$, gemäss:

$$do_a = r_a^2 d\omega, \qquad do_i = r_i^2 d\omega.$$

Hiernach nimmt die Gleichung (173‴) die Gestalt an:

$$\varDelta \Phi = -\frac{1}{do}\int\limits_{(s)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + \frac{1}{r^2 dr}\left(\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_a - \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_i\right),$$

was, da $r_a = r$, $r_i = r - dr$ ist, identisch wird mit

$$\varDelta \Phi = -\frac{1}{do}\int\limits_{(s)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right); \tag{174}$$

n ist hierin die innere Normale auf der Randcurve s von do.

Setzt man diesen Werth nun in die Gleichung (173″) ein, so verschwindet in der Summe das erste Glied, da jedes Linienelement ds als Grenze zwischen zwei Flächenelementen do zweimal mit entgegengesetzter Richtung der Normalen und daher entgegengesetzt gleichen Werthen von $\partial \Phi / \partial n$ auftritt.

Es bleibt daher nur:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{a^2}{4\pi r^2}\int\limits_{(o)} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) do = \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{(\omega)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) d\omega.$$

Hier kann man die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschen und erhält, da auch

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\omega)} \Phi \, d\omega = \Omega \tag{174'}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right).$$

Multiplicirt man dies mit r, so kann man das Resultat auch schreiben

$$\frac{\partial^2 r \Omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 r \Omega}{\partial r^2} \tag{174''}$$

und erhält so die früher betrachtete specielle Form der Differentialgleichung von Neuem, nur stehen jetzt r und $r\Omega$ an den Stellen, die früher x und Φ einnahmen.

Wir wenden dieselbe zunächst auf den Fall an, dass zu irgend einem Zeitpunkt die Verrückungen sämmtlich in der Richtung des Radius r liegen und in concentrischen Kugeln constante Grössen besitzen; nach Symmetrie muss dies Verhalten dann auch immer stattfinden. Ω ist in diesem Falle der auf der Kugelfläche constante Werth von Φ selbst, die Gleichung (174″) wird also zu:

$$\frac{\partial^2 r \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 r \Phi}{\partial r^2}; \tag{175}$$

Φ kann die Bedeutung des Deformationspotentiales φ, oder der cubischen Dilatation ϑ annehmen, zwischen denen die Relation besteht:

$$\varDelta \varphi = \vartheta.$$

Für die Verschiebung in der Richtung des Radius gelten die Beziehungen:

$$\varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ und } \varphi = \int \varrho \, dr + f_1(t), \tag{175'}$$

und da nach (174), wenn φ nur r enthält, also $\partial \varphi / \partial n$ verschwindet,

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \tag{175''}$$

ist, auch:

$$r^2 \vartheta = \frac{\partial r^2 \varrho}{\partial r} \text{ und } r^2 \varrho = \int r^2 \vartheta \, dr + f_2(t). \tag{175'''}$$

Hierin bezeichnen f_1 und f_2 Functionen von t allein, von denen die erste ohne Beschränkung in φ hineinzuziehen ist, die zweite aber verschwinden muss, sowie ϱ für $r = 0$ endlich sein soll.

Die Behandlung der Gleichung (175) für den unbegrenzten Raum muss insofern von der früheren abweichen, als Φ nur für positive Werthe von r definirt ist, also für $r = 0$ eine Art von Grenze stattfindet. Man kann aber diesen Unterschied beseitigen, indem man die Functionen $r\Phi^0$ und $r\Phi'$ über den Punkt $r = 0$ hinaus verlängert. Ist $r\Phi$ für $r = 0$ dauernd gleich Null, so ist nach p. 457 jeder negativen Abscisse $r = -r_q$ der entgegengesetzte Werth $r\Phi^0$ und $r\Phi'$, also der gleiche von Φ^0 und Φ' beizulegen, der $r = +r_q$ entspricht; ist aber $\partial(r\Phi)/\partial r$ für $r = 0$ gleich Null, so muss nach p. 460 das Umgekehrte angenommen werden. Analog ist zu verfahren, wenn in einer Kugel von gegebenem endlichen Radius $r\Phi$ oder $\partial(r\Phi)/\partial r$ dauernd gleich Null erhalten wird.

Deutet man Φ als die räumliche Dilatation ϑ, so ist

$$r\vartheta = 2\varrho + r\frac{\partial \varrho}{\partial r},$$

und daher $r\vartheta$ für $r = 0$ selbst gleich Null, wenn ϱ und $r\partial\varrho/\partial r$ dafür verschwindet. In diesem Falle gelten die Formeln (170) und (170') in der Gestalt:

$$r\vartheta(r,t) = \frac{1}{2}\Big((r+at)\vartheta^0(r+at) + (r-at)\vartheta^0(r-at)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at} r\vartheta'(r)\,dr$$

für $at < r$, und (176)

$$r\vartheta(r,t) = \frac{1}{2}\Big((r+at)\vartheta^0(r+at) - (at-r)\vartheta^0(at-r)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at} r\vartheta'(r)\,dr$$

für $at > r$.

Nimmt man nur eine Anfangsverrückung in der Nähe der Kugel $r = r_1$ an, so entstehen hiernach zwei Kugelwellen, von denen die eine

mit abnehmender Stärke sich ausbreitet, die andere mit im Allgemeinen bis unendlich wachsender Stärke sich bis auf einen unendlich kleinen Raum zusammenzieht und darnach sich wieder ausbreitend der ersteren mit abnehmender Intensität nachfolgt.

Ist

$$\vartheta^0 = \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi r}{L} \tag{176'}$$

gegeben, so wird

$$\vartheta(r,t) = \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi r}{L} \cos \frac{2\pi t}{T}, \tag{176''}$$

und wir erhalten stehende Wellen mit Verschiebungen von der Grösse:

$$\varrho = \frac{AL^2}{(2\pi r)^2}\left(\sin \frac{2\pi r}{L} - \frac{2\pi r}{L} \cos \frac{2\pi r}{L}\right) \cos \frac{2\pi t}{T}. \tag{176'''}$$

Bäuche entsprechen $\vartheta = 0$ und liegen an den Stellen, wo $r = hL/2$ ist, falls $h = 1, 2, \ldots$; Knoten entsprechen $\varrho = 0$ und liegen an den Stellen, deren Radien r die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi r}{L} = \frac{2\pi r}{L}$$

sind; die erste entspricht $r = 0$, da hierfür ϱ trotz des r^2 im Nenner verschwindet, die folgenden liegen um so näher bei $r = (2h + 1)L/4$, je grösser h ist; ihre Abstände sind nicht constant, werden aber je mehr und mehr mit wachsendem r gleich $L/2$.

Es hat keine Schwierigkeit, dieser Lösung andere zuzufügen. Da die Verschiebungen nur in der Richtung des Radius stattfinden, so kann man das elastische Medium, zumal wenn es gasförmig ist, ausser durch eine oder zwei Kugelflächen auch durch eine beliebige Kegelfläche begrenzen, welche ihre Spitze in p hat. Man gelangt so zur Theorie der conischen Pfeifen.

V. Endlich wollen wir von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 r\Omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 r\Omega}{\partial r^2}$$

noch eine Anwendung machen, um, falls keine Symmetrie rings um den Punkt p besteht, das Verhalten in ihm selbst zur Zeit t zu bestimmen, wenn im ganzen Raume zur Zeit $t = 0$ sowohl $\Phi = \Phi^0(x, y, z)$ als $\partial\Phi/\partial t = \Phi'(x, y, z)$ gegeben ist. Da Ω den Mittelwerth von Φ auf einer Kugel vom Radius r bezeichnet, so ist natürlich dann für $t = 0$ auch $\Omega = \Omega^0(r)$ und $\partial\Omega/\partial t = \Omega'(r)$ angebbar.

Bei einer Darstellung in einer RaT-Ebene sagt dies aus, dass längs der R-Axe Ω und $\partial\Omega/\partial t$ gegeben und Φ für eine Stelle q der aT-Axe gesucht ist.

Führen wir die Substitution (165) wieder aus, in der nur z mit r zu vertauschen ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 r\Omega}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0.$$

Wir integriren diese Gleichung längs einer Parallelen zur Ξ-Axe, welche durch q bis zur R-Axe gezogen ist und letztere in einem Punkt q' erreichen möge; dann ergiebt sich:

$$\left(\frac{\partial r\Omega}{\partial\eta}\right)_q = \left(\frac{\partial r\Omega}{\partial\eta}\right)_{q'}.$$

Ersetzen wir den Differentialquotienten nach (165′) durch seinen Werth, so findet sich:

$$\left(\frac{\partial r\Omega}{\partial r} + \frac{\partial r\Omega}{a\,\partial t}\right)_q = \left(\frac{\partial r\Omega}{\partial r} + \frac{\partial r\Omega}{a\,\partial t}\right)_{q'}.$$

Nun ist die Stelle q durch $r = 0$ und $t = t$, die Stelle q' durch $r = at$, $t = 0$ gegeben und wir erhalten bei Ausrechnung der linken Seite:

$$\Omega(0, t) = \left(\frac{\partial r\Omega}{\partial r} + \frac{\partial r\Omega}{a\,\partial t}\right)_{(at,0)}. \tag{177}$$

Der Mittelwerth $\Omega(0, t)$ der Function Φ, genommen auf einer Kugel vom Radius Null um die Stelle p, ist aber der Werth von Φ an dieser Stelle selbst; demnach erhalten wir:

$$\Phi(0, t) = \left(\frac{\partial r\Omega^0}{\partial r} + \frac{r\Omega'}{a}\right)_{r=at},$$

und finden, falls wir auch Ω^0 und Ω' durch Φ^0 und Φ' ausdrücken, das Endresultat:

$$\Phi(0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\int\frac{\Phi^0 d\omega}{4\pi}\right) + \frac{r}{a}\int\frac{\Phi' d\omega}{4\pi}\right)_{r=at}. \tag{177′}$$

Dasselbe spricht, wenn wir den Werth $r = at$ in alle Theile der Klammer eingeführt denken, folgenden Satz aus:

Ist in einem unendlichen elastischen Medium eine Anfangsverrückung $\Phi^0(x, y, z)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\Phi'(x, y, z)$ gegeben, so erhält man die Verrückung Φ, die an einer beliebigen Stelle p zu einer beliebigen Zeit t stattfindet, indem man um p eine Kugel vom Radius $r = at$ construirt, wobei a die dem Medium und der Natur der Verrückung Φ entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, und die Mittelwerthe von Φ^0 und Φ' auf dieser Kugel bestimmt, gemäss den Formeln:

$$\Omega^0_{at} = \frac{1}{4\pi}\int\Phi^0 d\omega, \qquad \Omega'_{at} = \frac{1}{4\pi}\int\Phi' d\omega; \tag{177″}$$

in diesen drückt sich die gesuchte Verrückung aus nach der Formel:

$$\Phi_p = \frac{\partial(t\,\Omega^0_{at})}{\partial t} + t\Omega'_{at}. \tag{177'''}$$

Was die Anwendung dieses Satzes betrifft, so ist zu bemerken, dass, wenn Φ als Verrückungscomponente gedeutet wird, bei beliebiger Anfangsverrückung und Anfangsgeschwindigkeit die Zerlegung in Potential- und Drillungsdeformation vorgenommen zu denken und jeder Theil für sich zu behandeln ist; a^2 hat für den ersteren den Werth c/ε, für den letzteren $(c - c')/2\varepsilon$.

Deutet man Φ als ein Deformationspotential φ oder eine räumliche Dilatation ϑ, so ist $a^2 = c/\varepsilon$ zu setzen.

Wir behandeln als Beispiel für letztere Verfügung das Problem, die Dilatation in einem Punkte p zu bestimmen, wenn zur Zeit $t = 0$ ϑ innerhalb einer von zwei concentrischen Kugeln mit den Radien R_a und R_i begrenzten Schaale einen constanten Werth C besitzt und im übrigen Raume verschwindet; der Punkt p sei ein äusserer.

Bezeichnet man mit ω_{at} die Kegelöffnung, welche zu der aus der Kugel vom Radius at durch die Schaale ausgeschnittenen Zone gehört, so ist jetzt:

$$\Phi_p = \frac{C}{4\pi}\frac{\partial t\omega_{at}}{\partial t}.$$

Ist der Abstand des Punktes p vom Centrum der Schaale gleich e, so wird:

$$\begin{aligned}
\omega_{at} &= 0 && \text{für} \quad 0 < at < e - R_a,\\
&= 2\pi\left(1 - \frac{e^2 + a^2t^2 - R_a^2}{2eat}\right) && \text{,,} \quad e - R_a < at < e - R_i,\\
&= 2\pi\left(\frac{R_a^2 - R_i^2}{2eat}\right) && \text{,,} \quad e - R_i < at < e + R_i,\\
&= 2\pi\left(1 - \frac{e^2 + a^2t^2 - R_a^2}{2eat}\right) && \text{,,} \quad e + R_i < at < e + R_a,\\
&= 0 && \text{,,} \quad e + R_a < at < \infty.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi_p &= 0 && \text{für} \quad 0 < at < e - R_a,\\
&= \frac{C(e - at)}{2e} && \text{,,} \quad e - R_a < at < e - R_i,\\
&= 0 && \text{,,} \quad e - R_i < at < e + R_i,\\
&= \frac{C(e - at)}{2e} && \text{,,} \quad e + R_i < at < e + R_a,\\
&= 0 && \text{,,} \quad e + R_a < at < \infty.
\end{aligned}$$

In dem einen Grenzfall, dass R_i sich von R_a nur unendlich wenig unterscheidet, haben wir das p. 470 besprochene Problem einer für eine Kugelfläche constant gegebenen Anfangsdilatation und finden jetzt:

$$
\begin{aligned}
\Phi_p &= 0 && \text{für} \quad 0 < at < e - R, \\
&= \frac{CR}{2e} && \text{"} \qquad at = e - R, \\
&= 0 && \text{"} \quad e - R < at < e + R, \\
&= -\frac{CR}{2e} && \text{"} \qquad at = e + R, \\
&= 0 && \text{"} \quad e + R < at < \infty.
\end{aligned}
$$

Dies stimmt vollkommen mit dem Inhalt von Formel (176).

In dem andern Grenzfall, dass die Kugel voll ist, also R_i verschwindet, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\Phi_p &= 0 && \text{für} \quad 0 < at < e - R, \\
&= \frac{C(e - at)}{2e} && \text{"} \quad e - R < at < e + R, \\
&= 0 && \text{"} \quad e + R < at < \infty.
\end{aligned}
$$

Dieser Fall tritt näherungsweise ein, wenn ein mit verdichteter oder verdünnter Luft gefüllter Ballon zertrümmert wird.

Hier steigt die Dilatation für $at = e - R$ schnell von 0 auf $CR/2e$, sinkt dann lineär mit der Zeit und springt für $at = e + R$ von $-CR/2e$ wieder auf Null.

Eine innerhalb eines Kugelraumes constante, positive oder negative Dilatation C erregt also in einem äussern Punkte zuerst eine Dilatation gleichen und darnach eine entgegengesetzten Vorzeichens; die Differenz des grössten und kleinsten Werthes ist RC/e, falls mit R der Radius des Kugelraumes, mit e der Abstand des betrachteten Punktes vom Kugelcentrum bezeichnet wird.

Register.

Satzfehler.

S. 9 Z. 15 v. u. muss die zweite Formel lauten:

$$V_2 = V \frac{\sin \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

S. 29 Z. 9 v. u. ist t_0 durch t_0' zu ersetzen.

S. 113 Z. 9 v. u. muss stehen „dritten“ statt „zweiten“.

S. 122 Z. 4 v. u. muss stehen „Massenmittelpunktes“ statt „Schwerpunktes“.

S. 126 Z. 12 v. o. muss (100') stehen statt (98').

S. 126 Z. 15 v. o. ist dt zu streichen.

S. 295 Z. 15 v. o. fehlt die Bezeichnung der Formel (19''').

S. 314 Z. 15 u. 16 v. o. muss C_1 an Stelle von C' stehen.

S. 384 ist der Anfang des Z. 11 v. u. beginnenden Satzes besser so zu formulieren:

„Bei ebenen Bewegungen einer unendlichen Flüssigkeit sind die Probleme einzelner Quellen und einzelner Wirbel insofern reciprok zu einander, als, wenn man die Quellen so mit Wirbeln vertauscht, dass ...“.

Verbesserungen.

S. 28, Z. 14 und 16 v. u. lies $a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 M$ statt a.
S. 33, Z. 16 v. u. setze $2C$ an Stelle von C.
S. 33, Z. 15 v. u. setze $2g$ an Stelle von g.
S. 33, Z. 1 v. u. ersetze die letzte Formel (38) durch:

$$M\left(\frac{s}{t} - \frac{s'}{t'}\right) = C\frac{t-t'}{2}.$$

S. 35, Z. 16 v. u. lies $+ C_1$ statt $= C_1$.
S. 38 ist nach Z. 20 von oben einzuschalten:
„Hier, wie weiterhin, ist mit l der natürliche Logarithmus bezeichnet". und dieser Satz dafür S. 40, Z. 20 v. o. zu streichen.
S. 59, Z. 5 v. u. lies:
„ist der zweite Theil von der Geschwindigkeit unabhängig, so lässt er sich als".
S. 71, Z. 7 v. u. lies $-L$ für L,
S. 71, Z. 5 v. u. ebenso $-n$ für n.
S. 78, Z. 10 v. o. lies „horizontaler" statt „ebener".
S. 113, Z. 9 v. u. lies „dritten" statt „ersten".
S. 116, Z. 15 v. u. fehlt nach m_2'' das Zeichen ....
S. 119, Z. 19 v. o. lies „Massenmittelpunktes" statt „Schwerpunktes".
S. 128, Z. 2 v. u. lies „Massenmittelpunkt" statt „Schwerpunkt".
S. 129, Z. 2 v. o. desgl.
S. 130, Z. 8 v. u. lies 120 statt 20.
S. 131 ist in System (107) U und V zu vertauschen.
S. 168, Z. 13 v. o. lies $(R^2 - z^2)^2$ statt $(R^2 - z^2)$.
S. 179, Z. 3 v. u. lies $(x_3 y_1 - y_3 x_1)$ statt $(z_3 y_1 - y_3 x_1)$.
S. 195, Z. 6 v. o. lies $\varphi + a/b$ statt φ.
S. 203, Z. 10 v. u. lies $\sin p\, r_0$ statt $\sin r_0$.
S. 210, Z. 21 v. o. lies „ein System linearer Gleichungen" statt „Gleichungssystem".
S. 227, Z. 9 v. u. lies:
„Körper sind die doppelten Geschwindigkeiten der Flächenmomente".
S. 229, Z. 11 v. u. lies γ' statt α'.
S. 229, Z. 10 v. u. lies α' statt γ'.
S. 229, Z. 8 v. u. lies „A-Axe" statt „C-Axe".
S. 233, Z. 19 v. u. lies (13‴) statt (13″).
S. 235, Z. 13 und 14 v. u. ist A und C vertauscht.
S. 249, Z. 4 v. u. lies Ξ_0', H_0' statt Ξ', H'.
S. 382, Z. 5 v. u. lies u, v, w statt U, V, W.
S. 398, Z. 5 v. u. lies $+ a\bar{V}_k$ statt $+ a V_k$.
S. 418, Z. 1 v. u. lies $\Delta\varphi = \text{Const.}$ statt $\Delta\varphi = 0$.
S. 455, Z. 9 v. o. lies $\int_{(p_1)}^{(p_2)}$ statt $\int_{(p_1)}^{(p_3)}$.
S. 484, Z. 4 v. o. lies „ersten" statt „zweiten".



